

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

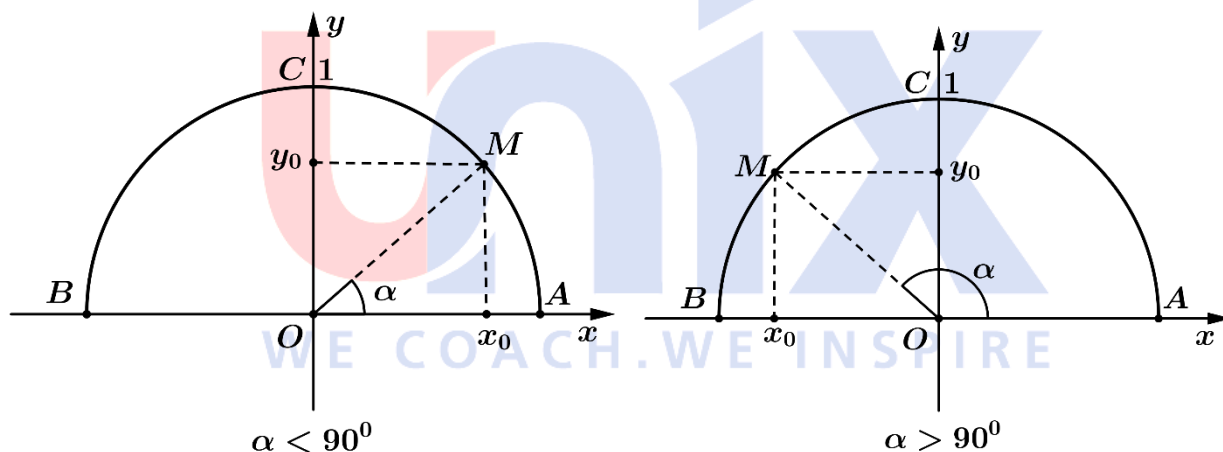
BÀI 01 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giá trị lượng giác của một góc

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R=1$ nằm phía trên trục hoành như hình dưới đây được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Cho trước một góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Khi đó có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\angle xOM = \alpha$.



Với mỗi góc $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = \alpha$. Khi đó:

- sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M được kí hiệu là $\sin \alpha$
- cosin của góc α là hoành độ x_0 của điểm M được kí hiệu là $\cos \alpha$
- Khi $\alpha \neq 90^\circ$ (hay là $x_0 \neq 0$), tang của α là $\frac{y_0}{x_0}$ được kí hiệu là $\tan \alpha$
- Khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ (hay là $y_0 \neq 0$) cotang của α là $\frac{x_0}{y_0}$ được kí hiệu là $\cot \alpha$.

Từ định nghĩa trên ta có:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ \text{ và } \alpha \neq 180^\circ); \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\})$$

Sau đây là bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt nên nhớ.

α GTLG	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\parallel$

2 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác

- Hai góc bù nhau:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

- Hai góc phụ nhau:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha \\ \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

3 Các hệ thức lượng giác cơ bản

$$\begin{aligned}\square \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ) & \square \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ) \\ \square \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 \quad (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ) & \square \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \square 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ) & \square 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)\end{aligned}$$

Dạng 1: Tính các giá trị của biểu thức lượng giác

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & (2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ) \\ &= (2\sin 30^\circ + \cos(180^\circ - 45^\circ) - 3\tan(180^\circ - 30^\circ))(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ) \\ &= (2\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + 3\tan 30^\circ)(-1 - \cot 60^\circ) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{(2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ \\ &= (\sin 90^\circ)^2 + (\cos 120^\circ)^2 + (\cos 0^\circ)^2 - (\tan 60^\circ)^2 + (\cot 135^\circ)^2 \\ &= 1 + (\cos(180^\circ - 60^\circ))^2 + 1 - (\sqrt{3})^2 + (\cot(180^\circ - 45^\circ))^2 \\ &= 1 + (\cos 60^\circ)^2 + 1 - (\sqrt{3})^2 + (\cot 45^\circ)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + (\cos 30^\circ)^2 = 1.$$

