

BÀI

02

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho tam giác ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, S là diện tích tam giác. Giả sử h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh A, B, C ; m_a, m_b, m_c lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh A, B, C . R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC . Ta có kết quả sau đây:

1 Định lý cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Hệ quả của định lý cosin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

2 Định lý sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

3 Công thức tính diện tích tam giác

- Công thức diện tích:

$$a) S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \quad b) S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$c) S = \frac{abc}{4R} \quad d) S = pr \text{ với } p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$e) \text{ Công thức Herông } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4 Công thức tính độ dài đường trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Áp dụng định lý cosin trong tam giác

Phương pháp: Sử dụng định lý cosin được nêu trong phần lý thuyết

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Hệ quả của định lý cosin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, \hat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{-1}{2} = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}. \end{aligned}$$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có $a = 7; b = 8; c = 5$. Tính $\hat{A}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ.$$

Bài tập 3: Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Tính góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải

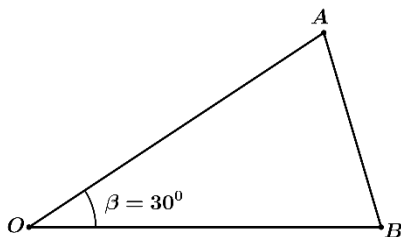
$$\text{Ta có } b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc.$$

$$\text{Mặt khác } \cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Bài tập 4: Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A, B là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

Lời giải



$$\text{Áp dụng định lý cosin: } AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3} \cdot OB \cdot OA + OB^2 - 4 = 0.$$

Coi phương trình là một phương trình bậc hai ẩn OA . Để tồn tại giá trị lớn nhất của OB

$$\text{thì } \Delta_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(OB^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow OB^2 \leq 16 \Leftrightarrow OB \leq 4.$$

Vậy $\max OB = 4$.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho tỉ lệ $MA:MB:MC = 1:2:3$. Tính góc $\widehat{AMB}$

Lời giải

$$MB = x \Leftrightarrow MA = 2x; MC = 3x \text{ với } 0 < x < BC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAM} = \frac{1+4x^2-x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2x} = \frac{3x^2+1}{4x}$$

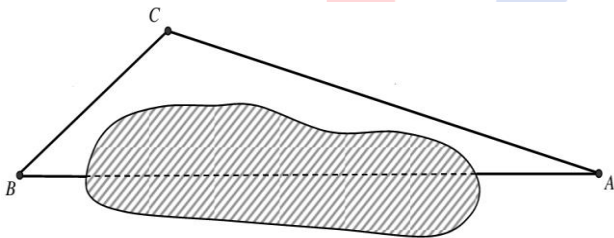
$$\cos \widehat{MAC} = \frac{1+4x^2-9x^2}{4x} = \frac{1-5x^2}{4x} \Rightarrow \left(\frac{3x^2+1}{4x}\right)^2 + \left(\frac{1-5x^2}{4x}\right)^2 = 1 \Rightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 + 1 - 10x^2 + 25x^4 = 16 \Rightarrow$$

$$34x^4 - 20x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{17} > \frac{1}{5} \text{ (loại)} \\ x^2 = \frac{5-2\sqrt{2}}{17} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{4x^2+x^2-1}{2 \cdot 2x \cdot x} = \frac{5x^2-1}{4x^2} = \left(\frac{25-10\sqrt{2}}{17} - 1\right) : \frac{20-8\sqrt{2}}{17} = \frac{-\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } \widehat{AMB} = 135^\circ.$$

Bài tập 6: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200(m)$, $CB = 180(m)$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

Lời giải

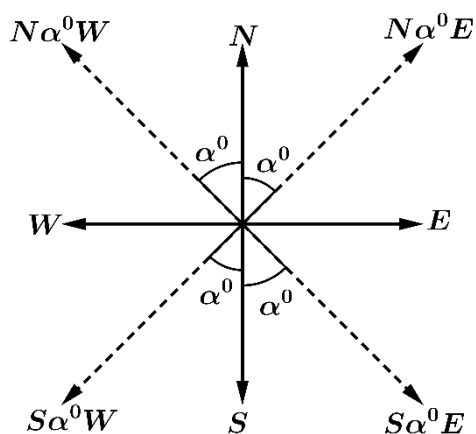


$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos 60^\circ = 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}(m).$$

