

BÀI

03

TÍCH CỦA MỘT VECTOR VỚI MỘT SỐ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tích của một vector với một số

Tích của một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k > 0$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.

Tích của một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k < 0$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.

Chú ý: Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

Nhận xét: Vector $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, ngược hướng $\vec{a}$ nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

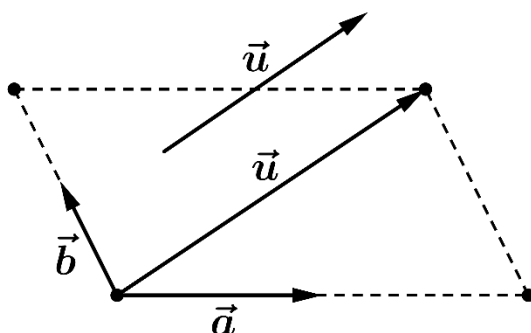
2 Các tính chất của phép nhân vector với một số

Với hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực k, t , ta luôn có:

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Nhận xét:

- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
- Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.



Chú ý: Mọi vector $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vector $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $(x; y)$ sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

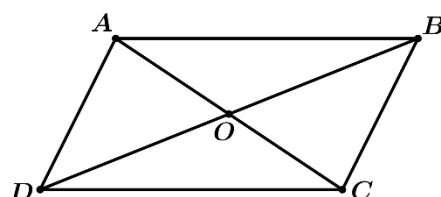
Dạng 1: Xác định tích của một vector với một số

Phương pháp:

- Sử dụng khái niệm tích của vector với một số
- Sử dụng tính chất tích vector với một số
- Sử dụng quy tắc trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC, BD và M là trung điểm của AB . Tìm vector trong các trường hợp sau:



a) $2\vec{AO}$

b) $-\frac{1}{2}\vec{DB}$

c) $2\vec{AM}$

d) $\frac{1}{2}\vec{BA}$

Lời giải

a) Vì O là giao điểm giữa AC, BD nên O là trung điểm của $AC \Rightarrow 2\vec{AO} = \vec{AC}$.

b) Vì O là giao điểm giữa AC, BD nên O là trung điểm của $BD \Rightarrow -\frac{1}{2}\vec{DB} = \frac{1}{2}\vec{BD} = \vec{BO}$

c) Vì M là trung điểm của AB nên $2\vec{AM} = \vec{AB}$.

d) Vì M là trung điểm của AB nên $\frac{1}{2}\vec{BA} = \vec{BM}$.

Bài tập 2: Thực hiện các phép toán sau:

a) $2(\vec{u} + \vec{v})$

b) $(a - b)\vec{m}$

c) $7(-3\vec{c})$

d) $\vec{c} + 7\vec{c}$

e) $9\vec{c} - 7\vec{c}$

f) $-3(\vec{u} - \vec{v})$

g) $(2a + b)\vec{n}$

h) $-3\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right)$

i) $2\vec{a} + 7\vec{a}$

j) $3\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b}$

Lời giải

a) $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

b) $(a - b)\vec{m} = a\vec{m} - b\vec{m}$

c) $7(-3\vec{c}) = -21\vec{c}$

d) $\vec{c} + 7\vec{c} = 8\vec{c}$

e) $9\vec{c} - 7\vec{c} = (9 - 7)\vec{c} = 2\vec{c}$

f) $-3(\vec{u} - \vec{v}) = -3\vec{u} + 3\vec{v}$

g) $(2a + b)\vec{n} = 2a\vec{n} + b\vec{n}$

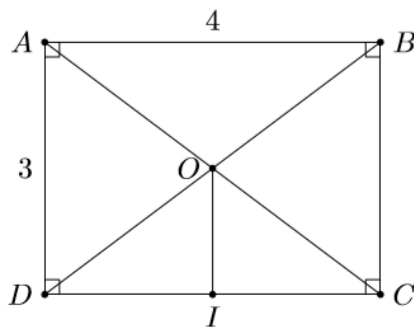
h) $-3\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right) = \left(-3 \cdot \frac{2}{3}\right)\vec{c} = -2\vec{c}$

i) $2\vec{a} + 7\vec{a} = 9\vec{a}$

j) $3\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b} = \left(3 - \frac{1}{3}\right)\vec{b} = \frac{8}{3}\vec{b}$.

