

Dạng 4: Mệnh đề với kí hiệu $\forall$ và $\exists$

Kí hiệu $\forall$ đọc là “với mọi”; kí hiệu $\exists$ đọc là “tồn tại”.

- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để mô tả các mệnh đề sau:

- Với mọi số tự nhiên x , $\sqrt{x}$ là số vô tỉ.
- Tồn tại số nguyên cộng với chính nó bằng 0.
- Bình phương của mọi số thực đều không âm.
- Có số hữu tỉ n sao cho $3n-1=0$.

Lời giải

- $\forall x \in \mathbb{N}, \sqrt{x}$ là số vô tỉ.
- $\exists x \in \mathbb{Z}, x+x=0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- $\exists x \in \mathbb{Q}, 3n-1=0$.

Bài tập 2: Phát biểu bằng lời mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \leq 0$. và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

Lời giải

Mệnh đề phát biểu là: “Mọi số thực đều có bình phương cộng với 1 nhỏ hơn hoặc bằng 0”.

Mệnh đề sai do $x^2 \geq 0$ nên $x^2+1 > 0$.

Bài tập 3: Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+2x+2 > 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+3x+4=0$.

Lời giải

a) Mệnh đề đúng, vì $x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1 > 1$ với mọi số thực x . Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+2x+2 \leq 0$.

b) Mệnh đề sai, vì phương trình $x^2+3x+4=0$ vô nghiệm ($\Delta = -7 < 0$). Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+3x+4 \neq 0$.

Bài tập 4: Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề $A: "\forall x \in \mathbb{R}, -4x^2+4x-1 \leq 0"$ và xét tính đúng, sai của mệnh đề đó.

Lời giải

Ta có $A: "\forall x \in \mathbb{R}, -4x^2+4x-1 < 0"$ là mệnh đề sai vì

$$-4x^2+4x-1 < 0 \Leftrightarrow -(2x-1)^2 < 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

Khi đó mệnh đề phủ định " $\exists x \in \mathbb{R}, -4x^2+4x-1 < 0$ " là mệnh đề đúng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho mệnh đề: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$ ”. Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.
B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 < 0$.
D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$.

Lời giải

Chú ý: Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

Câu 2: Phủ định của mệnh đề: “ $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3” là:

- A. “ $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 3”.
B. “ $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3”.
C. “ $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 3”.
D. “ $\nexists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3”.

Lời giải

Phủ định của $\forall$ là $\exists$

Phủ định của “không chia hết” là “chia hết”

Câu 3: Phủ định của mệnh đề: “ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương” là:

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số không dương”
B. “ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số âm”
C. “ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương”
D. “ $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương”

Lời giải

Phủ định của $\exists$ là $\forall$

Phủ định của “số dương” là “số không dương”

Câu 4: Cho mệnh đề “Có một học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông”. Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là

- A. Không có học sinh nào trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.
B. Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông.
C. Có một học sinh trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.
D. Mọi học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông.

Lời giải

Mệnh đề phủ định là “Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông”.

Câu 5: Cho mệnh đề: “Có một học sinh trong lớp 10A không thích học môn Toán”. Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là:

- A. “Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán”.
B. “Mọi học sinh trong lớp 10A đều không thích học môn Toán”.
C. “Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Văn”.
D. “Có một học sinh trong lớp 10A thích học môn Toán”.

Lời giải

Mệnh đề phủ định là “Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán”.

- Câu 6: Mệnh đề “Mọi động vật đều di chuyển” có mệnh đề phủ định là
- A. Có ít nhất một động vật di chuyển. B. Mọi động vật đều đứng yên.
- C. Có ít nhất một động vật không di chuyển. D. Mọi động vật đều không di chuyển.

Lời giải

Mệnh đề phủ định là “Có ít nhất một động vật không di chuyển”.

- Câu 7: Cho mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ ”. Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?
- A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$. B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
- C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$. D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

Lời giải

B: sai là gì không dùng đúng kí hiệu của phủ định.

C: sai là gì không dùng đúng $\geq$.

D: chưa phủ định về sau của mệnh đề.

- Câu 8: Cho mệnh đề: “ $\exists x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 3x - 5 < 0$ ”. Mệnh đề phủ định sẽ là

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ ”. B. “ $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 > 0$ ”.
- C. “ $\exists x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 > 0$ ”. D. “ $\exists x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ ”.

Lời giải

Đáp án A đúng vì phủ định của “ $\exists$ ” là “ $\forall$ ” và phủ định của dấu “ $<$ ” là dấu “ $\geq$ ”.

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định của dấu “ $<$ ” là dấu “ $>$ ”.

