

Dạng 3: Điểm thoả mãn đẳng thức vectơ

Phương pháp:

- Sử dụng khái niệm vectơ
- Sử dụng khái niệm vectơ cùng phương, cùng hướng
- Sử dụng khái niệm độ dài của vectơ và vectơ bằng nhau

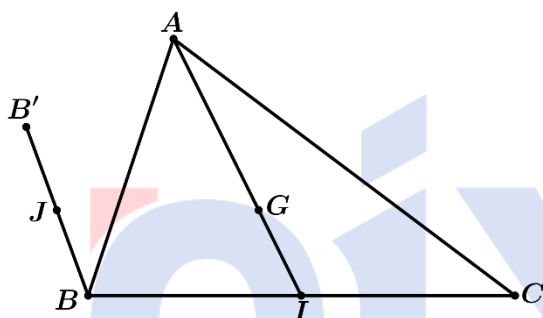
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

b) Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải



a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

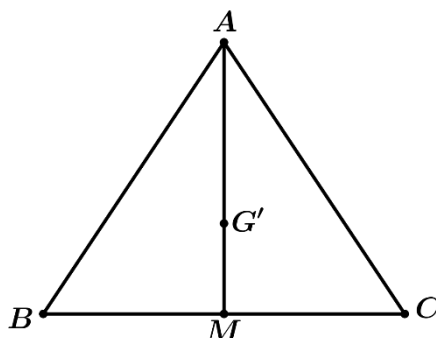
b) Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $BB' \parallel AG$ nên $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \frac{1}{2} AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \frac{1}{2} BB'$

Vì vậy $BJ = IG$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tìm điểm G trên đoạn AM để $|\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



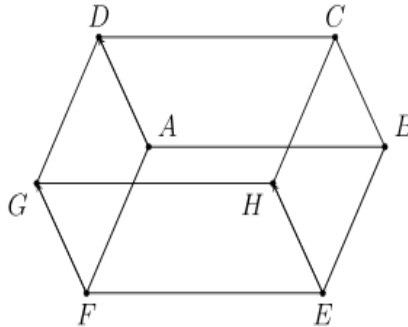
Lời giải

Gọi G' là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó ta có: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì G' là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AG' = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow |\overrightarrow{AG'}| = |\overrightarrow{AG}| \Rightarrow G \equiv G'$.

Bài tập 3: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ với A, D, F không thẳng hàng. Dựng các vector $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng vector $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} \Rightarrow$ Tứ giác $FEHG$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$ (1).

Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC}$. Vậy tứ giác $GHCD$ là hình bình hành.

Bài tập 4: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N . Biết $OA=1, OB=2, OC=3$ và $OD=4$. Tính tỷ số $\frac{CN}{ND}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA}$ mà $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ cùng phương

Khi đó: $\exists k$ sao cho $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Đặt $\frac{CN}{ND} = k, k > 0$

Ta có: $\overrightarrow{ON} = \frac{-3}{1+k}.\overrightarrow{OA} - \frac{2k}{k+1}.\overrightarrow{OB} \Rightarrow \frac{-6}{k(k+1)} = \frac{-4k}{k(k+1)} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm M, N sao cho $AM = \frac{2}{5}MB, \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$

. Gọi I là giao điểm của AN và CM . Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CI} = y\overrightarrow{CM}$

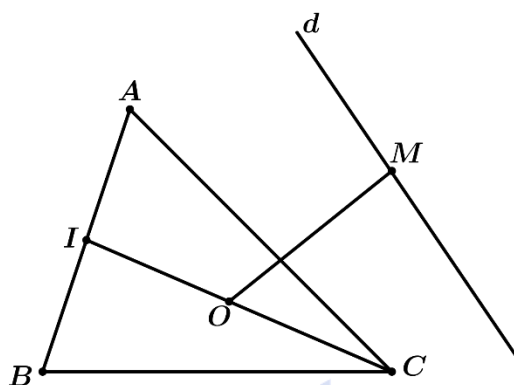
Ta có: $\overrightarrow{AI} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = x\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3x}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{21x}{8}\overrightarrow{AM} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\text{Vì } M, C, I \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{21x}{8} + \frac{x}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{8}{23}$$

$$\text{Tương tự ta chưa tìm được } \frac{IC}{IM} = \frac{21}{2}.$$

Bài tập 6: Cho tam giác ABC và đường thẳng d . Gọi O là điểm thỏa mãn hệ thức $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0}$. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vector $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AB .