Bài tập 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có $AB = 4, AD = 3$. Tính $|\vec{AC} + \vec{BD}|$

Lời giải



Gọi I là trung điểm của DC thì ta có $|\vec{AC} + \vec{BD}| = |2\vec{OC} + 2\vec{OD}| = |2(\vec{OC} + \vec{OD})| = 2|\vec{OC} + \vec{OD}|$

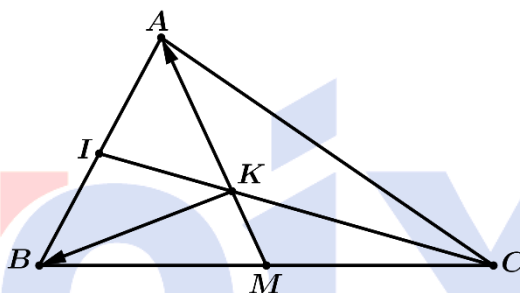
$$\Rightarrow |\vec{AC} + \vec{BD}| = 2|2\vec{OI}| = 4OI = 2BC = 2.3 = 6.$$

Bài tập 4: Cho tam giác ABC .

a) Tìm điểm K sao cho $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$

Lời giải



a) Ta có: $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{KB} - \vec{KC} \Leftrightarrow \vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của tam giác ABC .

b) Gọi I là trung điểm của AB .

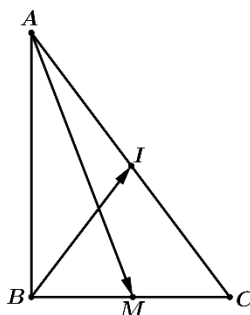
Ta có: $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MI} + \vec{MC} = \vec{0} \Rightarrow M$ là trung điểm của IC .

Bài tập 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại B có $\hat{A} = 30^\circ$, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC . Hãy tính:

a) $|\vec{BA} + \vec{BC}|$

b) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

Lời giải

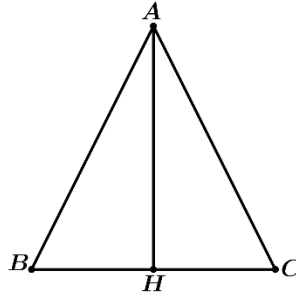


$$\text{Ta có: } BC = AB \tan A = a \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AC = \frac{AB}{\cos A} = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$a) |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2BI = 2 \cdot \frac{AC}{2} = AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$b) |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}.$$

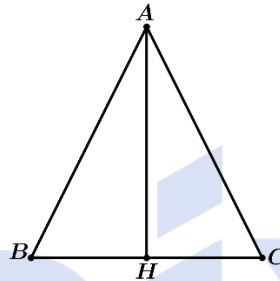
Bài tập 6: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính



$$a) |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$$

$$b) |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$$

Lời giải



$$a) |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}| = |(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2AC = 2a.$$

b) Gọi H là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{AH}| = 2AH = 2\sqrt{AB^2 - BH^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$$

Bài tập 7: Cho tam giác ABC .

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

$$b) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{OM}.$$

Bài tập 8: Cho hai điểm phân biệt A và B .

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O ta luôn có $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

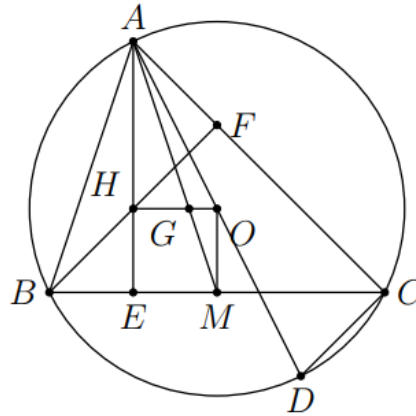
$$a) \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

b) Ta có: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}) = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \\ &= \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}(-2\overrightarrow{KB}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK} \end{aligned}$$

Bài tập 9: Cho tam giác ABC với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O nên ta có $BH \parallel DC$ (cùng vuông góc với AC) (1)

Mặt khác $CH \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

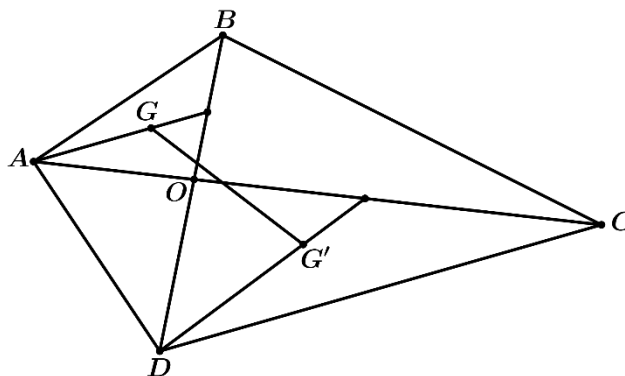
Vậy ba điểm H, M, D thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Ta có $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Bài tập 10: Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Lời giải



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên ta có: $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$ (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên ta có $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho đoạn thẳng AB , gọi M là trung điểm của AB . Đẳng thức vector nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA}$. B. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BM}$.

