

BÀI 02 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

2 Biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai

Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

- Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
- Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

3 Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Giải một số bài toán kinh tế thường dẫn đến việc xét những hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải chúng. Loại bài toán này được nghiên cứu trong một ngành toán học có tên gọi là Quy hoạch tuyến tính.

Nhận xét: Tổng quát, người ta chứng minh được rằng giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x; y) = ax + by$, với $(x; y)$ là tọa độ các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_n$, tức là các điểm nằm bên trong hay nằm trên các cạnh của đa giác, đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác đó.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Nhận diện và tìm nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp: Sử dụng kiến thức được nêu ở phần lý thuyết

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2x + 3y < 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y \geq -1 \\ 2x^2 - 2y \leq -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x + 3y \geq -2 \\ 5|x| + 3y^2 \leq 4 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta thấy hệ $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ gồm hai bất phương trình bậc nhất hai ẩn là $x < 0$ và $y \geq 0$ nên hệ trên là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Ta thấy hệ $\begin{cases} x + y^2 < 0 \\ y - x > 1 \end{cases}$ không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì $x + y^2 < 0$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn (chứa y^2)

c) Ta thấy hệ $\begin{cases} x + y + z < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì $x + y + z < 0$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn (có 3 ẩn)

d) Ta có: $\begin{cases} -2x + y < 3^2 \\ 4^2x + 3y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y < 9 \\ 16x + 3y < 1 \end{cases}$ đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và gồm hai bất phương trình bậc nhất hai ẩn là $-2x + y < 9$ và $16x + 3y < 1$.

e) Do bất phương trình $2x^2 - 2y \leq -3$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn, nên hệ bất phương trình đã cho không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

f) Do bất phương trình $5|x| + 3y^2 \leq 4$ không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn, nên hệ bất phương trình đã cho không là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài tập 2: Tìm các cặp số $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - 5 \leq 0 \\ -y + 1 \geq 0 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases}$ trong đó $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 4 \leq 0 \\ y - 1 < 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases}$ trong đó $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Lời giải

a) Ta có $2x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$, do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\}$

$-y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$, do $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1\}$

Mặt khác $3x + y \leq 4$ nên suy ra $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy các cặp số $(x; y)$, trong đó $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là

$$(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)$$

b) Ta có $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$ do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2\}$

Do $\begin{cases} y - 1 < 0 \\ 2y + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < y < 1$ do $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-1; 0\}$

Vậy các cặp số $(x; y)$, trong đó $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là

$$(1; -1), (1; 0), (2; -1), (2; 0)$$

Bài tập 3: Bạn An kinh doanh hai mặt hàng Handmade là vòng tay và vòng đeo cổ. Mỗi vòng tay làm trong 4 giờ, bán được 40 nghìn đồng. Mỗi vòng đeo cổ làm trong 6 giờ, bán được 80 nghìn đồng. Mỗi tuần bạn An bán được không quá 15 vòng tay và 4 vòng đeo cổ. Tính số giờ tối thiểu trong tuần An cần dùng để bán được ít nhất 400 nghìn đồng?

Lời giải

Gọi $x, y \in \mathbb{Z}$ là số vòng tay và vòng đeo cổ trong tuần An làm được.

Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} 40x + 80y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm nghiệm (x, y) để $L = 4x + 6y$ nhỏ nhất.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) là tam giác ABC với $A(0; 50), B(10; 0), C(2; 4)$ kẻ cả miền trong tam giác đó.

Tính giá trị của biểu thức $L = 4x + 6y$ tại tất cả các đỉnh của tam giác ABC ta thấy L nhỏ nhất khi $x = 2, y = 4$.

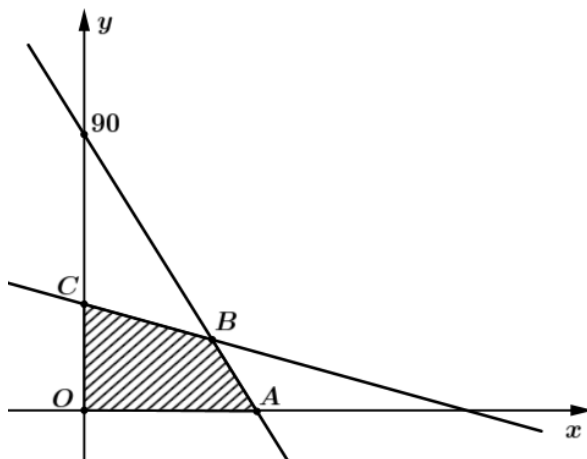
Vậy số giờ tối thiểu trong tuần An cần dùng là $L = 4.2 + 6.4 = 32$ giờ.

Bài tập 4: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II . Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Tính số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên

dương. Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 180 \\ x + 6y \leq 220 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$
. Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,4y$ (triệu đồng).

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C . Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60; 0)$ thì $T = 30$ triệu đồng; tại $B(40; 30)$ thì $T = 32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

Bài tập 5: Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn?

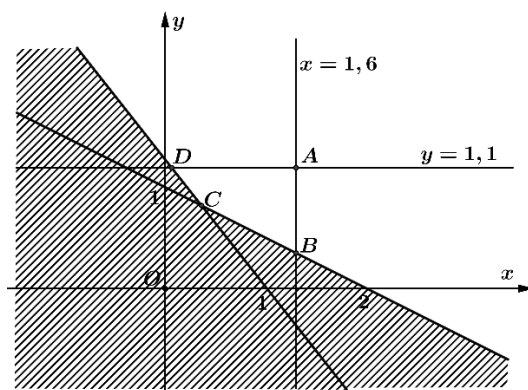
Lời giải

Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x + 110.y$ với x, y thỏa mãn:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$$
.

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x + 0,6.y \geq 0,9 \Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9$ (d_1).

Số đơn vị lipid gia đình có là $0,2.x + 0,4.y \geq 0,4 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$ (d_2).

Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$
 sao cho $T = 160.x + 110.y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$

Nhận xét: $T(A)=377$ nghìn, $T(B)=278$ nghìn, $T(C)=173$ nghìn, $T(D)=169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn thì $x=0,6$ và $y=0,7$.

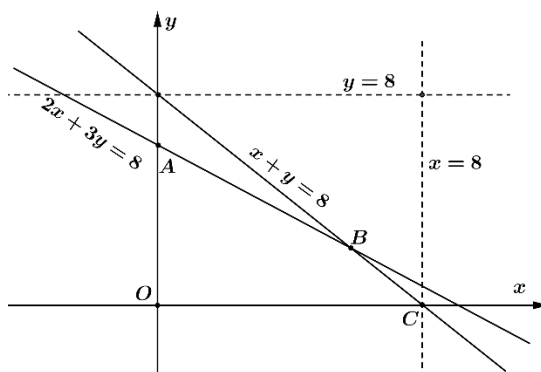
Bài tập 6: Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên diện tích 8 ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng dưa thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số ha trồng dưa và củ đậu.