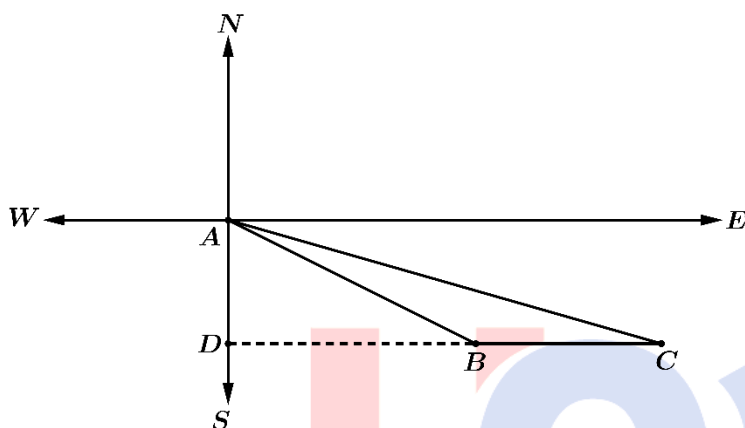
Bài tập 7: Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A , đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 70km/h . Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8km/h . Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.



Lời giải



a) Theo giả thiết ta có: $AB = 105km$, $BC = 16km$ và $\widehat{BAD} = 70^\circ$, $\widehat{ABD} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 160^\circ$

Khoảng cách từ A tới đảo tàu neo đậu bằng đoạn AC.

Áp dụng định lý côsin ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B}$
 $= \sqrt{105^2 + 16^2 - 2 \cdot 105 \cdot 16 \cdot \cos 160^\circ} = 120,16km$

b) Ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \approx 0,999 \Rightarrow \hat{A} \approx 2^\circ 37' \Rightarrow \widehat{NAC} = 107^\circ 23'$.

Vậy hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là hướng Đông.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$. **B.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$. **D.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.

Lời giải

Theo định lý cosin trong tam giác ABC ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Câu 2: Cho ΔABC có $b = 6, c = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{12}$. **C.** $2\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{20}$.

Lời giải

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 36 + 64 - 2.6.8. \cos 60^\circ = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$

Câu 3: Cho ΔABC có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

A. 7. **B.** 129. **C.** 49. **D.** $\sqrt{129}$.

Lời giải

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 5^2 - 2.8.5. \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 4: Tam giác ABC có $\hat{C} = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB ?

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 1.

Lời giải

Theo định lý cosin trong ΔABC ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA. CB. \cos \hat{C} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$.

Câu 5: Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5, AC = 8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC .

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $S = \frac{1}{2}. AB. AC. \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{AB. AC} = \frac{2.12}{5.8} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ 52' 12''$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2. AB. AC. \cos A = 5^2 + 8^2 - 2.5.8. \cos 36^\circ 52' 12''$.

Câu 6: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2,3,4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. **B.** $\frac{7}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{14}}{8}$.

Lời giải

Góc bé nhất ứng với cạnh có số đo bé nhất.

Giả sử $a = 2, b = 3, c = 4$. Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \frac{7}{8}$. Do đó $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

Câu 7: Tam giác ABC có $BC = 12, CA = 9, AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $\sqrt{19}$.

Lời giải

Ta có: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{11}{16}$

$$AM = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B}.$$

Câu 8: Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC . Biết $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a .

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{23}{8}$. **D.** 6.

Lời giải

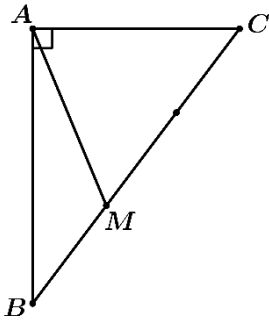
Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 18 \Rightarrow a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Câu 9: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{BC}{3}$. Độ dài AM bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải



Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$; $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Khi đó: $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$

Câu 10: Tam giác ABC có $\cos(A + B) = -\frac{1}{8}$, $AC = 4$, $BC = 5$. Tính cạnh AB

A. $\sqrt{46}$. **B.** 11. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Vì trong tam giác ABC ta có $A + B$ bù với góc C nên $\cos(A + B) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8}$ $AB =$

$$\sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8}} = 6.$$

Câu 11: Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}$, $AC = 3$ và $\cot C = 2$. Tính cạnh AB