Lời giải

Ta có $AM = \frac{1}{2}AB$ mà $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Câu 2: Đẳng thức nào sau đây mô tả **đúng** hình vẽ bên



- A. $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$. B. $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AI}$. C. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AI}$.

Lời giải

Ta có $AB = 3AI$ mà $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AI}$.

Câu 3: Cho $\vec{a} = k\vec{b}$. Đẳng thức vector nào sau đây **đúng**?

- A. $|\vec{a}| = k|\vec{b}|$. B. $|\vec{a}| = |k||\vec{b}|$. C. $|\vec{a}| = -k|\vec{b}|$. D. $\vec{a} = |k|\vec{b}$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $|\vec{a}| = |k||\vec{b}|$

Câu 4: Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$. B. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA}$. C. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GM}$. D. $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AM}$.

Lời giải

Do M là trung điểm của BC nên ta có: $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GM}$.

Câu 5: Cho vector $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} = -3\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng. B. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$.
C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. D. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải

Ta có $\vec{a} = -3\vec{b}$ nên hai vector $\vec{b}$ và $\vec{a}$ ngược hướng.

Câu 6: Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$. B. $\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.
C. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$. D. $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AM}$.

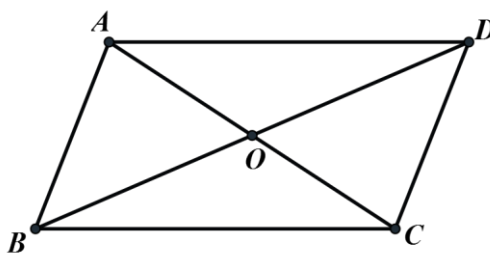
Lời giải

Điểm G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

Câu 7: Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{BO}$. B. $\vec{AC} = 2\vec{AO}$. C. $\vec{CB} + \vec{CD} = 2\vec{CO}$. D. $\vec{DB} = 2\vec{OB}$.

Lời giải



Ta có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \neq 2\vec{BO}$ suy ra sai.

Ta có $\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA} = 2\vec{CO}$

Câu 8: Cho hình bình hành $ABCD$. Tổng các vector $\vec{BA} + \vec{BD} + \vec{BC}$ là

- A. $2\vec{BD}$. B. $2\vec{AC}$. C. $\vec{DB}$. D. $3\vec{AB}$.

Lời giải

Do hình bình hành $ABCD$ nên ta có $\vec{BA} + \vec{BD} + \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD} = \vec{BD} + \vec{BD} = 2\vec{BD}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của BC . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{AC}$. B. $\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.
C. $\vec{AM} = 2\vec{AB} + 2\vec{AC}$. D. $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

Lời giải

Do M là trung điểm của BC nên ta có:

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Câu 10: Cho tam giác ABC , điểm M thuộc cạnh BC thỏa mãn $BM = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Do điểm M thuộc cạnh BC thỏa mãn $BM = 2MC$ nên ta có:

$$\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Câu 11: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

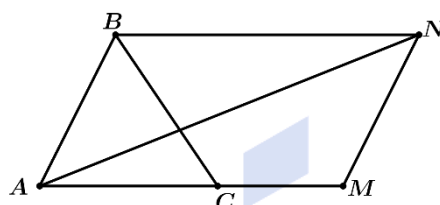
A. $a\sqrt{7}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $3a$.

D. $a\sqrt{5}$.

Lời giải



Dựng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$.

Dựng hình bình hành $ABNM$ nên khi đó $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$

Dựng điểm M thỏa mãn $AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2 \cdot AB \cdot BN \cdot \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AN = a\sqrt{7}$

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{7}$.