Bài tập 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \tan 30^\circ + \cot 30^\circ$

b) $B = \sin^2 45^\circ - 2\sin^2 50^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 40^\circ + 4\tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

c) $C = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

d) $D = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

e) $E = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$

f) $F = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

g) $G = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$

h) $H = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

i) $I = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$

j) $J = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \tan 58^\circ + \frac{5 \tan^2 18^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$

k) $K = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \cos^2 17^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$

Lời giải

a) Ta có $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $B = \sin^2 45^\circ - 2\sin^2 50^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

$$B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4.$$

c) $C = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$
 $= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0$

d) $D = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$
 $= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = 1$

e) Ta có $E = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$
 $= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ)$
 $= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22.$

f) Ta có $F = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$
 $= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2$

g) Ta có $G = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ = 3 - (1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$

h) $H = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2.$

i) $I = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ)$
 $= (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2.$

j) Ta có: $J = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \tan 58^\circ + \frac{5 \tan^2 18^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$
 $= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + \frac{5 \cot^2 72^\circ}{1 + \cot^2 72^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$

$$= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + 5 \cot^2 72^\circ \cdot \sin^2 72^\circ + 5 \sin^2 72^\circ$$

$$= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + 5 \sin^2 72^\circ \cdot (\cot^2 72^\circ + 1)$$

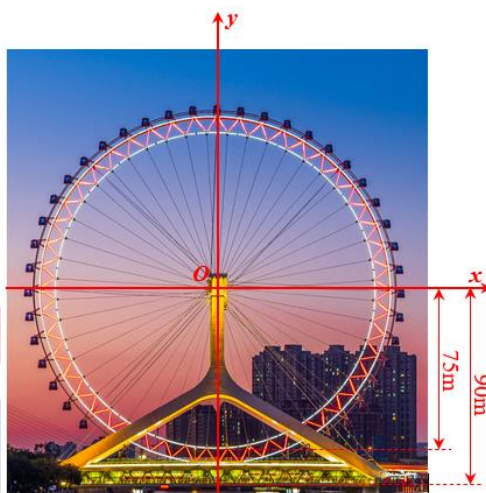
$$= 4(\tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ) \cdot \cos 0^\circ + 5 \sin^2 72^\circ \cdot \frac{1}{\sin^2 72^\circ} = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 5 = 9$$

$$\text{k) Ta có: } K = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \cos^2 17^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$$

$$= 12 \cdot \cos^2 73^\circ - 4 \cot 15^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \sin^2 73^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 40^\circ$$

$$= 12 \cdot (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) - 4 \cot 15^\circ \cdot \tan 15^\circ - 2(\tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ) \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

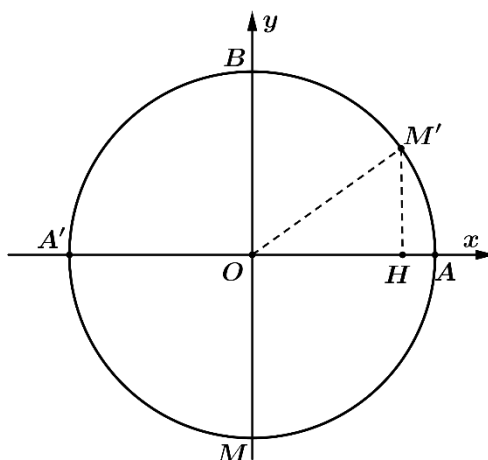
Bài tập 3: Một chiếc đu quay có bán kính 75m, tâm của vòng quay ở độ cao 90m như hình vẽ dưới đây. Thời gian thực hiện mỗi vòng quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay thì sau 20 phút quay người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Lời giải

Giả sử chiếc đu quay quay theo chiều kim đồng hồ.

Gọi M là vị trí thấp nhất của cabin, M' là vị trí của cabin sau 20 phút và các điểm A, A', B, H (như hình vẽ).



Vì đi cả vòng quay mất 30 phút nên sau 20 phút, cabin sẽ đi quãng đường bằng chu vi đường tròn.