A. 6. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Từ giả thiết $\cot C = 2$, ta suy ra C là góc nhọn $\cot C = 2 \Rightarrow \tan C = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 C = \frac{1}{1+\tan^2 C} = \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$$\cos C = \frac{2}{\sqrt{5}} AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{2}.$$

Câu 12: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC

A. $3\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $\sqrt{33}$. D. 7.

Lời giải

Từ giả thiết $\tan A = -2\sqrt{2}$, ta suy ra A là góc tù $\tan A = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 A = \frac{1}{1+\tan^2 A} = \frac{1}{1+(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{3}$
 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{3})} = \sqrt{33}$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $AB = 7$, $AC = 8$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài của cạnh BC ?

A. 7. B. 47. C. $\sqrt{57}$. D. $2\sqrt{57}$.

Lời giải

Áp dụng định lý hàm số Cosin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 57$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{57}.$$

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Giá trị $\cos B$ là:

A. $\frac{2}{7}$. B. $-\frac{2}{7}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Áp dụng hệ quả của định lý hàm số Cosin vào tam giác ABC ta có:

$$\cos B = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{7^2 + 4^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 4} = -\frac{2}{7}.$$

Câu 15: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 5, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{10}$. B. $-\frac{1}{10}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

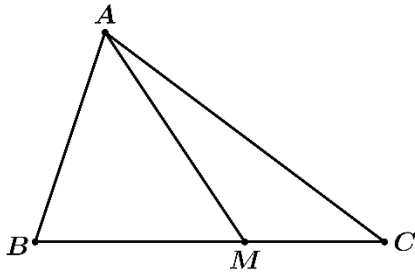
Vì đối diện với cạnh lớn nhất là góc lớn nhất. Nên góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng:

$$\frac{5^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{10}$$

Câu 16: Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 9$, $AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 8$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

A. 34. B. 17. C. $\sqrt{34}$. D. $\sqrt{43}$.

Lời giải



Xét tam giác ABC ta có $\cos B = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot BA} = \frac{12^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 12 \cdot 6} = \frac{11}{16}$.

Xét tam giác ABM , theo định lý hàm số Cosin ta có:

$$AM^2 = BA^2 + BM^2 - 2 \cdot BA \cdot BM \cdot \cos B = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{11}{16} = 34 \Rightarrow AM = \sqrt{34}.$$

Câu 17: Cho tam giác ABC có cạnh $AC = 14$, $\hat{B} = 120^\circ$, tổng hai cạnh còn lại là 16. Tính độ dài cạnh BC biết $BC > AB$.

A. 5. B. 8. C. 6. D. 10.

Lời giải

Áp dụng định lý hàm số Cosin trong tam giác ABC ta có:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos B \Leftrightarrow BC^2 + AB^2 + BC \cdot AB = 196 (*)$$

Từ giả thiết ta có: $BC + AB = 16 \Leftrightarrow AB = 16 - BC$.

Thay $AB = 16 - BC$ vào (*) ta được: $BC^2 + (16 - BC)^2 + BC \cdot (16 - BC) = 196$

$$\Leftrightarrow BC^2 - 16BC + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} BC = 10 \\ BC = 6 \end{cases}$$

Với $BC = 10 \Rightarrow AB = 6$ (thỏa mãn)

Với $BC = 6 \Rightarrow AB = 10$ (loại)

Vậy $BC = 10$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tam giác MNP có $MN = 13$, $MP = 10$, $\cos M = \frac{5}{13}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2 \cdot MN \cdot MP \cdot \cos M$.

b) Tam giác MNP cân tại M .

c) $\cos N = \frac{238}{169}$.

d) Tổng bình phương độ dài ba trung tuyến trong ΔMNP bằng $\frac{657}{2}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2 \cdot MN \cdot MP \cdot \cos M$

b) Sai: Ta có: $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2 \cdot MN \cdot MP \cdot \cos M = 13^2 + 10^2 - 2 \cdot 13 \cdot 10 \cdot \frac{5}{13} = 169 \Rightarrow NP = 13$.