Ta có: $0 \leq x \leq 8; 0 \leq y \leq 8; x + y \leq 8; 20x + 30y \leq 180 \Rightarrow 2x + 3y \leq 18$.

Số tiền thu được là $T(x, y) = 3x + 4y$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$


Miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $OABC$ với $A(0;6), B(6;2), C(8;0)$.

Khi đó $T(x, y)$ đạt cực đại tại một trong các đỉnh của $OABC$.

Khi đó ta có: $T(0,0)=0; T(0,6)=24; T(6,2)=26; T(8,0)=24$.

Vậy cần trồng 6 ha dưa và 2 ha củ đậu.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y \leq 0 \\ x - 2y \geq 1 \end{cases}$

- A. $(1; 0)$. B. $(3; 1)$. C. $(1; -3)$. D. $(-2; 3)$.

Lời giải

Xét hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y \leq 0(1) \\ x - 2y \geq 1(2) \end{cases}$.

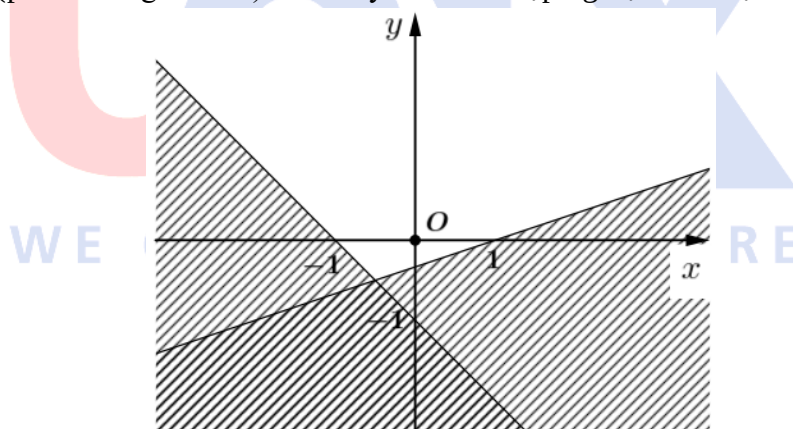
Với $x = 1; y = 0$ không là nghiệm của bất phương trình (1) nên $(1; 0)$ không là nghiệm của hệ.

Với $x = 3; y = 1$ không là nghiệm của bất phương trình (1) nên $(3; 1)$ không là nghiệm của hệ.

Với $x = 1; y = -3$ là nghiệm của cả hai bất phương trình (1) và (2) nên $(1; -3)$ là nghiệm của hệ.

Với $x = -2; y = 3$ không là nghiệm của bất phương trình (1) nên $(-2; 3)$ không là nghiệm của hệ.

Câu 2: Miền nghiệm (phần không tô màu) dưới đây biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào?



- A. $\begin{cases} x - 3y - 1 \geq 0 \\ x + y + 1 > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x - 3y - 1 < 0 \\ x + y + 1 > 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x - 3y - 1 < 0 \\ x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 4x + 3y - 3 < 0 \\ 2x - y + 2 > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Trên đồ thị ta thấy 2 đường thẳng trên là $x - 3y - 1 = 0$ và $x + y + 1 = 0$. Lại có điểm có tọa độ $O(0; 0)$ là điểm thuộc miền nghiệm. Thay tọa độ điểm $O(0; 0)$ vào đáp án B ta được:

$\begin{cases} 0 - 3 \cdot 0 - 1 < 0 \\ 0 + 0 + 1 > 0 \end{cases}$ nên miền nghiệm là của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 3y - 1 < 0 \\ x + y + 1 > 0 \end{cases}$.

Câu 3: Cặp số $(x; y)$ nào sau đây **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + 4y - 1 > 0 \\ x + 2y - 3 \leq 0 \end{cases}$

- A. $(3; 0)$. B. $(-1; 2)$. C. $(2; 0)$. D. $(0; 0)$.

Lời giải

Xét hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + 4y - 1 > 0(1) \\ x + 2y - 3 \leq 0(2) \end{cases}$$

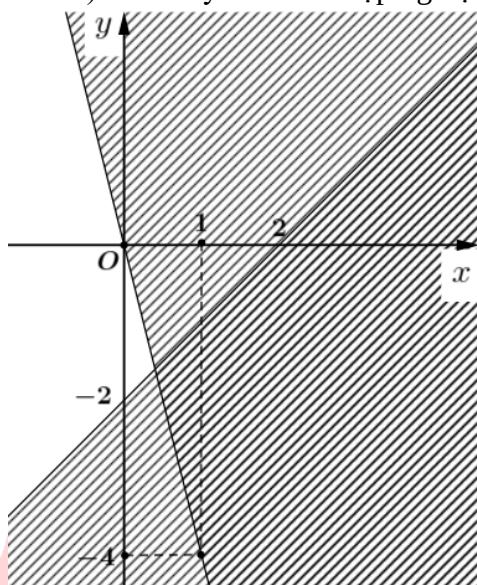
Với $x = 3; y = 0$ là nghiệm của bất phương trình (1) và (2) nên $(3; 0)$ là nghiệm của hệ.

Với $x = -1; y = 2$ là nghiệm của bất phương trình (1) và (2) nên $(-1; 2)$ là nghiệm của hệ.

Với $x = 2; y = 0$ là nghiệm của bất phương trình (1) và (2) nên $(2; 0)$ là nghiệm của hệ.

Với $x = 0; y = 0$ không là nghiệm của bất phương trình (1) nên $(0; 0)$ không là nghiệm của hệ.

Câu 4: Miền nghiệm (phần không tô màu) dưới đây biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào?



A. $\begin{cases} 4x + y < 0 \\ x - y - 2 > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 4y > 0 \\ x - y - 2 < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 4x + y < 0 \\ x - y - 2 < 0 \end{cases}$

Lời giải

Trên đồ thị ta thấy 2 đường thẳng trên là $4x + y = 0$ và $x + y + 1 = 0$. Lại có điểm có tọa độ $(-1; 0)$ là điểm thuộc miền nghiệm. Thay tọa độ điểm $(-1; 0)$ vào đáp án D ta được:

$$\begin{cases} 4 \cdot (-1) + 0 < 0 \\ -1 - 0 - 2 < 0 \end{cases} \text{ (luôn đúng) nên miền nghiệm là của hệ bất phương trình } \begin{cases} 4x + y < 0 \\ x - y - 2 < 0 \end{cases}$$

Câu 5: Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x > 0 \\ x - y \leq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$
 chứa điểm nào sau đây?