Sau 15 phút, cabin di chuyển từ điểm M đến điểm B , đi được chu vi đường tròn.

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Trong 5 phút tiếp theo, cabin đi chuyển từ điểm B đến điểm M' tương ứng chu vi đường tròn hay cung tròn.

$$\text{Do đó } \angle BOM' = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle AOM' = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Ta có: } M'H = \sin 30^\circ \cdot OM' = \frac{1}{2} \cdot 75 = 37,5 \text{ (mét)}$$

$$\text{Do đó độ cao của người đó là: } 37,5 + 90 = 127,5 \text{ (m)}$$

Vậy sau 20 phút quay người đó ở độ cao 127,5m.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.

B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$.

D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Lời giải

Áp dụng bảng giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3}\sin 150^\circ + \cos 135^\circ - \sin 120^\circ$ ta được

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $-\sqrt{2}$.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \sqrt{3}\sin 150^\circ + \cos 135^\circ - \sin 120^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 3: Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

$$A = (\tan 1^\circ \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

Câu 4: Tổng $\sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \sin^2 7^\circ + \dots + \sin^2 83^\circ + \sin^2 85^\circ + \sin^2 87^\circ$ bằng

A. 21.

B. 23.

C. 22.

D. 24.

Lời giải

$$S = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ) + \dots + (\sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ)$$

$$S = (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + \dots + (\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ) = 22.$$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2.$$

Câu 6: Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin(90^\circ + 36^\circ) \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 x} + 3 - 2 \tan^2 x$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{2}{\cos^2 x} + 3 - 2 \tan^2 x = 2(1 + \tan^2 x) + 3 - 2 \tan^2 x = 5$$

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0.$$

Câu 9: Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Lời giải

$$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Câu 10: Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin x \cos x$ bằng

- A. $-\frac{5}{18}$. B. $-\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{18}$. D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (\sin x + \cos x)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{5}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}.$$

Câu 11: Cho $\tan x - \cot x = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x + \cot^2 x$ bằng

- A. 0. B. 4. C. 6. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x - \cot x)^2 + 2 \tan x \cot x = 4 + 2 = 6.$$

Câu 12: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \tan^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) - \sin^2 x \tan^2 x + 1 = \sin^2 x \tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1 = 1.$$

Câu 13: Biểu thức $\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$ không phụ thuộc vào a và có giá trị bằng

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a = \sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right) + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \sin^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a = 3\sin^2 a + 3\cos^2 a = 3.$$

Câu 14: Cho $H = \cos(x + 60^\circ) - 5\cos(120^\circ - x) - 6.\sin(x + 60^\circ).\cot(x + 60^\circ)$ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $H = -1$. B. $H = \frac{1}{3}$. C. $H = \frac{\pi}{3}$. D. $H = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } H &= \cos(x + 60^\circ) - 5\cos(120^\circ - x) - 6.\sin(x + 60^\circ).\cot(x + 60^\circ) \\ &= \cos(x + 60^\circ) + 5\cos(180^\circ - 120^\circ + x) - 6\sin(x + 60^\circ).\cot(x + 60^\circ) \\ &= \cos(x + 60^\circ) + 5\cos(60^\circ + x) - 6\cos(x + 60^\circ) = 0 \end{aligned}$$

Câu 15: Cho $D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $D = 0$. B. $D = 8$. C. $D = 2022$. D. $D = 18$.

Lời giải

Công thức áp dụng: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow \cos 80^\circ = \sin 10^\circ, \cos 70^\circ = \sin 20^\circ, \cos 60^\circ = \sin 30^\circ, \cos 50^\circ = \sin 40^\circ$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ, \cos 160^\circ = -\cos 20^\circ, \dots, \cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$$

$$\text{Ta có: } D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$$

$$= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 100^\circ + \dots + \cos^2 160^\circ + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$$

$$= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 80^\circ + \dots + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + 1$$

$$= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ) + \cos^2 90^\circ + 1$$

$$= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ) + 0 + 1$$

$$= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 10^\circ) + 1$$

$$= 2(\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + 1$$

$$= 2(1+1+1+1) + 1 = 9.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $A = \tan 2^\circ \tan 3^\circ \tan 4^\circ \dots \tan 87^\circ \tan 88^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Góc có số đo 2° và góc có số đo 88° là hai góc phụ nhau.