Khi đó: $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{OI} + 2\vec{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OI} + \vec{OC} = \vec{0} \Rightarrow O$ là trung điểm của IC

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \vec{v} &= \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{OA} - \vec{OM} + \vec{OB} - \vec{OM} + 2(\vec{OC} - \vec{OM}) \\ &= \vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} - 4\vec{OM} = -4\vec{OM}. \end{aligned}$$

Do đó $|\vec{v}| = 4OM$ nên độ dài vector $\vec{v}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $4OM$ nhỏ nhất

Hay M là hình chiếu vuông góc của O trên d .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ với điểm M nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M qua A', B', C' . Câu nào sau đây **đúng**?

- A.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

Lời giải

Ta có $AMCP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có $AQBM$ và $BMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow NC = BM = QA \Rightarrow AQNC$ là hình bình hành

Khi đó $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng với B qua O . Câu nào sau đây **đúng**?

- A.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

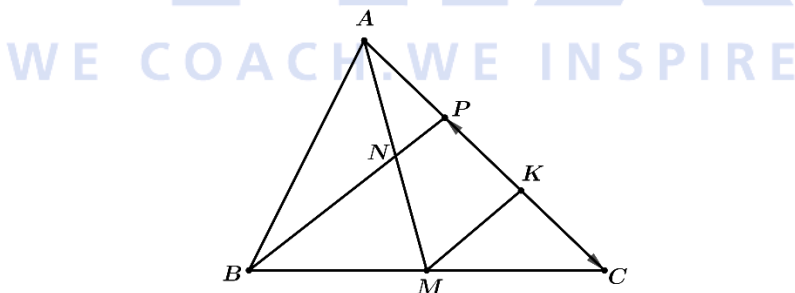
Lời giải

Ta có thể chỉ ra được $ADCH$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

Câu 3: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P . Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

- A.** $-\frac{4}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{5}{3}$

Lời giải


$$\text{K}\acute{\text{e}} \text{ } MK \parallel BP (K \in AC).$$

Do M là trung điểm của BC nên suy ra K là trung điểm của CP

Vì $MK \parallel BP \Rightarrow MK \parallel NP$ mà N là trung điểm của AM nên suy ra P là trung điểm của AK

Do đó: $AP = PK = KC$. Vậy $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CP} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Câu 4: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

- A.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
- B.** $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$
D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M

Lời giải

Ta có: $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm trên AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm B, I, K thẳng hàng.

- A. $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ B. $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ C. $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI}$ D. $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

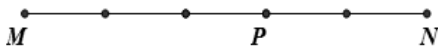
Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

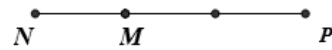
$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow B, I, K \text{ thẳng hàng.}$$

Câu 6: Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3. B. Hình 4. C. Hình 1. D. Hình 2.

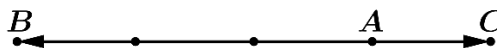
Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \text{ ngược hướng với } \overrightarrow{MP} \text{ và } |\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{MP}|.$$

Câu 7: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$ C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

Lời giải



Câu 8: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức vector sau $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm của BC
 B. M là trung điểm của IC
 C. M là trung điểm của IA
 D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$

Lời giải

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } IC.$$

Câu 9: Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

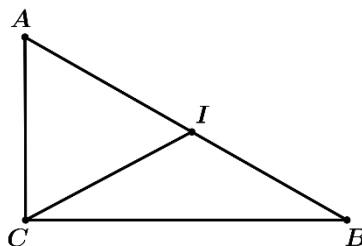
A. Tam giác ABC đều

B. Tam giác ABC cân tại C

C. Tam giác ABC vuông tại C

D. Tam giác ABC cân tại B

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = AB$$

$$\Leftrightarrow |2\overrightarrow{CI}| = AB \Leftrightarrow 2CI = AB \Leftrightarrow CI = \frac{1}{2}AB \text{ nên tam giác } ABC \text{ vuông tại } C.$$

Câu 10: Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$

C. $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$

D. $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Ta thấy $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ là sai.