A. $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

B. $B(1; 2)$

C. $C(0; 2)$

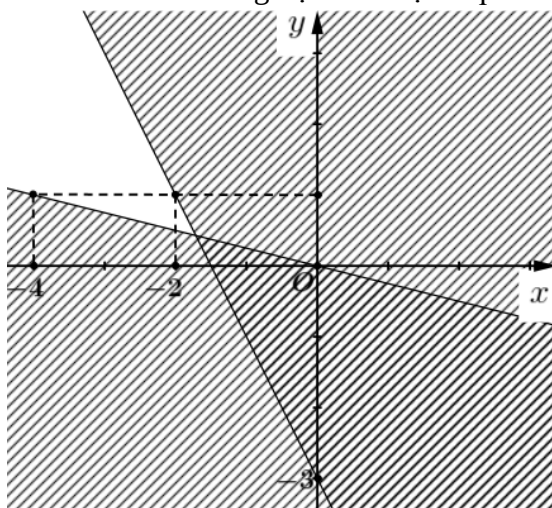
D. $D(3; -2)$

Lời giải

Thay tọa độ điểm $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ vào hệ phương trình $\begin{cases} x > 0 \\ x - y \leq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{1}{2} - (-1) \leq 2 \text{ (luôn đúng)} \\ \frac{1}{2} + (-1) \leq 1 \end{cases}$

Suy ra điểm $A\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Câu 6: Phần không tô màu là hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?



- A. $\begin{cases} x + 4y > 0 \\ 2x + y + 3 > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + 4y < 0 \\ 2x + y + 3 \leq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + 4y > 0 \\ 2x + y + 3 \leq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + 4y \geq 0 \\ 2x + y + 3 \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị gồm hai đường thẳng $x + 4y = 0$ và $2x + y + 3 = 0$.

Ta thấy điểm có tọa độ $(-4; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình: $x + 4y > 0$.

Thay tọa độ điểm $(-4; 2)$ vào bất phương trình $2x + y + 3 \leq 0$ ta được $2 \cdot (-4) + 2 + 3 \leq 0$ (luôn đúng). Suy ra nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $2x + y + 3 = 0$ kể cả đường thẳng đó là miền nghiệm của bất phương trình $2x + y + 3 \leq 0$.

Vậy phần không tô màu là hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + 4y > 0 \\ 2x + y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

Câu 7: Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 3x - y > 3 \end{cases}$?

- A. $(0; 4)$. B. $(1; -1)$. C. $(4; 1)$. D. $(2; 3)$.

Lời giải

Lần lượt thay các bộ số vào hệ bất phương trình ta được một nghiệm của hệ bất phương trình trên là $(4; 1)$.

Câu 8: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ 2x + y > 3 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

A. (1;1).

B. (-1;2).

C. (2;-1).

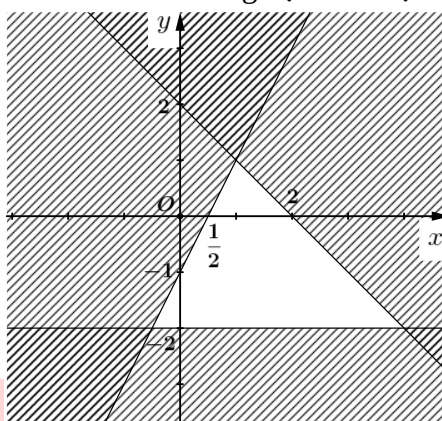
D. (1;2).

Lời giải

Lần lượt thay các bộ số vào hệ bất phương trình ta được một nghiệm của hệ bất phương trình trên là (1;2).

Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ 2x + y > 3 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm (1;2).

Câu 9: Phần không tô màu trong hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào dưới đây?



A. $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x + y < 2 \\ 3y - x > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ 2x + y > 2 \\ 3y - x > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x + y \geq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy đường thẳng (d_1) có phương trình là $2x - y = 1$, đường thẳng (d_2) có phương trình $x + y = 2$ và đường thẳng (d_3) có phương trình là $y = -2$.

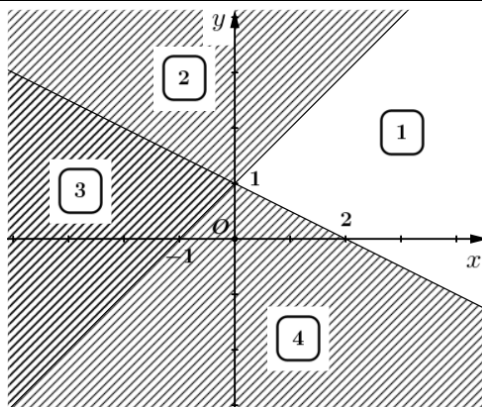
Do đó loại đáp án A và B.

Lại thấy điểm có tọa độ (1;-1) thuộc miền biểu diễn nghiệm và thay vào đáp án C ta được:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - (-1) < 1 \\ 1 + (-1) \geq 2 \\ -1 \geq -2 \end{cases} \text{ , ta thấy } 1 + (-1) \geq 2 \text{ (vô lý), do đó đáp án C không thỏa mãn.}$$

Vậy phần không tô màu trong hình biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + y \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$

Câu 10: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y > -1 \\ x + 2y > 2 \end{cases}$ là miền nào sau đây :



A. Miền 1.

B. Miền 2.

C. Miền 3.

D. Miền 4.

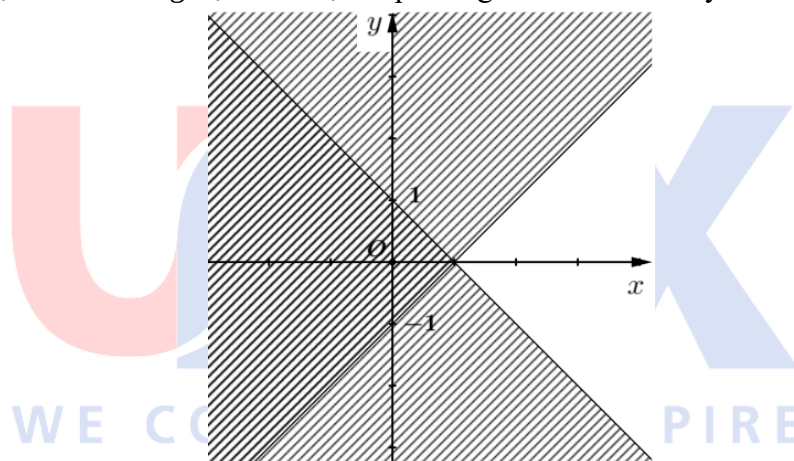
Lời giải

Vẽ các đường thẳng $x - y = -1$, $x + 2y = 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Dễ thấy điểm $(2; 1)$ thỏa mãn cả hai bất phương trình của hệ đã cho.

