

Dạng 3: Rút gọn các biểu thức lượng giác

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

b) $B = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$

c) $C = \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a$

d) $D = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 3\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + \cos^2 a}$

e) $E = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$

Lời giải

a) Ta có: $A = (\tan^2 x + 2\tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) - (\tan^2 x - 2\tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = 4$.

b) $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1$

c) Ta có

$$\begin{aligned} \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a &= \sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right) + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a \\ &= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \sin^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a = 3\sin^2 a + 3\cos^2 a = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có: } D &= \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 3\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + \cos^2 a} = \frac{\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 2\frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a} - 3\frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}}{2\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - 3\frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}} \\ &= \frac{\tan^2 a + 2 \cdot \tan a - 3}{2 \cdot \tan^2 a - 3 \cdot \tan a + 1} = \frac{(\tan x - 1)(\tan x + 3)}{(\tan x - 1)(2 \tan x - 1)} = \frac{\tan x + 3}{2 \tan x - 1}. \end{aligned}$$

e) Ta có $P = \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x + \cot x}$

$$b) B = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + (\tan x - \cot x)^2 + 1$$

$$c) C = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x.$$

$$d) D = \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x}$$

$$e) E = \frac{\cos^3 x + 2\cos^2 x \sin x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^3 x}{(\tan x - \cot x)(\cos x + 2\sin x)}$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có } A = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1}{\sin x \cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

$$b) \text{Ta có: } B = 2(1 + \tan^2 x) - (1 + \cot^2 x) + \tan^2 x + \cot^2 x - 2 + 1 = 3\tan^2 x.$$

$$c) C = [(1 - \sin^2 x) - 1] \cot^2 x + 1 = -\sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$d) \text{Ta có } D = \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} + \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)}$$

$$= \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} = 2 - \cos^2 x + 2 - \sin^2 x = 4 - (\cos^2 x + \sin^2 x) = 3.$$

$$e) \text{Ta có } E = \frac{(\cos^3 x - \sin^2 x \cos x) + (2\cos^2 x \sin x - 2\sin^3 x)}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)(\cos x + 2\sin x)}$$

$$= \frac{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)(\cos x + 2\sin x)}$$

$$= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + 2\sin x)\sin x \cos x}{-(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + 2\sin x)} = -\sin x \cos x.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$. B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$
C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$. D. $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

Lời giải

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x).$$

Câu 2: Biểu thức $(\cot a + \tan a)^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}$. B. $\cot^2 a + \tan^2 a$. C. $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$. D. $\cot^2 a \tan^2 a + 2$.

Lời giải

$$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2\cot a \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$$

Câu 3: Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

- A. $\sin x$. B. $\frac{1}{\cos x}$. C. $\frac{1}{\sin x}$. D. $\cos x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$ ta được

- A. $P = \frac{1}{2} \tan x$. B. $P = \frac{1}{2} \cot x$. C. $P = 2 \cot x$. D. $P = 2 \tan x$.

Lời giải

$$P = \frac{1 - \sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2\sin x} = \frac{1}{2} \cot x$$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $A = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^6 x - \cos^6 x$ ta được

- A. $\sin x \cos x$. B. $\sin^2 x \cos^2 x$. C. $-\sin x \cos x$. D. $-\sin^2 x \cos^2 x$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} A &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \right] \\ A &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 1 + 3\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1}$ ta được

- A.** 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

$$P = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = \frac{\sin^2 x \tan^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = 1$$

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{-\sin^2 x + 4\cos x + 5} - 2$ ta được

- A.** $\cos x$. **B.** $-\cos x$. **C.** $4 + \cos x$. **D.** $\cos x + 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \sqrt{-(1 - \cos^2 x) + 4\cos x + 5} - 2 = \sqrt{(\cos x + 2)^2} - 2 = \cos x + 2 - 2 = \cos x.$$

Câu 8: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\cot x} + \frac{3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)}{(\sin x - \cos x)^2 - 1}$ ta được

- A.** $\frac{1}{\sin x \cos x}$. **B.** $\frac{1}{2\sin x \cos x}$. **C.** $-\frac{1}{\sin x \cos x}$. **D.** $-\frac{1}{2\sin x \cos x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] - 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x]}{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x - 1} \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{3(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x)}{-2\sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2\sin x \cos x}. \end{aligned}$$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos x}{\tan x + \cot x} + \cos x \sin^2 x$ ta được