Khi đó, $MN = NP \Rightarrow \Delta MNP$ cân tại N

c) Sai: Ta có: $\cos N = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2 \cdot MN \cdot NP} = \frac{13^2 + 13^2 - 10^2}{2 \cdot 13 \cdot 13} = \frac{119}{169}$

d) Đúng: Gọi m_M, m_N, m_P lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ đỉnh M, N, P trong ΔMNP .

$$\text{Ta có: } m_M^2 = \frac{MN^2 + MP^2}{2} - \frac{NP^2}{4} \quad (1); \quad m_N^2 = \frac{MN^2 + NP^2}{2} - \frac{MP^2}{4} \quad (2) \quad m_P^2 = \frac{NP^2 + MP^2}{2} - \frac{MN^2}{4} \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2) và (3) ta có: $m_M^2 + m_N^2 + m_P^2 = \frac{3}{4}(MN^2 + MP^2 + NP^2) = \frac{657}{2}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có tỉ lệ độ dài các cạnh $AB:AC:BC = 3:4:5$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng 25. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

b) Tam giác ABC vuông tại A .

c) Độ dài cạnh BC bằng 25.

d) Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Độ dài đoạn thẳng BG bằng $\frac{20\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng : Ta có: $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$

b) Đúng : Vì $AB:AC:BC = 3:4:5$ nên ta đặt: $AB = 3a, AC = 4a, BC = 5a (a > 0)$.

Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

c) Sai: Ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 25 \cdot \sin 90^\circ = 50$

d) Đúng: Ta có: $BC = 5a = 50 \Rightarrow a = 10, AB = 30, AC = 40$.

Độ dài đường trung tuyến từ đỉnh B trong ΔABC là:

$$m_B = \sqrt{\frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{30^2 + 50^2}{2} - \frac{40^2}{4}} = 10\sqrt{13} \Rightarrow BG = \frac{2}{3}m_B = \frac{2}{3} \cdot 10\sqrt{13} = \frac{20\sqrt{13}}{3}$$

Câu 3: Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, CA = 8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos A$.

b) Số đo góc $\hat{A}$ bằng 30° .

c) Độ dài đường trung tuyến từ đỉnh A trong ΔABC là $\sqrt{129}$.

d) Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài cạnh AM bằng $\frac{2\sqrt{61}}{3}$.

Lời giải

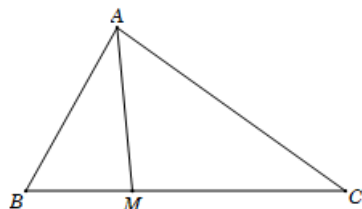
a) Sai: Ta có $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos C$

b) Sai: Ta có $\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$. Do đó, $\hat{A} = 60^\circ$

c) Sai: Ta có $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(8^2 + 5^2) - 7^2}{4} = \frac{129}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{129}}{2}$

d) Đúng: Theo định lí hàm côsin, ta có: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7}$.

Do $MC = 2MB \Rightarrow M = \frac{1}{3}BC = \frac{7}{3}$.



Theo định lí cosin, ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos \hat{B} = 5^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{244}{9} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{61}}{3}$$

Câu 4: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Biết $AB = 3, BC = 8, \cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

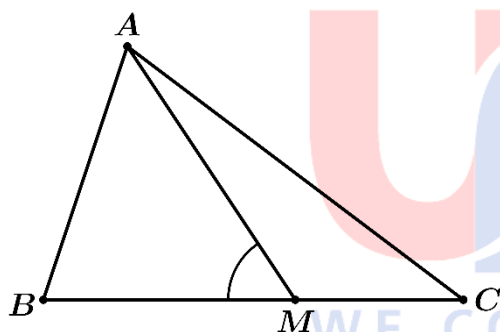
a) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM là $\sqrt{2}$.

b) Giá trị $\cos \widehat{AMC} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$

c) Độ dài đoạn AM bằng $\sqrt{13}$ hoặc $x = \frac{7\sqrt{13}}{13}$

d) Khi số đo góc A nhọn và lớn nhất trong ba đỉnh của tam giác ABC thì độ dài cạnh $AC = 7$.