Suy ra miền nghiệm của hệ bất phương trình đó là phần mặt phẳng miền 1.

Câu 11: Miền không gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây



A. $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y > 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y > 1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn điểm $M(2; 0)$.

Thay vào các hệ bất phương trình ta thấy hệ $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y > 1 \end{cases}$ thỏa mãn.

Câu 12: Biết miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ là một đa giác. Hãy tính diện tích của

đa giác đó

A. $\frac{15}{2}$.

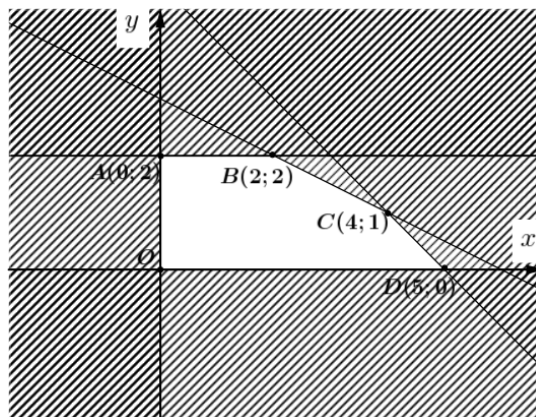
B. $\frac{25}{2}$.

C. 20.

D. 10.

Lời giải

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$
 là



Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là ngũ giác $OABCD$

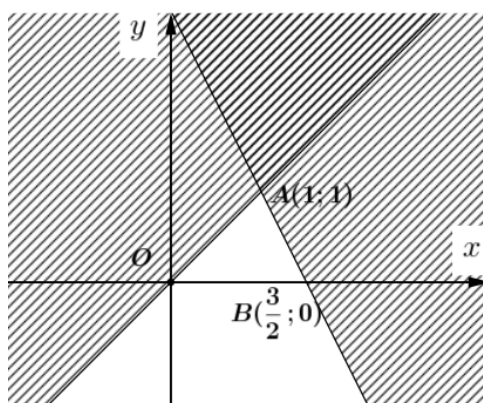
Ta có
$$S = S_{AEBO} + S_{BEFC} + S_{CFD} = \frac{15}{2}$$

Câu 13: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \\ x + y - m > 0 \end{cases}$$
. Có bao nhiêu số tự nhiên $m \leq 50$ sao cho hệ bất phương trình trên vô nghiệm

A. 49. **B.** 48. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$$
 là

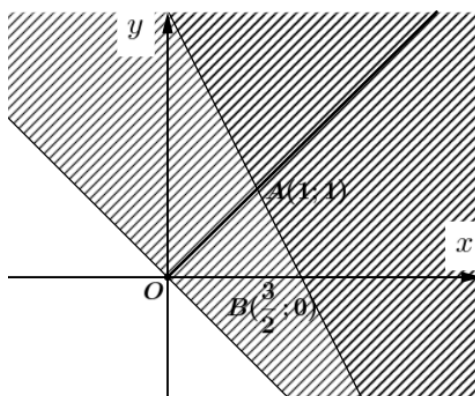


Hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi miền nghiệm của bất phương trình $x + y - m > 0$ và miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$$
 không có điểm chung

Ta có đường thẳng $x + y - m = 0$ là đường thẳng song song với đường thẳng $x + y = 0$

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

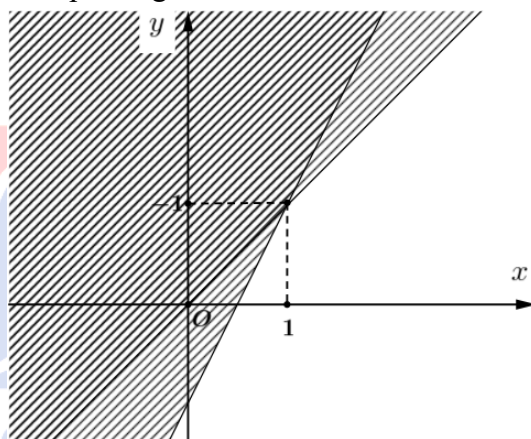
Mà miền nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x + y = 0$ chứa điểm A và không lấy đường thẳng $x + y = 0$



Từ hình vẽ ta có hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $m \geq 2$

Vậy có $50 - 2 + 1 = 49$ số tự nhiên m thỏa yêu cầu bài toán

Câu 14: Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây (không chứa biên), biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

Lời giải

Thay tọa độ điểm $M(1;0)$ vào lần lượt từng hệ bất phương trình ta thấy chỉ có B thỏa mãn.

Câu 15: Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} x + 3y - 6 > 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 3y - 6 > 0 \\ 2x + y + 4 < 0 \end{cases}$

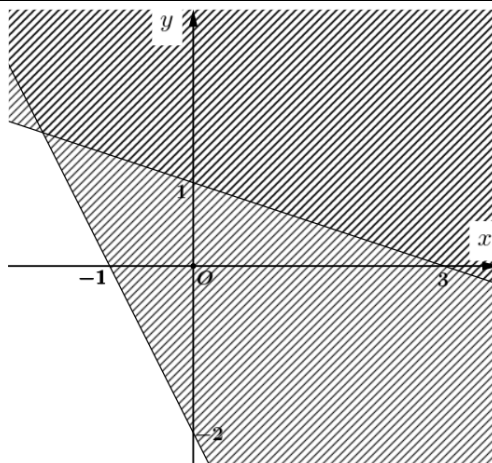
C. $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 < 0 \end{cases}$

Lời giải

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào các hệ bất phương trình ta thấy điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của cả hai bất phương trình câu C.

Câu 16: Miền góc không bị gạch sọc trong hình vẽ (kể cả hai cạnh của góc đó) là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?



- A. $\begin{cases} x+3y-3 \geq 0 \\ 2x+y+2 \geq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+3y-3 \leq 0 \\ 2x+y+2 \leq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x+3y-3 \leq 0 \\ 2x+y+2 \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+3y-3 \geq 0 \\ 2x+y+2 \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Thay tọa độ điểm $M(-2;0)$ vào các hệ bất phương trình ta thấy điểm $M(-2;0)$ thuộc miền nghiệm của cả hai bất phương trình đáp án B.