- A.** $\sin x$. **B.** $\cos x$. **C.** $\tan x$. **D.** $\cot x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} + \sin^3 x = \frac{\cos x}{\frac{1}{\sin x \cos x}} + \sin^3 x \\ &= \sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x. \end{aligned}$$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sin(180^\circ - x)\sin(90^\circ - x)}{\tan x + \cot x} + \sin^4 x + \cos^4 x$ ta được

- A.** 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{2\sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} + 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 2\sin^2 x \cos^2 x + 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1.$$

Câu 11: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$ ta được

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)}{\cot^2 x} + \sin^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x \cot^2 x}{\cot^2 x} + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Câu 12: Đơn giản biểu thức $P = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

- A. $\frac{1}{\cos x}$. B. $\tan x$. C. $\frac{1}{\sin x}$. D. $\cot x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x + 1}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x}{\tan x - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$.

b) Biểu thức $A = \sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x$ được viết lại $A = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{1 + \tan^2 x}$.

c) Rút gọn biểu thức P ta được $P = \frac{\tan x + 4}{1 + \tan^2 x}$

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$ khi $\cos x = \frac{1}{2}$.

a) Đúng: Ta có: $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

b) Đúng: Ta có $A = \cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 4 \right) = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{1 + \tan^2 x}$

c) Đúng: Vì $P = \frac{A}{\tan x - 1} = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)} = \frac{(\tan x - 1)(\tan x + 4)}{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)} = \frac{\tan x + 4}{1 + \tan^2 x}$.

d) Sai: Ta có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{3} + 4}{4}$.

Câu 2: Cho biểu thức $P = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$ được viết lại $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$
 b) Biểu thức $\sin^8 x + \cos^8 x$ được đưa về dạng $1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cos^4 x$.
 c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = 2(1 - \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 1 + 4\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^4 x \cos^4 x$
 d) Rút gọn P ta được $P = 1$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 4$

b) Đúng: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.

c) Đúng: Ta có

$$P = \sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

d) Đúng: Từ $\tan a + \cot a = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$

lại có $P = \sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

Vậy $P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Câu 3: Cho $A = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan^2 x \sin^2 x}$ và biểu thức $B = 1 + 2\cot^3 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Biểu thức $(\sin x + \cos x)^2$ bằng $1 - 2\sin x \cos x$.
 b) $\tan^2 x - \sin^2 x$ được viết lại $\tan^2 x \sin^2 x$
 c) Biểu thức A được đưa về dạng $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x}$.
 d) Biểu thức A bằng B .

Lời giải

a) Sai: Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$

b) Đúng: Ta có $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \tan^2 x$

c) Đúng: $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 1 + 2\sin x \cos x - 1}{\tan^2 x \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x}$

d) Đúng: Ta có $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x} = 1 + \frac{2\sin x \cos x}{\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}} = 1 + 2 \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = 1 + 2\cot^3 x = B$

Câu 4: Cho $P = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 4\sin x \cos x - 3}{\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x + 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 + 2\sin^2 x \cos^2 x$

- b) $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1$ được đưa về dạng $\sin x \cos x$
 c) Biểu thức P được đưa về dạng $-2\sin x \cos x - 2$.
 d) Khi $\cos x = \frac{1}{3}$ thì giá trị của biểu thức P bằng $-\frac{4\sqrt{2}}{9} - 2$.

Lời giải

- a) Sai: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
 b) Sai: Ta có $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1 = \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 = \sin x \cos x + 1$.
 c) Đúng: Ta có

$$P = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin x \cos x - 3}{\sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1} = -2 \frac{(\sin x \cos x + 1)^2}{\sin x \cos x + 1} = -2(\sin x \cos x + 1)$$

 d) Đúng: Ta có $\cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow P = -\frac{4\sqrt{2}}{9} - 2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Biết tồn tại số thực $a = a_0$ sao cho $P = P_0$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn hệ thức:

$$(9\sin^2 a - 6\sin a)^2 - (11 + 2P)(9\sin^2 a - 6\sin a) + P^2 + 11P - 80 = 0. \text{ Tính giá trị của biểu thức}$$