Lời giải



a) Sai : $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \sin \widehat{AMB} = \sqrt{\frac{27}{52}}$. Ta có $R = \frac{AB}{2 \sin \widehat{AMB}} = \frac{3}{2 \sqrt{\frac{27}{52}}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{27}{13}}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$

b) Sai: Ta có $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \cos \widehat{AMC} = -\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

c) Đúng : Ta có $BC = 8 \Rightarrow BM = 4$. Đặt $AM = x$

Theo định lí cô-sin ta có $\cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM}$.

Suy ra $\frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{x^2 + 16 - 9}{8x} \Leftrightarrow 13x^2 - 20\sqrt{13}x + 91 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{13}$ hoặc $x = \frac{7\sqrt{13}}{13}$

d) Đúng: Theo công thức tính đường trung tuyến ta có $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{2AB \cdot AC}$

Nếu $x = \sqrt{13} \Rightarrow 13 = \frac{2(3^2 + AC^2) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = 7$

Ta có $BC > AC > AB$ nên góc A lớn nhất.

Theo định lí cô-sin ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = -\frac{1}{7}$ suy ra $\hat{A} \approx 98^\circ 12'$

$$\text{Nếu } x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \frac{49}{13} = \frac{2(3^2 + AC^2) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{397}{13}}$$

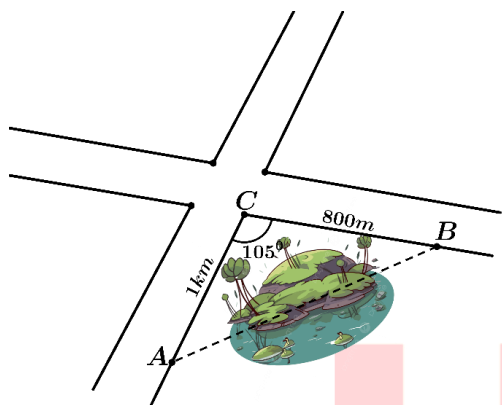
Ta có $BC > AC > AB$ nên góc A lớn nhất.

$$\text{Theo định lí cô-sin ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = -\frac{53}{\sqrt{5161}} \text{ suy ra } \hat{A} \approx 137^\circ 32'.$$

Khi số đo góc A nhọn và lớn nhất trong ba đỉnh của tam giác ABC thì độ dài cạnh $AC = 7$ là mệnh đề đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy) người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC , CB và góc $\widehat{ACB}$. Sau khi đo ta nhận được: $AC = 1 \text{ km}$, $CB = 800 \text{ m}$ và $\widehat{ACB} = 105^\circ$. Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị mét).

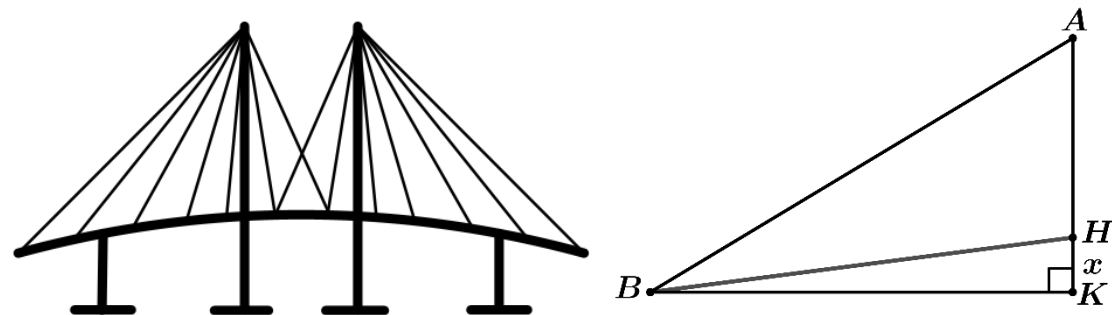


Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có: $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos \hat{C} = 1000^2 + 800^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 800 \cdot \cos 105^\circ \approx 2054110,472$.

Suy ra $AB \approx \sqrt{2054110,472} \approx 1433$. Vậy khoảng cách AB là xấp xỉ 1433 (m).