- Câu 17:** Cặp số $(x;y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-2y \geq 4 \\ x > 0 \end{cases}$

- A. $(-1;2)$. B. $(-2;-4)$. C. $(2;-4)$. D. $(0;1)$.

Lời giải

Thay tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình ta thấy điểm $(2;-4)$ thuộc miền nghiệm của cả ba bất phương trình trong hệ nên ta chọn câu C.

- Câu 18:** Cặp số $(x;y)$ nào sau đây **không là nghiệm** của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x \geq -3 \\ y \geq -1 \end{cases}$

- A. $(3;0)$. B. $(-1;1)$. C. $(-2;0)$. D. $(0;0)$.

Lời giải

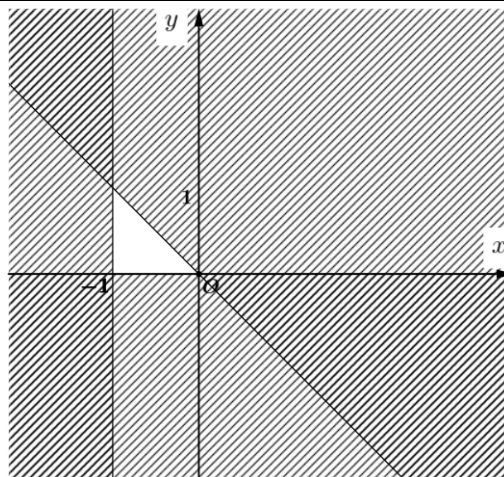
Xét hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x \geq -3 \\ y \geq -1 \end{cases}$.

Với $x=3; y=0$ không là nghiệm của ba bất phương trình trong hệ nên $(3;0)$ không là nghiệm của hệ.

- Câu 19:** Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq -1 \\ x+y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ là.

- A. Một nửa mặt phẳng. B. Miền tứ giác. C. Miền tam giác. D. Miền ngũ giác.

Lời giải



Từ hình vẽ nhận thấy hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 có miền nghiệm là một tam giác.

- Câu 20:** Điểm nào sau đây không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ 2x - y + 4 > 0 \\ x + y - 4 < 0 \end{cases}$$
- A.** $M(0;1)$. **B.** $N(-1;1)$. **C.** $P(0;3)$. **D.** $Q(0;2)$.

Lời giải

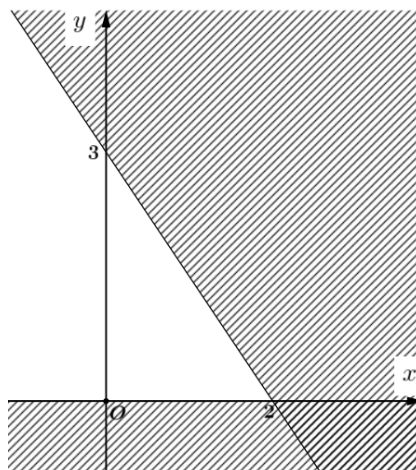
Thay tọa độ điểm $M(0;1)$ vào hệ bất phương trình, ta thấy tọa độ điểm $M(0;1)$ không thỏa mãn.

- Câu 21:** Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$$
 chứa điểm nào sau đây?
- A.** $A(1;0)$. **B.** $B(-2;3)$. **C.** $C(0;-1)$. **D.** $D(-1;0)$.

Lời giải

Thay lần lượt tọa độ các điểm A, B, C, D vào hệ bất phương trình, ta thấy tọa độ điểm $D(-1; 0)$ thỏa mãn hệ.

- Câu 22:** Phần không gạch chéo ở hình sau đây biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau:



A. $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < -6 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y > -6 \end{cases}$

Lời giải

Chọn điểm $M(0;1)$ thuộc miền không gạch chéo, thay tọa độ điểm $M(0;1)$ vào các hệ bất phương trình, ta thấy tọa độ điểm $M(0;1)$ thỏa mãn phương án A.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $(m-1)x + 3y + 1 \geq 0$.

A. 15. B. 16. C. 18. D. 17.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(-1;5).$

Yêu cầu của bài toán tương đương điểm $A(-1;5)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình

$$(m-1)x + 3y + 1 \geq 0 \text{ tức là ta có } -m + 1 + 15 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 17.$$

Với m có giá trị nguyên dương, ta có 17 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 24: Có hai cái giỏ đựng trứng gồm giỏ A và giỏ B, các quả trứng trong mỗi đều có hai loại là trứng lành và trứng hỏng. Tổng số trứng trong hai giỏ là 20 quả và số trứng trong giỏ A nhiều hơn số trứng trong giỏ B. Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, biết xác suất để lấy được hai quả trứng lành là $\frac{55}{84}$. Tìm số trứng lành trong giỏ A.

A. 6. B. 14. C. 11. D. 10.

Lời giải

Gọi a là số trứng lành, b là số trứng hỏng trong giỏ A

Gọi x là số trứng lành, y là số trứng hỏng trong giỏ B

Lấy ngẫu nhiên mỗi giỏ 1 quả trứng, xác suất để lấy được hai quả trứng lành:

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{55}{84}.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} (a.x):55 \\ (a+b)(x+y):84 \\ a+b+x+y=20 \\ (a+b)(x+y) \leq \left(\frac{a+b+x+y}{2}\right)^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=14 \\ x+y=6 \\ (a.x):55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ x=5 \end{cases}.$$

Vậy giỏ A có 11 quả trứng lành.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) $(3; -1)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 5y < 5 \\ -3x - y \leq -7 \end{cases}$

b) $(3; -1)$ không là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 5 \\ y < 4 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$

c) $(3; -1)$ không là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x + 5y > 1 \\ 3x + y > 5 \end{cases}$

d) $(0; 0)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y > 3 \\ -x + 3y \leq 5 \\ 3x - y \geq 7 \end{cases}$

Lời giải

a) Đúng: Thay $(3; -1)$ vào hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 5y < 5 \\ -3x - y \leq -7 \end{cases}$ ta được:

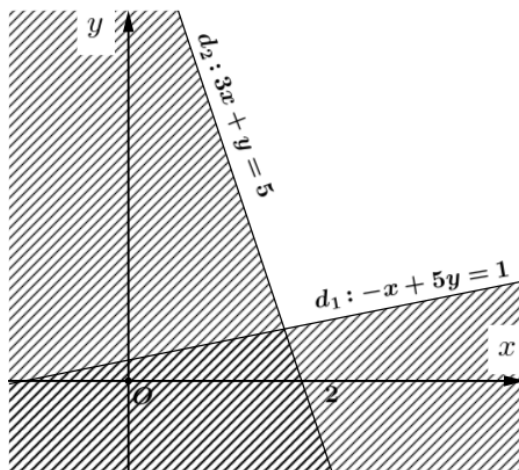
$\begin{cases} 3 + 5(-1) < 5 \\ -3 \cdot 3 - (-1) \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 5 \\ -8 \leq -7 \end{cases}$ (đúng). Vậy $(3; -1)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình.

b) Đúng: Thay $(3; -1)$ vào hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 5 \\ y < 4 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} 3 > 5 \\ -1 < 4 \\ 3 - 1 \leq 10 \end{cases}$ (vô lí).