Câu 11: Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của AC . Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức:

A. $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

B. $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$

C. $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

D. $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BI}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NI} = -\overrightarrow{NB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$$

Câu 12: Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Tìm số $k \in \mathbb{Q}$ sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

A. $k = \frac{3}{4}$

B. $k = \frac{3}{5}$

C. $k = \frac{2}{5}$

D. $k = \frac{3}{2}$

Lời giải

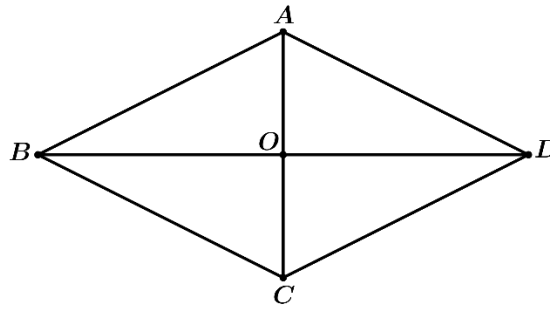
$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{3}{5}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh a , $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC, BD . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Vector - không có điểm đầu là A thì nó có điểm cuối là A .
- Độ dài của $\overline{AC}$ bằng a .
- $\overline{AB}, \overline{DC}$ không cùng phương.
- $BD = 2a$

Lời giải

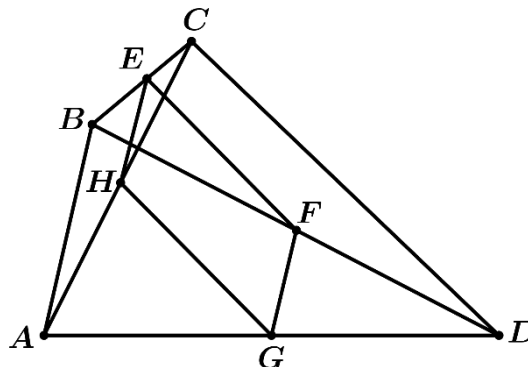


- Đúng: Vector - không có điểm đầu là A thì nó có điểm cuối là A
- Đúng: Ta có $\triangle ABC$ đều nên $AC = a$.
- Sai: $AB \parallel DC$ nên $\overline{AB}, \overline{DC}$ cùng phương.
- Sai: $BD = 2BO = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của BC, BD, AD, AC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- EF là đường trung bình của các tam giác BCD .
- $GH = \frac{1}{3}CD$.
- $EFGH$ là hình bình hành.
- $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{FE}$.

Lời giải



Ta có EF, GH lần lượt là đường trung bình của các tam giác BCD, ACD nên

$EF \parallel GH \parallel CD$ và $EF = GH = \frac{1}{2}CD$. Vì vậy $EFGH$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$.

a) Đúng: EF là đường trung bình của các tam giác BCD .

b) Sai: $GH = \frac{1}{2}CD$.

c) Đúng: $EFGH$ là hình bình hành.

d) Sai: $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi G' là điểm đối xứng với G qua trung điểm M của BC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

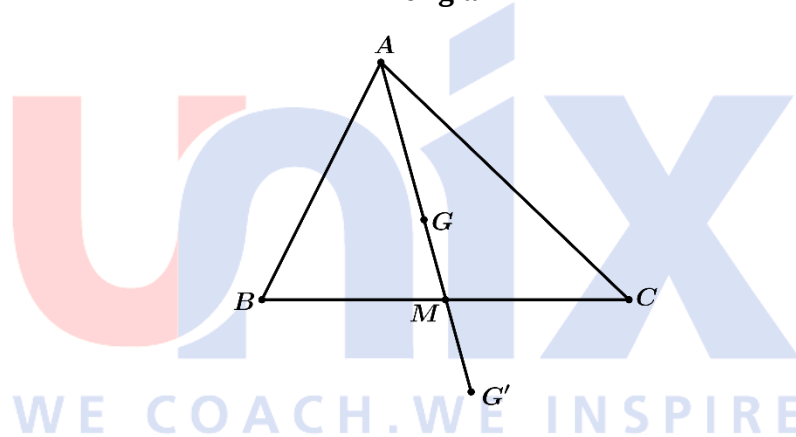
a) $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$ cùng hướng.

b) $GA = 3GM$.

c) $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$.

d) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$.

Lời giải



Để thấy hai vector $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$ cùng hướng (1)

Do G là trọng tâm của tam giác ABC , G' là điểm đối xứng với G qua M nên $G'G = 2GM$.