Câu 2: Quan sát cây cầu dây văng minh hoạ như hình dưới đây:



Tại trụ cao nhất, khoảng cách từ đỉnh trụ (vị trí A) tới chân trụ trên mặt cầu (vị trí H) là 150 m, độ dài dây văng dài nhất nối từ đỉnh trụ xuống mặt cầu (vị trí B) là 300 m, khoảng cách từ chân dây văng dài nhất tới chân trụ trên mặt cầu là 250 m. Tính độ dốc của cầu qua trụ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

Lời giải

Độ dốc của cầu là góc nghiêng giữa đường cầu qua trụ và phương nằm ngang, tức là góc KBH

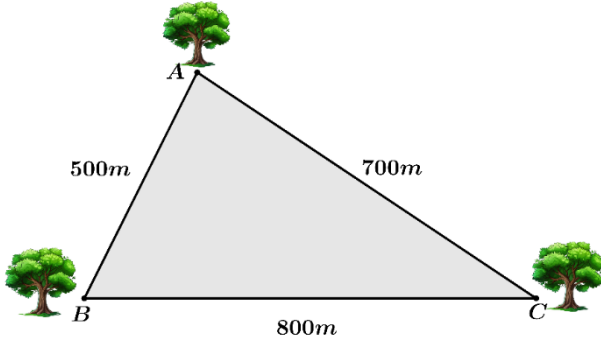
Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Xét tam giác ABH , áp dụng định lí cosin ta có: $\cos \widehat{AHB} = \frac{BH^2 + AH^2 - AB^2}{2BH \cdot AH} = \frac{250^2 + 150^2 - 300^2}{2 \cdot 250 \cdot 150} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \widehat{AHB} \approx 93,8^\circ$

Xét tam giác BHK ta có: $\widehat{HBK} \approx 93,8^\circ - 90^\circ = 3,8^\circ$ (tính chất góc ngoài tam giác).

Vậy độ dốc của cầu qua trụ theo đề bài là khoảng $3,8^\circ$.

Câu 3: Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như hình minh hoạ dưới đây. Tính số đo của góc $\widehat{B}$ của tam giác đó.



Lời giải

Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$. Ta có: $a = 800, b = 700, c = 500$.

Áp dụng định lí cosin, ta có: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Suy ra: $\cos B = \frac{500^2 + 800^2 - 700^2}{2 \cdot 500 \cdot 800} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$. Vậy $\widehat{B} = 60^\circ$.

Câu 4: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 (km/h), tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 (km/h). Tính khoảng cách giữa hai tàu sau 2 giờ. (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có: Sau 2 h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30 \cdot 2 = 60$ (km)

Sau 2 h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40 \cdot 2 = 80$ (km)

Vậy sau 2 h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13} \approx 72,1$ (km).

Câu 5: Vịnh Vân Phong, tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Diệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B . Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa AB và AC là 60° ?

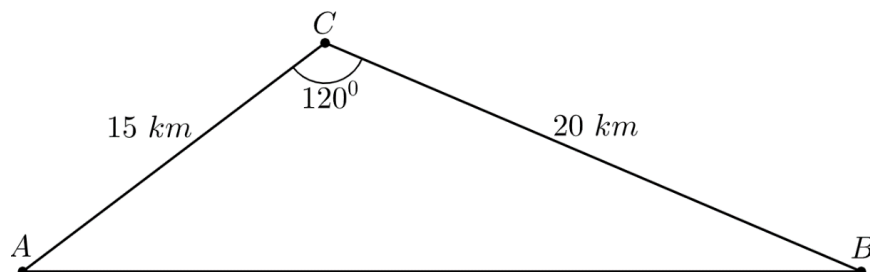


Lời giải

Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác ABC ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A}} = 0,53$ (km)

Vậy thời gian du khách chèo thuyền từ C đến B là: $t = \frac{BC}{v} = \frac{0,53}{4} = 0,1325$ giờ = 8 phút.

Câu 6: Một ô tô muốn đi từ địa điểm A đến địa điểm B , nhưng giữa A và B là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành 2 đoạn từ A lên C (ô tô leo dốc lên núi) và từ C đến B (ô tô xuống núi). Các đoạn đường tạo thành tam giác ABC với $AB = 15\text{km}$; $BC = 20\text{km}$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$. Nếu người ta đào một đường hầm xuyên núi chạy thẳng từ A đến B thì ô tô chạy trên con đường mới này tiết kiệm được số tiền gần nhất là bao nhiêu? Biết trung bình cứ chạy 1km , ô tô tiêu thụ hết $0,3$ lít xăng. Giá thành xăng hiện nay là 25000 đồng một lít xăng.