Đáp án C sai vì học sinh không nhớ phủ định của “ $\exists$ ” là “ $\forall$ ” và phủ định dấu “ $<$ ” là dấu “ $\geq$ ”.

Đáp án D sai vì học sinh không nhớ phủ định của “ $\exists$ ” là “ $\forall$ ”.

- Câu 9: Mệnh đề phủ định của mệnh đề: $a < -\frac{2}{3}$ là

- A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$. B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.
- C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$. D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

Lời giải

B: HS quên biến đổi lượng từ.

C: HS quên trường hợp dấu bằng.

D: HS quên cả đổi lượng từ và dấu bằng.

- Câu 10: Mệnh đề phủ định của mệnh đề “Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) vô nghiệm” là mệnh đề nào sau đây?
- A. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm.

B. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có 2 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm kép.

D. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) không có nghiệm.

Lời giải

Đáp án A đúng vì phủ định vô nghiệm là có nghiệm.

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là phương trình sẽ có 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án C sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là có 1 nghiệm tức nghiệm kép.

Đáp án D sai vì học sinh không hiểu câu hỏi của đề, học sinh nghĩ vô nghiệm là không có nghiệm.

Câu 11: Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$.

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$. D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

Lời giải

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$. Suy ra mệnh đề phủ định là $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

Câu 12: Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$ ".

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$.

B. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$.

C. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$.

D. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$.

Lời giải

Mệnh đề A: " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$ " phủ định là " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$ ".

Câu 13: Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ " là

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

B. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 > 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ ".

D. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

Lời giải

Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ " là " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

Câu 14: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

B. $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0$.

C. $\exists n \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

D. $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} > 0$.

Lời giải

Vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 15: Mệnh đề nào sau là mệnh đề sai?

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$.

B. $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$

C. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$.

D. $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $n \leq 2n$.

Lời giải

Ta có $0 \in \mathbb{R}$ và $0^2 = 0$ nên mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ là mệnh đề sai.

Câu 16: Chọn mệnh đề sai.

A. " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ ". B. " $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$ ". C. " $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 2n$ ". D. " $\exists x \in \mathbb{R} : x < 1$ ".

Lời giải

Với $x = 0 \in \mathbb{R}$ thì $x^2 = 0$ nên " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ " sai.

Câu 17: Tìm mệnh đề đúng.

A. " $\exists x; x^2 + 3 = 0$ "

B. " $\exists x; x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ "

C. " $\forall x \in \mathbb{Z}; x^5 > x^2$ ".

D. " $\forall n \in \mathbb{N}; ((2n+1)^2 - 1) : 4$ "

Lời giải.

Ta biến đổi $(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4(n^2 + n) : 4; \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy mệnh đề C đúng.

Câu 18: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 11n + 2$ chia hết cho 11.

B. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4.

C. Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 5.

D. $\exists n \in \mathbb{Z}, 2x^2 - 8 = 0$.

Lời giải

Khi $n = 3$ thì giá trị của $(n^2 + 11n + 2)$ bằng 44:11 nên đáp án A đúng

Khi $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ không chia hết cho 4, $k \in \mathbb{N}$.

Khi $n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4, $k \in \mathbb{N}$.

Tồn tại số nguyên tố 5 chia hết cho 5 nên đáp án C đúng

Phương trình $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2; x = 2 \in \mathbb{Z}$ nên đáp án D đúng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng, sai của mỗi mệnh đề sau.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.

b) $\exists a \in \mathbb{Q}, a > a^2$.

c) $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 + n + 2$ chia hết cho 2.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ không chia hết cho 3.

Lời giải

a) Mệnh đề sai. Ta chọn $x = 0$ thì $x^2 = 0 > 0$ là sai.

b) Mệnh đề đúng. Ta chọn $a = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ thì $a^2 = \frac{1}{4}$ nên $a > a^2$ (đúng).

c) Mệnh đề đúng. Thật vậy: $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$, trong đó $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, vì vậy $n(n+1) + 2$ cũng chia hết cho 2.

d) Mệnh đề sai. Ta cho $n=1$ thì $n(n+1)(n+2) = 1.2.3 = 6$ chia hết cho 3.

Câu 2: Xét tính đúng, sai của mỗi mệnh đề sau.

a) $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ và $n+2$ là các số nguyên tố.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$.

Lời giải

a) Mệnh đề đúng. Ta có: $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

b) Mệnh đề sai. Ta cho $n=2 \in \mathbb{N}$ thì $n+2=4$ không là số nguyên tố.

c) Mệnh đề sai. Ta cho $x=1 \in \mathbb{R}$ thì $(x-1)^2 = x-1 = 0$.

d) Mệnh đề sai. Ta cho $n=0 \in \mathbb{N}$ thì $n^2 = 0$ nên $n^2 > n$ là sai.