Câu 12: Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x+1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x+1)\vec{b}$ cùng phương nên có tỉ lệ: $\frac{1}{2} = \frac{x+1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Câu 13: Tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$. Độ dài vectơ $4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ bằng:

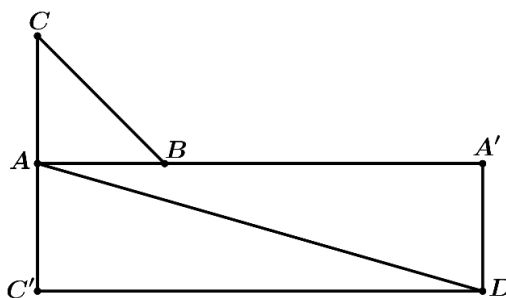
A. $a\sqrt{15}$.

B. $3a$.

C. $4a$.

D. $a\sqrt{17}$.

Lời giải



Vẽ $\overrightarrow{AB'} = 4\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AC}$ và hình bình hành $AC'DB'$

Ta có: $|\overrightarrow{4AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$

Do đó: $AD = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{16a^2 + a^2} = a\sqrt{17}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC có M là trung điểm AB , điểm N thuộc cạnh BC sao cho $BN = 3NC$. Gọi I là giao điểm của AN, CM . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A.** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IN}$. **B.** $\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{IN}$. **C.** $\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{IN}$. **D.** $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{IN}$.

Lời giải

Gọi $P \in BC$ thỏa mãn $MP \parallel AN$.

Xét $\triangle CMP$ ta có: $\begin{cases} IN \parallel MP \\ CN = \frac{2}{5}CP \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MP}$ (1)

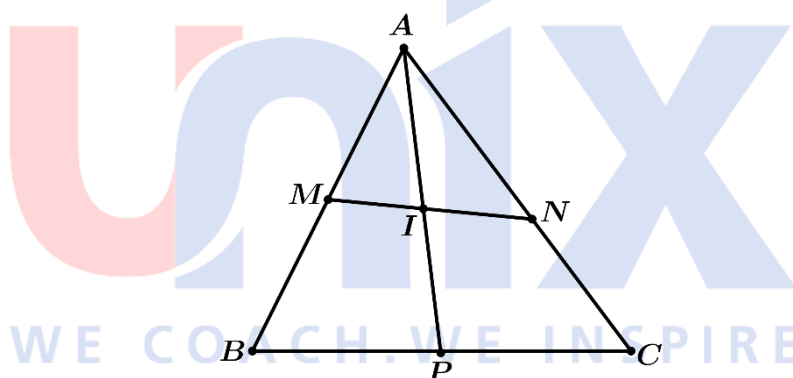
Xét $\triangle ABN$ ta có: $\begin{cases} MP \parallel AN \\ BM = \frac{1}{2}AB \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{IN}$.

Câu 15: Cho tam giác ABC có M là trung điểm AB , N thuộc cạnh AC thỏa mãn $AN = 2NC$, P thuộc đường thẳng BC sao cho AP cắt MN tại trung điểm I của MN . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{CP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BC}$.

Ta có I là trung điểm $MN \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$ (2)

Ta có A, I, P thẳng hàng nên $\frac{1-x}{\frac{1}{4}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

Câu 16: Cho vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Khi $k < 0$ hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ luôn cùng hướng
B. Hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ không cùng phương $\forall k \in \mathbb{R}$.
C. Hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ có độ dài bằng nhau $\forall k \in \mathbb{R}$.
D. Khi $k < 0$ hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ luôn ngược hướng.

Lời giải

Khi $k < 0$ hai vector $\vec{a}, k\vec{a}$ luôn ngược hướng.

Câu 17: Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$. C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Câu 18: Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC}$.

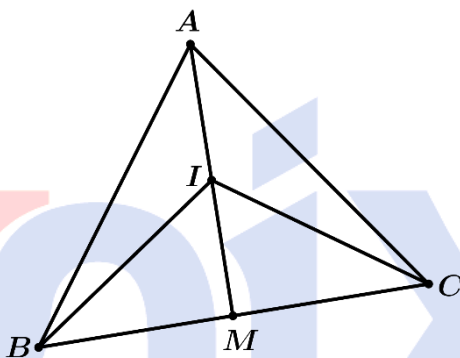
Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$

Câu 19: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
C. $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IA}$. D. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$.