Lời giải

Trường hợp 1: Ô tô đi từ A lên C và từ C đến B

Tổng quãng đường mà ô tô phải đi là: $s = AC + CB = 35(\text{km})$

Số lít xăng tiêu thụ là $35 \cdot 0,3 = 10,5$ lít.

Số tiền xăng là: $10,5 \cdot 25000 = 262500$ đồng.

Trường hợp 2: Ô tô đi thẳng từ A qua B

Áp dụng định lý Cô-sin vào tam giác ABC ta có:

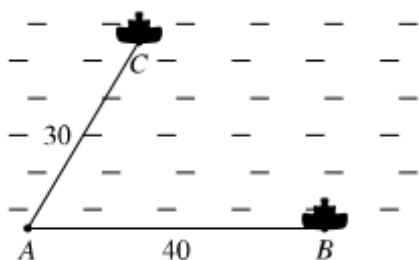
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow AB = 5\sqrt{37}(\text{km}).$$

Số lít xăng tiêu thụ là $5\sqrt{37} \cdot 0,3 = \frac{3\sqrt{37}}{2}$ lít.

Số tiền xăng là: $\frac{3\sqrt{37}}{2} \cdot 25000 \approx 228100$ đồng.

Số tiền tiết kiệm được là $262500 - 228100 = 34400$ đồng.

Câu 7: Hai chiếc tàu thuyền cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?



Lời giải

Sau 2 giờ, quãng đường tàu B chạy được là $20 \cdot 2 = 40$ hải lí

Sau 2 giờ, quãng đường tàu C chạy được là $15 \cdot 2 = 30$ hải lí

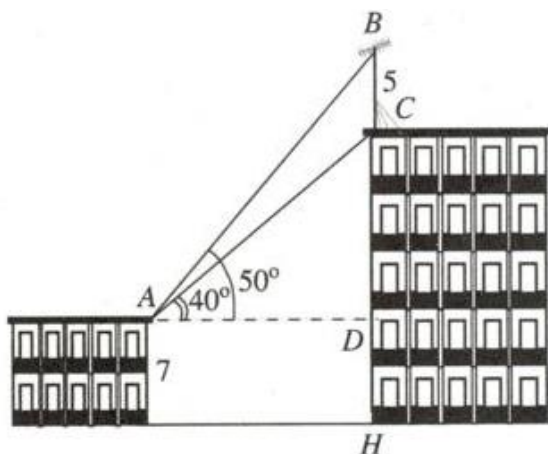
Áp dụng định lý Cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos 60^\circ = 1300.$$

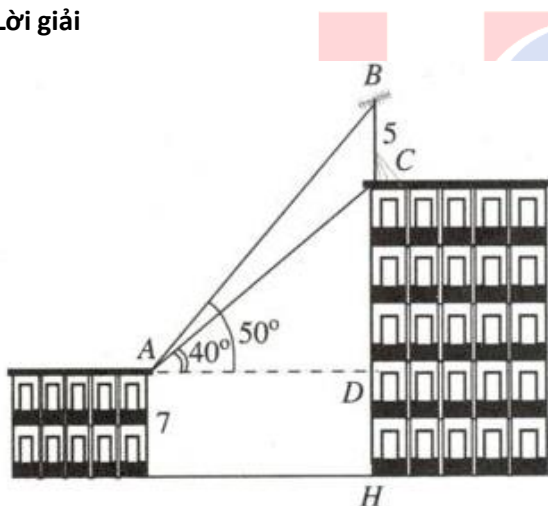
Do đó $BC \approx 36$.

Vậy sau hai giờ, hai tàu cách nhau 36 hải lí.

Câu 8: Trên nóc một tòa nhà có cột antenna cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột antenna dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang (như hình vẽ bên dưới). Chiều cao của tòa nhà (được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là



Lời giải



Ta có chiều cao của tòa nhà chính là đoạn BH .

Mà $BH = CD + DH = CD + 7$.