Vậy $(3; -1)$ không là một nghiệm của hệ bất phương trình.

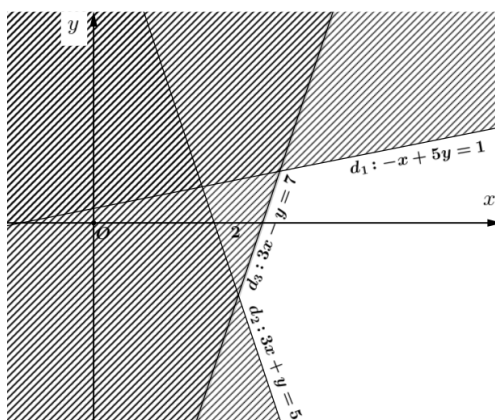
c) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x + 5y > 1 \\ 3x + y > 5 \end{cases}$ là miền không bị gạch ở hình sau

(không kể bờ d_1, d_2):



d) Sai: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y > 3 \\ -x + 3y \leq 5 \\ 3x - y \geq 7 \end{cases}$ là miền không bị gạch ở hình sau

(không kể bờ d_1):



Câu 2: Xét tính, đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Điểm $M(1;2)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 6 > 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$

b) Điểm $M(1;2)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases}$

c) Điểm $(0;0)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$

d) Điểm $(1;1)$ là một nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Sai: Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ vào hệ bất phương trình, ta được: $\begin{cases} 1 + 3 \cdot 2 - 6 > 0 \\ 2 \cdot 1 + 2 + 4 > 0 \end{cases}$ (đúng) nên suy ra điểm $M(1;2)$ thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.

b) Đúng: Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ vào hệ bất phương trình, ta được: $\begin{cases} 1 + 3 \cdot 2 - 6 < 0 \\ 2 \cdot 1 + 2 - 4 < 0 \end{cases}$ (sai) nên suy ra điểm $M(1;2)$ không thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.

c) Đúng: Thay $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ vào hệ bất phương trình, ta được: $\begin{cases} 0 + 0 - 2 \leq 0 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2 > 0 \end{cases}$ (đúng) do đó cặp số $(0;0)$ là một nghiệm của hệ đã cho.

d) Đúng: Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ vào hệ bất phương trình, ta được: $\begin{cases} 1 + 1 - 2 \leq 0 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 > 0 \end{cases}$ (đúng), do đó cặp số $(1;1)$ là một nghiệm của hệ đã cho.

Câu 3: Bác Minh có kế hoạch đầu tư không quá 240 triệu đồng vào hai khoản X và khoản Y . Để đạt được lợi nhuận thì khoản Y phải đầu tư ít nhất 40 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản X phải ít nhất gấp ba lần số tiền cho khoản Y . Khi đó:

a) Gọi x, y (đơn vị: triệu đồng) tiền bác Minh đầu tư vào kho ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y \leq 240 \\ y \geq 40 \\ x \geq 3y \end{cases}$$

b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho là một tứ giác

c) Điểm $C(200;40)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho

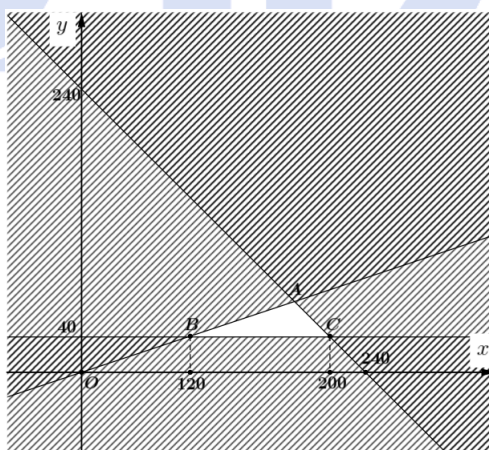
d) Điểm $A(180;60)$ là điểm có tung độ lớn nhất thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho

Lời giải

a) Đúng: Gọi x, y (đơn vị: triệu đồng) tiền bác Minh đầu tư vào kho. Khi đó ta có hệ bất phương

trình:
$$\begin{cases} x + y \leq 240 \\ y \geq 40 \\ x \geq 3y \end{cases}$$

b) Sai: Miền nghiệm của hệ trên là miền tam giác ABC với $A(180;60)$; $B(120;40)$, $C(200;40)$ như hình vẽ dưới:



c) Sai: Điểm $C(200;40)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho

d) Đúng: Điểm $A(180;60)$ là điểm có tung độ lớn nhất thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình tiền bác Minh đầu tư vào kho.

Câu 4: Trong 1 lạng thịt bò chứa 26 gam protein, 1 lạng cá chứa 22 g protein. Trung bình trong một ngày, một người đàn ông cần từ 56 đến 91g protein. Theo lời khuyên của bác sĩ, để tốt cho sức khỏe thì không nên ăn thịt nhiều hơn cá. Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò, lạng cá mà một người đàn ông ăn trong một ngày. Khi đó:

a) Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày

$$\text{cho một người đàn ông là } \begin{cases} 26x + 22y \geq 56 \\ 26x + 22y \leq 91 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày cho một người đàn ông là một ngũ giác

c) $(1; 2)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày cho một người đàn ông

d) Điểm $B\left(\frac{91}{48}; \frac{91}{48}\right)$ là điểm có hoành độ bé nhất thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một ngày cho một người đàn ông

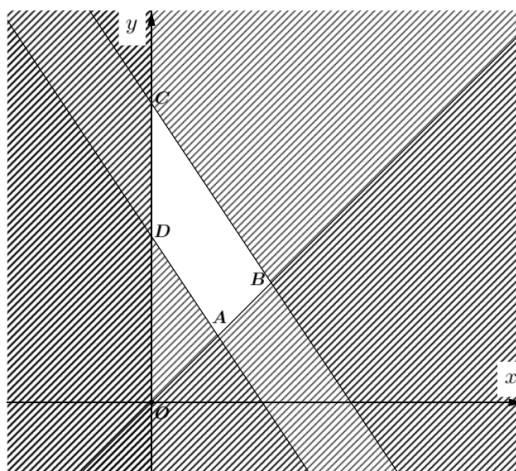
Lời giải

a) Đúng: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết trong một

$$\text{ngày cho một người đàn ông là: } \begin{cases} 26x + 22y \geq 56 \\ 26x + 22y \leq 91 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Sai: Miền nghiệm của hệ trên là miền tứ giác $ABCD$ với $A\left(\frac{7}{6}; \frac{7}{6}\right), B\left(\frac{91}{48}; \frac{91}{48}\right), C\left(0; \frac{91}{22}\right)$