Lời giải



Ta có: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IM} = 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM}) = \vec{0}$

Câu 20: Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC của tứ giác $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{MN}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}) \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \vec{0} + \vec{0} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}. \end{aligned}$$

Câu 21: Cho ba điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MP}$. Với điểm O bất kì, đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$. B. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OP})$.
C. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$. D. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$.

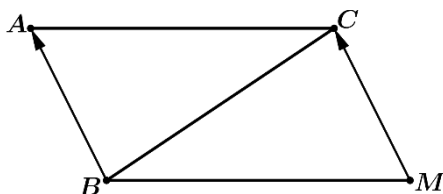
Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{3}[(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}) + 2(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM})] \\ &= \frac{1}{3}[(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{PM})] \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}). \end{aligned}$$

- Câu 22:** Cho tam giác ABC . Nếu điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì ta có
A. $ABMC$ là hình bình hành. **B.** $ABCM$ là hình bình hành.
C. M là trung điểm BC . **D.** M là trung điểm AB .

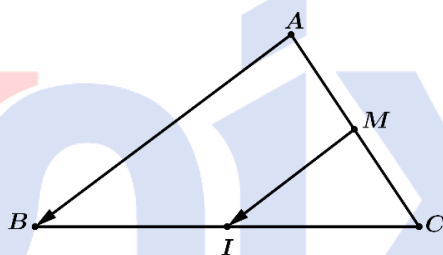
Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow ABMC$ là hình bình hành.

- Câu 23:** Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .
A. M là trung điểm của AC .
B. M là trung điểm của AB .
C. M là trung điểm của BC .
D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải

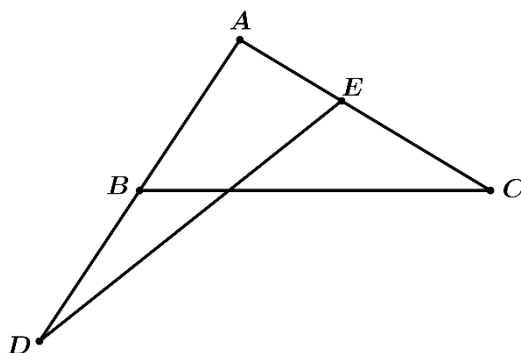


$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB}$ (với I là trung điểm của BC).

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M$ là trung điểm của AC .

- Câu 24:** Cho tam giác ABC . Lấy điểm D đối xứng với A qua B và lấy điểm E trên đoạn AC sao cho $3AE = 2EC$. Nếu $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ thì giá trị m, n là
A. $m, n = -\frac{2}{5}$. **B.** $m, n = -\frac{4}{5}$. **C.** $m, n = \frac{4}{5}$. **D.** $m, n = \frac{2}{5}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow m = -2, n = \frac{2}{5} \Rightarrow m, n = -\frac{4}{5}$.

- Câu 25:** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có hai cạnh $AB = a, BC = 2a$. Khi đó $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}|$ bằng

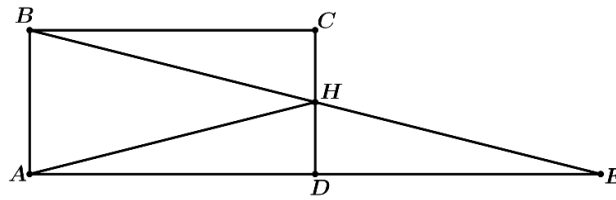
A. $a\sqrt{17}$.

B. $5a$.

C. $3a$.

D. $2\sqrt{2}a$.

Lời giải



$$|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2AH = BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + 16a^2} = a\sqrt{17}.$$

Câu 26: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC . Biết $AB = 4$, $BC = 5$ và $CA = 6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng

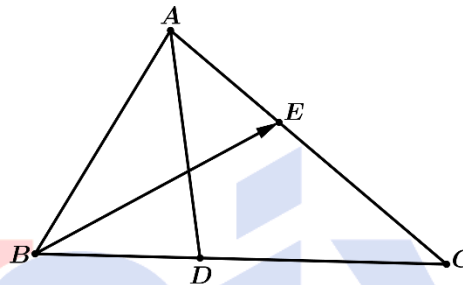
A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

B. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$.