Suy ra $GA = G'G \Rightarrow |\overrightarrow{GA}| = |\overrightarrow{G'G}|$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$ và $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$.

a) Đúng: $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$ cùng hướng.

b) Sai: $GG' = 3GM$.

c) Đúng: $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$.

d) Đúng: $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$.

Câu 4: Cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD , $AB < CD$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{CD}|$.

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng.

d) Nếu $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ thì $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Lời giải

a) Ta có: $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{CD}|$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ không cùng hướng nên $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng.

d) Ta có: $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ nên hình thang $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi điểm M là trọng tâm $\triangle ABC$ và thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{MB} + \beta \overrightarrow{MC}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Tính $2\alpha + \beta$.

Lời giải

Ta có M là trọng tâm thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

So sánh với $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{MB} + \beta \overrightarrow{MC} \Rightarrow \alpha = -1; \beta = -1$ suy ra $2\alpha + \beta = -3$

Câu 2: Cho tam giác $\triangle ABC$. Các điểm I, J thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC}$. Biết $IC \parallel BJ$ thì $\overrightarrow{CI} = -\frac{a}{b}\overrightarrow{BJ}, (a, b \in \mathbb{Z}^*)$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$ (1)

$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = 4$.

Câu 3: Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực $\vec{P}$ của vật và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

Lời giải

Lực đẩy Archimedes $\vec{F}_A$ và trọng lực $\vec{P}$ đều tác động lên vật theo phương thẳng đứng, hai lực này ngược hướng. Do ở trạng thái cân bằng vật nổi (chìm một nửa), nên hai lực này có cường độ bằng nhau.

Gọi d, d' tương ứng là trọng lượng riêng của vật và trọng lượng riêng của chất lỏng; gọi V là thể tích của vật. Khi đó trọng lượng của vật bằng $P = |\vec{P}| = dV$ (1)

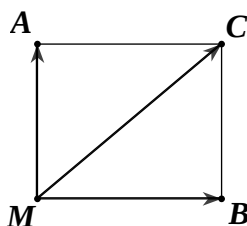
Lực đẩy Archimedes tác động lên vật có cường độ bằng $F_A = |\vec{F}_a| = d' \cdot \frac{V}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) để ý rằng $P = F_A$ suy ra $\frac{d}{d'} = 2$.

Câu 4: Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật đặt tại điểm M . Cho biết cường độ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng $50N$, tam giác MAB vuông tại M . Điểm M thỏa mãn $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC}$.

Tính độ dài của $(\vec{MA} + \vec{MB})\sqrt{2}$.

Lời giải

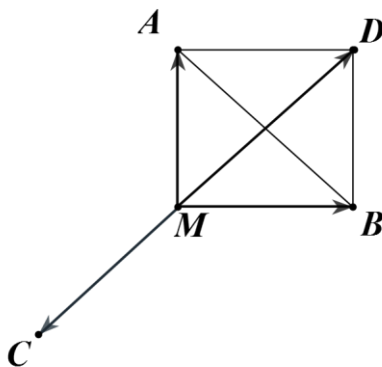


Ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC} \Rightarrow |\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MC}|$

Lại có $\triangle MAB$ vuông tại M nên ta có $|\vec{MC}| = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 50\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}(|\vec{MA}| + |\vec{MB}|) = 100$

Câu 5: Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}, \vec{F}_3 = \vec{MC}$, cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên khi đó. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng $100N$ và góc $AMB = 90^\circ$. Tính cường độ lực $\vec{F}_3$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải



Vẽ hình vuông $ADBM$, cạnh $MA = 100 \Rightarrow MD = 100\sqrt{2}$

Lại có $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD} \Rightarrow \vec{F}_3 = -\vec{MD} \Rightarrow |\vec{F}_3| = 100\sqrt{2} \approx 141$

Câu 6: Cho tam giác ABC biết $AB = 27(\text{cm})$. Điểm M thỏa mãn: $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MB} - \vec{MA}|$. Khi đó điểm M nằm trên đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vì A, B, C cố định nên ta chọn điểm I thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$$

$$\Rightarrow I \text{ duy nhất từ đó } 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI} \text{ và } \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Từ giả thiết ta suy ra } |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9} = 3(\text{cm})$$

-----HẾT-----