$$M = (2P_0 + 8) \cdot \tan^2 a_0 + 9P_0 \cdot \cos^2 a_0.$$

Lời giải

Đặt $t = 9\sin^2 a - 6\sin a$ ta có: $t^2 - (11 + 2P)t + P^2 + 11P - 80 = 0$

Biệt thức $\Delta = (2P + 11)^2 - 4(P^2 + 11P - 80) = 441$

$$t_1 = \frac{11 + 2P - 21}{2} = P - 5; t_2 = \frac{11 + 2P + 21}{2} = P + 16$$

Với $t = P + 16 \Rightarrow 9\sin^2 a - 6\sin a = P + 16$
 $\Rightarrow P = 9\sin^2 a - 6\sin a - 16 = (3\sin a - 1)^2 - 17 \leq 16 - 17 = -1$ (không thỏa)

Với $t = P - 5 \Rightarrow 9\sin^2 a - 6\sin a = P - 5 \Rightarrow P = 9\sin^2 a - 6\sin a + 5 = (3\sin a - 1)^2 + 4 \geq 4$

$$P_0 = P_{\min} = 4 \text{ khi } 3\sin a - 1 = 0 \Rightarrow \sin a = \frac{1}{3} = \sin a_0$$

Khi đó: $M = (2P_0 + 8) \cdot \tan^2 a_0 + 9P_0 \cdot \cos^2 a_0$

$$= (2 \cdot 4 + 8) \cdot \frac{\sin^2 a_0}{1 - \sin^2 a_0} + 9 \cdot 4 \cdot (1 - \sin^2 a_0) = 16 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} + 36 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 34.$$

Câu 2: Biết rằng biểu thức $P = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \frac{8}{\tan x} + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng

$$\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ tại } x = \alpha. \text{ Tính giá trị biểu thức } B = \frac{7\sin \alpha - 7\cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$$

Lời giải

$$P = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x} - \frac{8}{\tan x}} + 3 = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} - 8\cot x + 3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}} - 8\cot x + 3 = \frac{2}{\sin^2 x} - 8\cot x + 3 = 2\cot^2 x - 8\cot x + 5 = 2(\cot x - 2)^2 - 3$$

Ta có: $P = 2(\cot x - 2)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow P_{\min} = -3$ khi $\cot x = 2 = \cot \alpha$.

$$\text{Khi đó: } B = 7 \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha} = 7 \cdot \frac{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}{\sin^3 \alpha}}$$

$$= 7 \cdot \frac{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{1 + 3\cot^3 \alpha + \frac{2}{\sin^2 \alpha}} = 7 \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha - \cot \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha)}{1 + 3\cot^3 \alpha + 2 \cdot (1 + \cot^2 \alpha)} = -\frac{7}{7} = -1.$$

Câu 3: Cho biểu thức $A = \frac{\sin^8 \alpha}{8} + \frac{\cos^8 \alpha}{27}$. Biết $\frac{\sin^4 \alpha}{2} + \frac{\cos^4 \alpha}{3} = \frac{1}{5}$. Tính giá trị $5A$

Lời giải

$$\text{Đặt } \cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{t^2}{3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5t^2 - 26t + 3 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{3}{5}; \sin^2 \alpha = \frac{2}{5}. \text{ Vậy: } \frac{\sin^8 \alpha}{8} + \frac{\cos^8 \alpha}{27} = \frac{1}{125} \Rightarrow 5A = 0,04$$

Câu 4: Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3\sin^4 x + (\cos^2 x)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\text{Mà } 3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x + 2\sin^4 x - 2\cos^4 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2(1 - 2\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

Câu 5: Cho góc x thỏa mãn $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Khi đó $P = |\sin x - \cos x| = \sqrt{\frac{a}{b}}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

Lời giải

$$\cos x + \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\cos x + \sin x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin x)^2 + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{4}.$$

Ta có $P = |\sin x - \cos x|$

$$\Leftrightarrow P^2 = (\sin x - \cos x)^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}.$$

Do đó $P = \sqrt{\frac{7}{4}}$. Vậy $a + b = 7 + 4 = 11$.

Câu 6: Cho $3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $A = 2 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6 \sin^4 \alpha - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \sin^2 \alpha - 1)(2 \sin^2 \alpha + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (do } 2 \sin^2 \alpha + 3 > 0) \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } A = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

-----HẾT-----