b) Biểu thức A được đưa về dạng

$$A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ).$$

c) Ta có $\tan 88^\circ = \cot 2^\circ$.

d) Giá trị của biểu thức A bằng 2.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $2^\circ + 88^\circ = 90^\circ$ nên góc có số đo 2° và góc có số đo 88° là hai góc phụ nhau

b) Đúng: Ta có $A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$

c) Đúng: Vì $\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \cot 2^\circ$.

d) Sai: Ta có $A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$
 $= A = (\tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \cot 3^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \cot 4^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \cot 45^\circ) = 1.$

Câu 2: Cho $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Xét biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi góc a, b ta luôn có $\sin^2 a + \cos^2 b = 1$.

b) Biểu thức $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ được viết lại $2\sin a \cos a = 1$

c) Biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$ được viết lại $P = 1 - 2\sin a \cos a$

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Với mọi góc a ta luôn có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

b) Đúng: Ta có

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = 2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin a \cos a = 2 \Leftrightarrow 2\sin a \cos a = 1.$$

c) Sai: Ta có $P = \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\sin^2 a \cos^2 a$.

d) Đúng: Từ $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ ta có $\sin a \cos a = \frac{1}{2}(1)$.

$$\text{lại có } P = \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\sin^2 a \cos^2 a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } P = \frac{1}{2}$$

Câu 3: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ và biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi góc α ta luôn có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

b) Với mọi góc α ta luôn có $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha$.

c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2$.

d) Biểu thức $P = 7$ khi và chỉ khi $m = \pm 3$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$

b) Sai: Với mọi góc α ta luôn có $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \neq \tan^2 \alpha \cot^2 \alpha$.

c) Đúng: $P = \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha + \cot^2 \alpha - 2 = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2$

d) Đúng: Khi $P = 7 \Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 = 7 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = \sin x \cdot \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

b) $2M = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$.

d) Khi $M = \frac{1}{4}$ thì $m = \frac{3}{4}$.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

b) Đúng: Ta có $2M = 2 \sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow 2M = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$.

c) Sai: Từ $\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$.

d) Sai: Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2 \Rightarrow m^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức: $P = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$.

Lời giải

Ta có $P = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Câu 2: Giá trị của biểu thức $P = 5(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x$ bằng

Lời giải

Ta có $P = 5(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= 5[1^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x] - 2[1^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)] + 4 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= 5(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x = 5 - 2 = 3$

Câu 3: Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + (\tan \alpha + \cot \alpha)^2$

Lời giải

$P = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$
 $= 1 + \tan^2 \alpha + 1 + \cot^2 \alpha + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 4 + 2(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)$
 $= 4 + 2[(\tan \alpha - \cot \alpha)^2 + 2] = 16$

Câu 4: Cho các góc α, β thỏa mãn $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ và $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^6 \alpha + \sin^6 \beta + 3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$.

Lời giải

Ta có: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$. Mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên

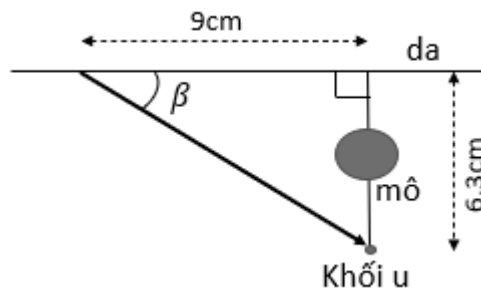
$$= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1. \text{ Vậy } T = 1.$$

Câu 5: Xạ phẫu Gamma Knife là phương pháp điều trị u não (không cần mở hộp sọ) bằng cách sử dụng bức xạ gamma tập trung, hội tụ chính xác vào tổn thương, không làm hại mô lành. Nếu khối u của bệnh nhân cách mặt da 6,3 cm, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u 9 cm để tránh làm tổn thương mô thì góc tạo bởi chùm tia với mặt da là β . Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \beta$

Lời giải

Từ đề bài ta có hình vẽ sau:



Gọi β là góc tạo bởi chùm tia với mặt da. Ta có: $\tan \beta = \frac{6,3}{9} = \frac{7}{10}$.