$D\left(0; \frac{28}{11}\right)$ ở hình dưới đây:



c) Đúng: Một nghiệm $(x_0; y_0)$ của hệ bất phương trình với x_0, y_0 là $(x_0; y_0) = (1; 2)$.

d) Sai: Điểm $B\left(\frac{91}{48}; \frac{91}{48}\right)$ là điểm có hoành độ lớn nhất

Câu 5: Cho các hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 5x - y \geq -4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}, \begin{cases} -x - y < 4 \\ -x + 2y > -2 \\ x + y < 8 \\ x \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}. \text{ Khi đó:}$$

a) Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 5x - y \geq -4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$ là tam giác.

b) Điểm $M(1;1)$ thỏa mãn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 5x - y \geq -4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$.

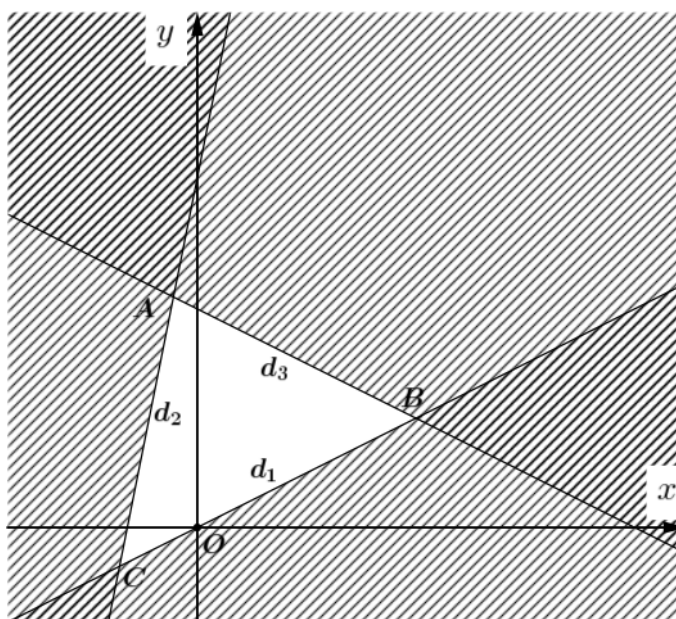
c) Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x - y < 4 \\ -x + 2y > -2 \\ x + y < 8 \\ x \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}$ là tứ giác.

d) Điểm $O(0;0)$ không thỏa mãn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -x - y < 4 \\ -x + 2y > -2 \\ x + y < 8 \\ x \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}$.

Lời giải:

a) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ 5x - y \geq -4 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$

Vẽ các đường thẳng $d_1: x - 2y = 0, d_2: 5x - y = -4, d_3: x + 2y = 5$.



b) Đúng: Ta thấy điểm $M(1;1)$ thỏa mãn miền nghiệm của hệ bất phương trình vì khi thay

$$x=1, y=1 \text{ vào hệ, ta có: } \begin{cases} 1-2.1 \leq 0 \\ 5.1-1 \geq -4 \text{ (đúng)} \\ 1+2.1 \leq 5 \end{cases}$$

c) Đúng: Gạch bỏ các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình (nửa mặt phẳng có bờ là các đường d_1, d_2, d_3 và không chứa điểm M). Khi đó, miền nghiệm của bất phương trình chính là miền của tam giác ABC (kể cả ba cạnh của nó), trong đó

$$A\left(-\frac{3}{11}; \frac{29}{11}\right), B\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{4}\right), C\left(-\frac{8}{9}; -\frac{4}{9}\right).$$

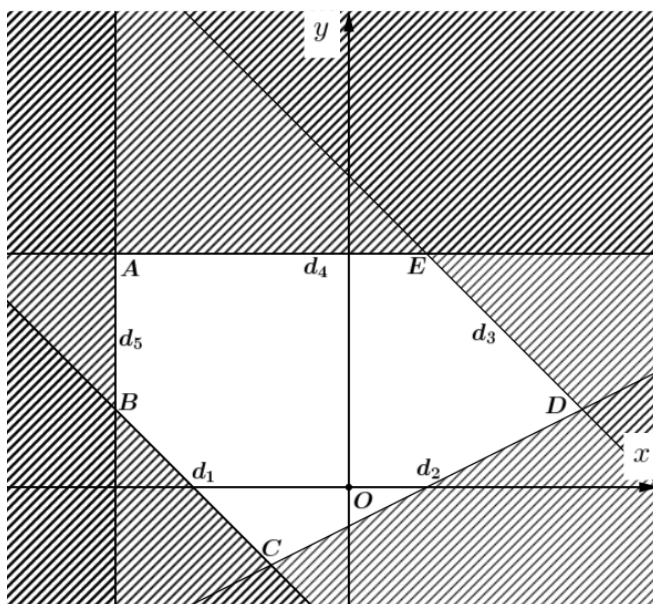
$$\text{d) Đúng: Miền nghiệm của hệ bất phương trình } \begin{cases} -x-y < 4 \\ -x+2y > -2 \\ x+y < 8 \\ x \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng $d_1: -x-y=4, d_2: -x+2y=-2, d_3: x+y=8, d_4: x=-6, d_5: y=6$

Ta có điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình vì khi thay $x=0, y=0$ vào hệ,

$$\text{ta được: } \begin{cases} 0 < 4 \\ 0 > -2 \\ 0 \geq -6 \\ 0 \leq 6 \end{cases} \text{ (đúng)}$$

Gạch bỏ các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ (nửa mặt phẳng có bờ là các đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 và không chứa điểm O). Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình chính là miền của ngũ giác $ABCDE$ (không kể các cạnh BC, CD, DE) với $A(-6;6), B(-6;2), C(-2;-2), D(6;2), E(2;6)$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho các cặp số sau: $(0;0)$; $(1;1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$. Hỏi có bao nhiêu cặp không là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Ta thay cặp số $(-1;1)$ vào hệ ta thấy không thỏa mãn.

Vậy chỉ có một cặp số không là nghiệm của hệ bất phương trình.

Câu 2: Cho hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ -y + 1 \leq 0 \end{cases}$. Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của $3x_0 + y_0$.