C. $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

D. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải



Ta có AD là phân giác trong của tam giác ABC nên $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD+BD} = \frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}$.

$$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA} \text{ nên } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}.$$

Câu 27: Cho hình thang $ABCD$ có 2 đáy là $AB = a$ và $CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$ bằng

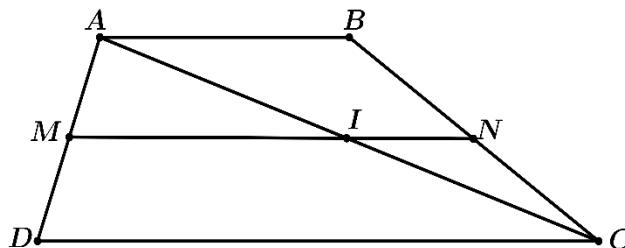
A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{3a}{2}$.

C. $2a$.

D. $3a$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm AC . Khi đó MI là đường trung bình của tam giác $ACD \Rightarrow MI = \frac{CD}{2} = a$

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN = \frac{AB+CD}{2} = \frac{a+2a}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$.

$$|(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) - \overrightarrow{MN}| = |2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MN}| = |2 \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MN}| = |\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{3}MN = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Câu 28: Cho tam giác ABC , I, J, K lần lượt là các điểm thỏa $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Khi đó phát biểu nào dưới đây là phát biểu **sai**?

A. $\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

B. Hai tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

C. $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{BK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Ta có: $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (đúng)

Ta có: $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{KA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (đúng)

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và IJK .

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{IG'} + \overrightarrow{JG'} + \overrightarrow{KG'} = \vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IG'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{JG'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{KG'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
 $\Rightarrow 3\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{IG'} + \overrightarrow{JG'} + \overrightarrow{KG'} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0}$

Vậy G và G' trùng nhau (đúng)

Câu 29: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên các cạnh AB và CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BMN$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG}$ mà $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow 3\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Câu 30: Tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức: $|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ là:

A. Một đường tròn có bán kính là $\frac{AB}{2}$

B. Một đường tròn có bán kính là $\frac{CB}{3}$

C. Một điểm.

D. Một đường thẳng qua A và song song với BC

Lời giải

Chọn điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Ta có: $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 3\overrightarrow{MI}$

$$\Rightarrow |3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 3MI = CB \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}CB$$

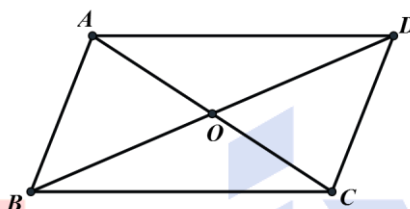
Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{CB}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O , M là một điểm bất kỳ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- b) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$.
- c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.
- d) Nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO}$ thì M là trọng tâm ΔABC .

Lời giải

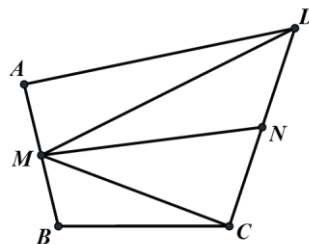


- a) Đúng: Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- b) Sai : Do $ABCD$ hình bình hành tâm O nên O là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$.
- c) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
 $= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = 4\overrightarrow{MO}$.
- d) Đúng : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO} \Rightarrow 4\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MO} \Rightarrow -\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MO}$
 Mặt khác BO là trung tuyến của ΔABC nên suy ra M là trọng tâm ΔABC .

Câu 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm MN . Gọi O là điểm bất kì. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

- a) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.
- b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$.
- c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.
- d) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Lời giải



a) Đúng : Do M là trung điểm các cạnh AB nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

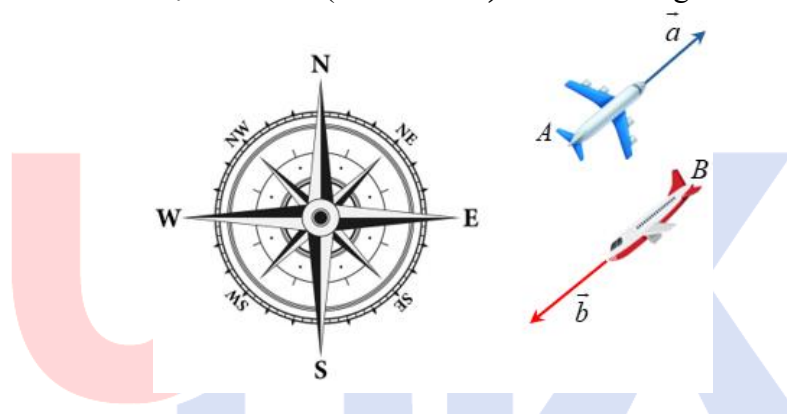
Do N lần lượt là trung điểm các cạnh DC nên $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

b) Đúng: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

c) Mặt khác: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

d) Đúng: $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2} \cdot 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}$.