Câu 3: Xét tính đúng (sai) của các mệnh đề sau

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$.

b) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4.

c) $P: "\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x+y=1"$.

d) $Q: "\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x+y=2"$.

Lời giải

a) $"\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 10"$ là mệnh đề sai

b) $"\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4" là mệnh đề đúng

c) $P: "\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x+y=1"$ là mệnh đề sai

Vì với $x=2,5; y=1 \Rightarrow P(2,5;1): "2,5 \in \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{R}: 2,5+1=1"$ là mệnh đề sai.

d) $Q: "\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x+y=2"$ là mệnh đề đúng

Vì $Q(1,5;0,5): "1,5 \in \mathbb{R}, 0,5 \in \mathbb{R}: 1,5+0,5=2"$ là mệnh đề đúng.

Câu 4: Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "x > \frac{1}{x}"$, xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P(1)$.

b) $P\left(-\frac{1}{3}\right)$.

c) $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$.

d) $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$.

Lời giải

a) Ta có $P(1): "1 > 1"$ đây là mệnh đề sai.

b) Ta có $P\left(-\frac{1}{3}\right): -\frac{1}{3} > -3$ đây là mệnh đề đúng.

c) Ta có $\forall x \in \mathbb{N}, x > \frac{1}{x}$ là mệnh đề sai vì $P(1)$ là mệnh đề sai.

d) Ta có $\exists x \in \mathbb{N}, x > \frac{1}{x}$ là mệnh đề đúng vì $P(2): 2 > \frac{1}{2}$ là mệnh đề đúng.

Câu 5: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A: "\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x + y = 1"$.

b) $B: "\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 2"$.

c) $C: "\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: y = xy"$.

d) $D: "\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}: a = 3b"$.

Lời giải

a) Mệnh đề sai vì với $x = 2,5; y = 1 \Rightarrow P(2,5;1): "2,5 \in \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{R}: 2,5 + 1 = 1"$ là mệnh đề sai.

b) Mệnh đề đúng vì $"1,5 \in \mathbb{R}, 0,5 \in \mathbb{R}: 1,5 + 0,5 = 2"$ là mệnh đề đúng.

c) Mệnh đề đúng vì $\exists x = 1: y = 1 \cdot y$ đúng $\forall y \in \mathbb{R}$.

d) Mệnh đề đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho các mệnh đề sau:

a) $\sqrt{(-5)^2} = -5$.

b) $5^2 + 12^2 = 13^2$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$.

d) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 3 = 0$.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

Lời giải

a) Mệnh đề sai vì $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

b) Mệnh đề đúng.

c) Ta có $x^2 \geq 0$ và $1 > 0$ nên $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$. Do đó mệnh đề đúng.

d) Giải phương trình $x^2 + 3 = 0$, phương trình vô nghiệm nên không có giá trị x thỏa $x^2 + 3 = 0$ vì vậy mệnh đề sai.

Vậy ta có 2 mệnh đề đúng.

Câu 2: Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0$ với a là số thực cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của a để mệnh đề đúng

Lời giải

Vì $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0 \Leftrightarrow x^2 > 2 - a \Leftrightarrow 2 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2$. Vậy $a = 2$.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng và xác định mệnh đề phủ định của nó:

a) A : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ "

b) B: "Tồn tại số tự nhiên đều là số nguyên tố".

c) C : " $\exists x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho $x+1$ "

d) D: " $\forall n \in \mathbb{N}, n^4 - n^2 + 1$ là hợp số"

e) E: "Tồn tại hình thang là hình vuông".

f) F: "Tồn tại số thực a sao cho $a+1+\frac{1}{a+1} \leq 2$ "

Lời giải

a) Mệnh đề A đúng và $\bar{A}: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

b) Mệnh đề B đúng và $\bar{B}$: "Với mọi số tự nhiên đều không phải là số nguyên tố"

c) Mệnh đề C đúng vì cho $x=0$ và $\bar{C}$: " $\forall x \in \mathbb{N}, x \nmid (x+1)$ "

d) Mệnh đề D sai vì với $n=2$ ta có $n^4 - n^2 + 1 = 13$ không phải là hợp số

Mệnh đề phủ định là $\bar{D}$: " $\exists n \in \mathbb{N}, n^4 - n^2 + 1$ là số nguyên tố"

e) Mệnh đề E đúng và $\bar{E}$: "Với mọi hình thang đều không là hình vuông".

f) Mệnh đề F đúng và mệnh đề phủ định là $\bar{F}$: "Với mọi số thực a thì $a+1+\frac{1}{a+1} > 2$ "

-----HẾT-----