Xét tam giác ACD vuông tại D có $AC = \frac{CD}{\sin 40^\circ}$

Xét tam giác ABD vuông tại D có $AB = \frac{5+CD}{\sin 50^\circ}$

Xét tam giác ABC có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin^2 50^\circ} + \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \frac{2 \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ} \right) CD^2 + \left(\frac{10}{\sin^2 50^\circ} - \frac{10 \cos 10^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ} \right) CD + \frac{25}{\sin^2 50^\circ} - 25 = 0 \Leftrightarrow CD \approx 11,9 \Rightarrow BH \approx 7 + 11,9 \approx 18,9 \text{ (m)}.$$

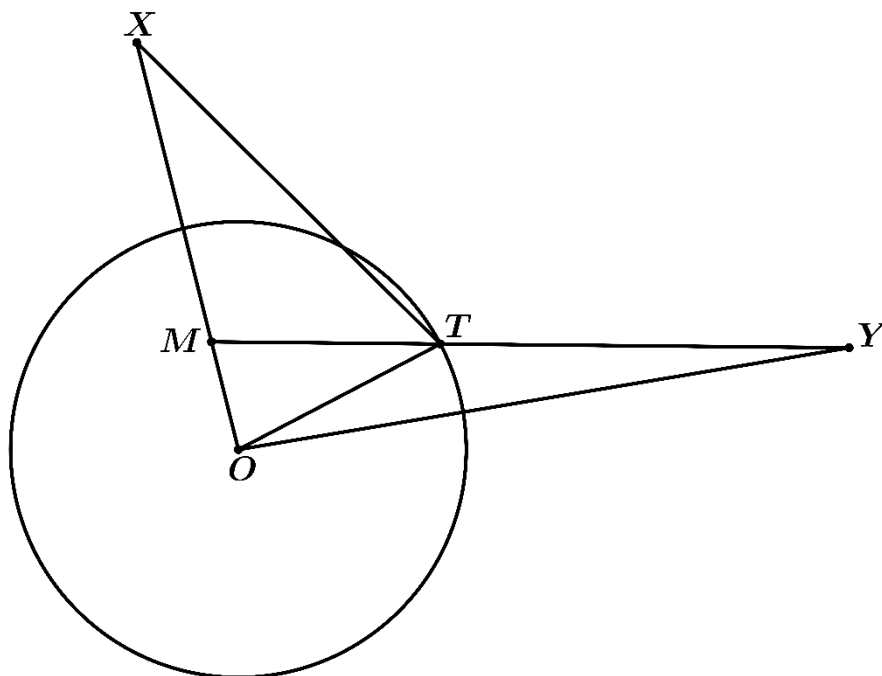
Vậy tòa nhà cao 18,9 m.

Câu 9: Từ một địa điểm O cố định của một vùng đất cù lao (các mặt của vùng đất đều giáp với các con sông), người ta cần chọn một địa điểm T trên vùng cù lao sao cho $OT = 60(km)$ để xây dựng các con đường

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

cao tốc (cầu vượt cao tốc) nối từ hai địa điểm X và Y của hai tỉnh thành lân cận đến T . Cho biết $OX = 120(km)$, $OY = 150(km)$, $\widehat{XOY} = 120^\circ$. Chi phí hoàn thành $1(km)$ đoạn đường đi từ T đến X là 100000 USD; chi phí hoàn thành $1(km)$ đoạn đường đi từ T đến Y là 200000USD. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành hai con đường trên (đơn vị triệu USD)?

Lời giải



Tổng chi phí để hoàn thành con đường $A = \frac{1}{10}(TX + 2TY)$ (triệu USD).

Gọi M là điểm thuộc đoạn OX sao cho hai tam giác OMT và OTX đồng dạng.

Suy ra $\frac{MT}{TX} = \frac{OT}{OX} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \Rightarrow TX = 2MT$.

Ta có $A = \frac{1}{10}(TX + 2TY) = \frac{1}{10}(2MT + 2TY) \geq \frac{1}{5}MY$.

Dấu bằng xảy ra khi M, T, Y thẳng hàng

$\Leftrightarrow T$ là giao điểm của đoạn MY với đường tròn tâm O , bán kính bằng 60.

Mặt khác $\frac{OM}{OT} = \frac{OT}{OX} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}OT = 30$

Trong tam giác MOY ta có: $MY = \sqrt{OM^2 + OY^2 - 2OM \cdot OY \cdot \cos 120^\circ} = 30\sqrt{31} (km)$.

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là $A = 6\sqrt{31} \approx 33,41$ (triệu USD).

-----HẾT-----