Câu 3: Máy bay A đang bay về hướng đông bắc với tốc độ 600 km/h. Cùng lúc đó, máy bay B đang bay về hướng tây nam với tốc độ 800 km/h (như hình vẽ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Vector vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B ngược hướng với vector vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A.

b) $|\vec{a}| = 800$ (km/h); $|\vec{b}| = 600$ (km/h)

c) $\vec{b} = \frac{-4}{3}\vec{a}$.

d) $\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{b}$.

Lời giải

Ta thấy hướng đông bắc ngược hướng với hướng tây nam.

a) Đúng: vector vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B ngược hướng với vector vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A (1)

b) Đúng: Theo đề bài ta có $|\vec{a}| = 800$ (km/h); $|\vec{b}| = 600$ (km/h)

c) Đúng: Khi đó $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{600}{800} = \frac{3}{4} \Rightarrow |\vec{b}| = \frac{3}{4}|\vec{a}|$ (2) suy ra $\vec{b} = \frac{-3}{4}\vec{a}$.

d) Sai: $\vec{a} = \frac{-3}{4}\vec{b}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

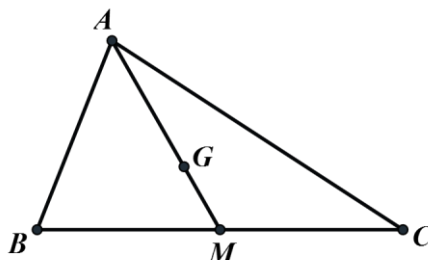
a) Tổng $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

c) Với mọi điểm N thì $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{GN}$

d) Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ta được $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$

Lời giải



a) Đúng: Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Sai: Ta có $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ Mặt khác $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

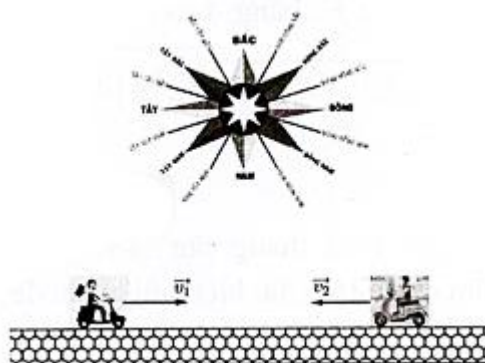
c) Đúng : Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$$

d) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một người đi xe máy từ Tây sang hướng Đông với vận tốc 40 km/h được biểu thị bởi vector $\vec{v}_1$ và một người khác đi xe máy từ hướng Đông sang hướng Tây với vận tốc 60 km/h được biểu thị bởi vector $\vec{v}_2$. Biết rằng $\vec{v}_2 = -\frac{a}{b}\vec{v}_1$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$), $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $2a + 3b$.



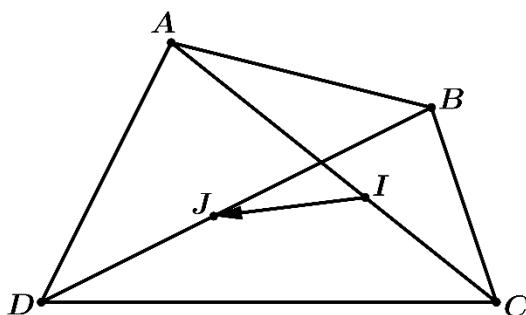
Lời giải

Ta có: $\vec{v}_2$ ngược hướng với $\vec{v}_1$ và có độ lớn bằng $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ lần độ lớn vector $\vec{v}_1$.

Vì vậy $\vec{v}_2 = -\frac{3}{2}\vec{v}_1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 12$.