Lời giải

$$\text{Do } (x_0; y_0) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ -y + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 - 1 \geq 0 \\ -y_0 + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \geq \frac{1}{2} \\ y_0 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 3x_0 + y_0 \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{Suy ra } 3x_0 + y_0 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{5}{2} \text{ khi } \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Câu 3: Cho hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ trên. Tìm giá trị lớn nhất của $x_0 \cdot y_0$.

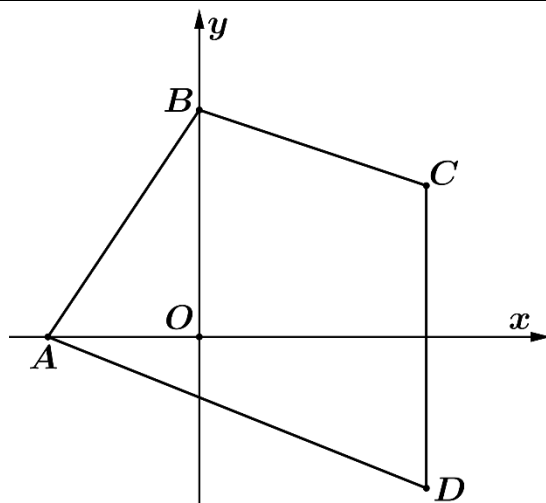
Lời giải

$$\text{Do } (x_0; y_0) \text{ là một nghiệm của hệ bất phương trình } \begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 \leq 3 \\ x_0 \geq 0 \\ y_0 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } x_0 \cdot y_0 = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot y_0 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2x_0 + y_0}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow x_0 \cdot y_0 \leq \frac{9}{8}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x_0 = \frac{3}{4} \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } x_0 \cdot y_0 \text{ đạt giá trị lớn nhất bằng } \frac{9}{8} \text{ khi } \begin{cases} x_0 = \frac{3}{4} \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho tứ giác ABCD có $A(-2;0)$; $B(0;3)$; $C(3;2)$ và $D(3;-2)$ (tham khảo hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho điểm $M(m; m+1)$ nằm trên hình tứ giác ABCD tính cả bốn cạnh AB, BC, CD, DA.



Lời giải

Nhận thấy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình gồm 4 bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng chứa điểm $O(0;0)$ và lần lượt có các bờ là các đường AB, BC, CD và DA .

Phương trình đường thẳng $AB: -3x + 2y = 6$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ AB (tính cả bờ AB) và chứa điểm $O(0;0)$ là $-3x + 2y \leq 6$.

Phương trình đường thẳng $BC: x + 3y = 9$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ BC (tính cả bờ BC) và chứa điểm $O(0;0)$ là $x + 3y \leq 9$.

Phương trình đường thẳng $CD: x = 3$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ CD (tính cả bờ CD) và chứa điểm $O(0;0)$ là $x \leq 3$.

Phương trình đường thẳng $DA: 2x + 5y = -4$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ DA (tính cả bờ DA) và chứa điểm $O(0;0)$ là $2x + 5y \geq -4$.

Như vậy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -3x + 2y \leq 6 \\ x + 3y \leq 9 \\ x \leq 3 \\ 2x + 5y \geq -4 \end{cases} \quad (*). \text{ Điểm } M(m; m+1) \text{ nằm trên hình tứ giác } ABCD \text{ tính cả bốn cạnh của nó}$$

khi và chỉ khi $(m; m+1)$ là một nghiệm của hệ $(*)$, tức là

$$\begin{cases} -3m + 2(m+1) \leq 6 \\ m + 3(m+1) \leq 9 \\ m \leq 3 \\ 2m + 5(m+1) \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4 \\ m \leq \frac{3}{2} \\ m \leq 3 \\ m \geq -\frac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1\}$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên diện tích 8 ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng dưa thì cần 20 công và thu được 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu được 4 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

Lời giải

Giả sử cần trồng x (ha) dưa và y (ha) củ đậu. Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}.$$

Khi đó hộ nông dân thu về số tiền là $T = 3x + 4y = (x + y) + (2x + 3y) \leq 8 + 18 = 26$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Câu 6: Người ta dự định dùng 2 nguyên liệu là mía và củ cải đường để chiết xuất ít nhất 140 kg đường kính (độ tinh khiết cao) và 9 kg đường cát (có lẫn tạp chất màu). Từ mỗi tấn mía giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg đường kính và 0,6 kg đường cát. Từ mỗi tấn củ cải đường giá 3 triệu đồng ta chiết xuất được 10 kg đường kính và 1,5 kg đường cát. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ cung cấp không quá 10 tấn mía và không quá 9 tấn củ cải đường.

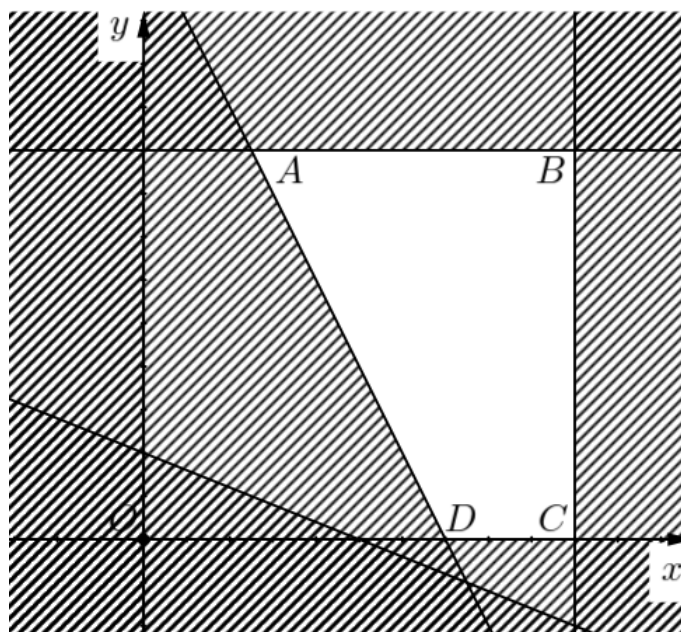
Lời giải

Đặt x và y lần lượt là số tấn mía và củ cải đường cần dùng.

Từ giả thiết, ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}.$$

Ta cần xác định x, y thỏa mãn hệ trên và $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:



Ta được miền nghiệm của hệ là tứ giác $ABCD$ với $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

Thay tọa độ các điểm trên vào T , ta được chi phí nguyên liệu ít nhất khi $x=5$ và $y=4$.

Vậy cần dùng 5 tấn mía và 4 tấn củ cải đường thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

-----HẾT-----