Câu 6: Cho $\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \tan^n x$ và $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^n x + \cos^n x$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)}{\cos^2 x \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \right)} = \frac{\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \tan^6 x \Rightarrow \tan^n x = \tan^6 x \Rightarrow n = 6$$

$$\text{Với } n = 6 \Rightarrow P = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \sin x + \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } P = 1 - 3 \cdot \frac{16}{81} = \frac{11}{27} \approx 0,41.$$

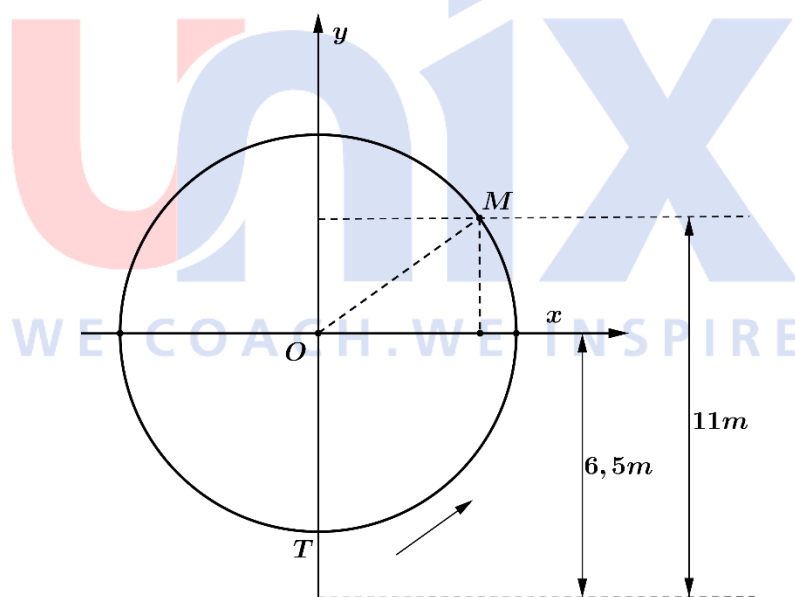
Câu 7: Guồng nước (cọn nước) được biết đến là một công cụ đặc lực trong sản xuất nông nghiệp của bà con dân tộc Thái ở nước ta.



Chiếc guồng được cấu tạo giống như bánh xe đạp, có đường kính 10m. Tâm quay ở độ cao 6,5 m. Nan hoa làm bằng loại tre già, có sức chịu đựng trong môi trường ẩm ướt. Vành guồng rộng 50cm, được đặt các phen nửa để cản nước, tạo lực đẩy guồng quay và có gắn các ống bương (lùng) buộc chéo khoảng 30 độ để mức đầy nước khi chìm xuống. Lực đẩy của nước khiến guồng quay liên tục, đến tầm cao nhất định, thì các ống bương bắt đầu đổ nước vào các máng dài. Biết thời gian cọn nước thực hiện 1 vòng quay là 3 phút. Máng nước cao 11m. Nếu một ống bương đang ở vị trí thấp nhất thì thời gian nó di chuyển đến vị trí máng nước là

Lời giải

Gọi vị trí thấp nhất của ống bương là T , M là vị trí của máng nước (như hình vẽ)



Tung độ của điểm M là $y_M = 11 - 6,5 = 4,5 \Rightarrow \sin xOM = \frac{y_M}{OM} = \frac{4,5}{5} = 0,9 \Rightarrow xOM \approx 64^0$

Ta có: $TOM = TOx + xOM = 90^0 + 64^0 = 154^0$.

Vì thời gian cọn nước thực hiện 1 vòng quay là 3 phút nên thời gian ống bương di chuyển từ T đến M là $\frac{3.154}{360} = \frac{77}{60}$ (phút).

-----HẾT-----