Câu 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD . Biết rằng biểu thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{IJ}$. Tìm giá trị của k

Lời giải



Ta có $\begin{cases} \vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AB} + \vec{BJ} & (1) \\ \vec{IJ} = \vec{IC} + \vec{CD} + \vec{DJ} & (2) \end{cases}$

Cộng theo vế (1) và (2) ta được:

$$2\vec{IJ} = (\vec{IA} + \vec{IC}) + (\vec{AB} + \vec{CD}) + (\vec{BJ} + \vec{DJ}) \Leftrightarrow 2\vec{IJ} = \vec{0} + \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{CD}$$

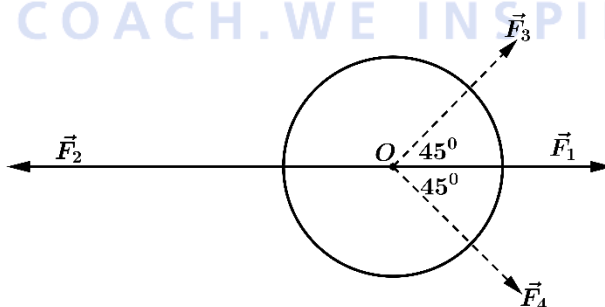
Suy ra $k = 2$

Câu 3: Nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $k\vec{GG'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$. Tìm giá trị của k .

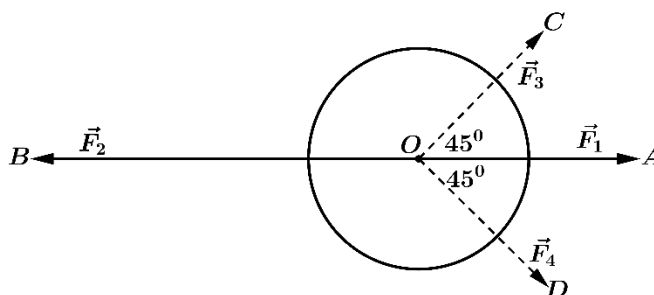
Lời giải

Ta có: $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{AG} + \vec{GG'} + \vec{G'A'} + \vec{BG} + \vec{GG'} + \vec{G'B'} + \vec{CG} + \vec{GG'} + \vec{G'C'}$
 $= 3\vec{GG'} + (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG}) + (\vec{G'A'} + \vec{G'B'} + \vec{G'C'}) = 3\vec{GG'} + \vec{0} + \vec{0} = 3\vec{GG'}$ suy ra $k = 3$

Câu 4: Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$, trong đó độ lớn lực $\vec{F_2}$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F_1}$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F_3}, \vec{F_4}$ có phương hợp với lực $\vec{F_1}$ các góc 45° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng 20 N . Tìm độ lớn của lực $\vec{F_2}$ (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



Lời giải



Ta có: $\vec{F_2} = -2\vec{F_1}$. Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng $\vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 - 2\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1.$$

$$\text{Đặt } \vec{F}_1 = \vec{OA}, \vec{F}_2 = \vec{OB}, \vec{F}_3 = \vec{OC}, \vec{F}_4 = \vec{OD}.$$

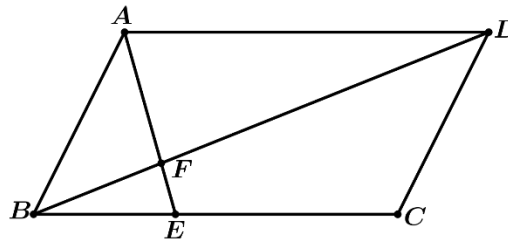
Ta có: $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 \Leftrightarrow \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OA}$ do đó $OCAD$ là hình bình hành.

Mặt khác: $OC = OD = 20$ và $\widehat{COD} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên $OCAD$ là hình vuông.

Khi đó: $|\vec{F}_1| = OA = 20\sqrt{2} \text{ N}$, $|\vec{F}_2| = 2|\vec{F}_1| = 40\sqrt{2} \text{ N} \approx 56,6 \text{ N}$.

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F là 2 điểm thỏa $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{BF} = \frac{1}{4}\vec{BD}$. Khi đó $\vec{AE} = k\vec{AF}$.
Tính $3k + 2025$

Lời giải



Ta phân tích $\vec{AE}$ và $\vec{AF}$ theo 2 vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AD}$.

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}; \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{1}{4}(\vec{AD} - \vec{AB}) = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}.$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} \vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} \\ \vec{AF} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} \\ \frac{4}{3}\vec{AF} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} \end{cases} \Rightarrow \vec{AE} = \frac{4}{3}\vec{AF} \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Khi đó: $3k + 2024 = 2029$

Câu 6: Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Biết rằng tập hợp các điểm M sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 6$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} \Rightarrow |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3|\vec{MG}| = 3MG \Leftrightarrow MG = 2$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 2.

-----HẾT-----