

1 Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Chú ý:

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$
- Ta có: $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

2 Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán)
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối)
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

3 Các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ

Trên mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Nhận xét: Hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác vectơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

4 Ứng dụng tích vô hướng của hai vectơ

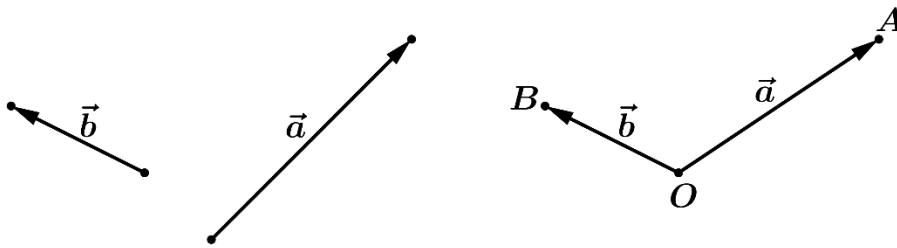
- Độ dài của vectơ:** Độ dài của vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính theo công thức: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- Góc giữa hai vectơ:** Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra kết luận nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$

và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

- **Khoảng cách giữa hai điểm:** Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

5 Góc giữa hai vector

Định nghĩa: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



Chú ý: Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.



B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định tích vô hướng của hai vector

Phương pháp:

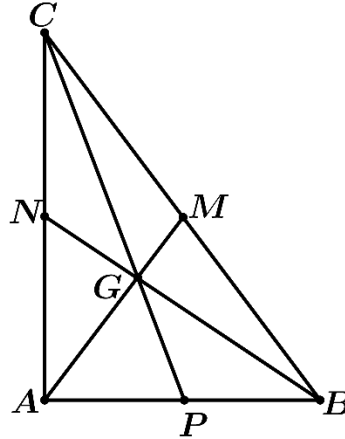
- Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

Lời giải



a) Theo định nghĩa tích vô hướng ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 2a^2 \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Mặt khác $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos \widehat{ABC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ nên $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

Ta có $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos \widehat{ACB}$

Theo định lý Pitago ta có $CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$

b) Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})$$

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$

c) Tương tự: vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có: $GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$

Khi đó: $GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$

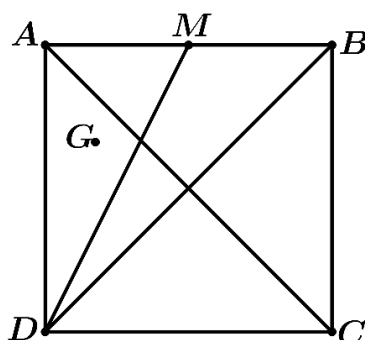
Suy ra $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$.

Bài tập 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

b) $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

Lời giải



a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$

$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có: $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Suy ra $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

Hơn nữa $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$

Suy ra $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

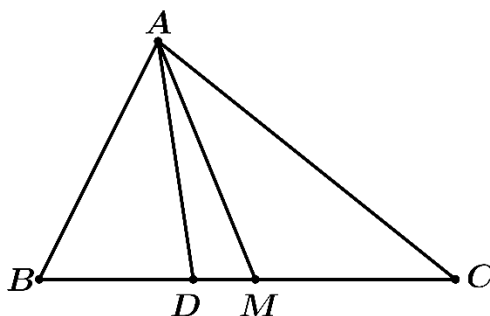
Nên $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) = \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) = \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}$.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ từ đó suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2] = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - CB^2] = \\ &= \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos A = cb \cos A$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) = cb \cos A \text{ hay } \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{b) Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

$$\text{Theo câu a) ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2)$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} \left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + b^2 \right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$\text{Theo tính chất đường phân giác thì } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC} \overrightarrow{DC} = \frac{b}{c} \overrightarrow{DC} (*)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \text{ thay vào } (*) \text{ ta được}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} &= \frac{b}{c} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 \\ &= (b\overrightarrow{AB})^2 + 2bc\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (c\overrightarrow{AC})^2 \Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 \\ &= b^2 c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + c^2 b^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} (b+c-a)(b+c+a) \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a).$$

Bài tập 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AD = 2a$. Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$ và $3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Tính độ dài của đoạn thẳng MN theo a .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = -\frac{5}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} = \\ &= \frac{1}{12} (-5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MN^2 &= \frac{1}{144} (25AB^2 - 30\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 9AD^2) = \frac{1}{144} (25a^2 - 0 + 36a^2) = \frac{61a^2}{144} \Rightarrow MN = \\ &= \frac{a\sqrt{61}}{12}. \end{aligned}$$

Bài tập 5: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng với G là trọng tâm tam giác ABC thì ta có:

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{6} (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Lời giải

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên ta có: } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$$

$$\begin{aligned}
 &= GA \cdot GB \cdot \cos \widehat{AGB} = GA \cdot GB \cdot \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{2GA \cdot GB} = \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{2} = \frac{\frac{4m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} - AB^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{BC^2 + BA^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \right) - AB^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{AC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} + AB^2 \right) - AB^2}{2} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Tương tự ta có: $\vec{GB} \cdot \vec{GC} = \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{BA^2}{4} + \frac{CA^2}{4} + BC^2 \right) - BC^2}{2} \quad (2)$

$$\vec{GC} \cdot \vec{GA} = \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{CB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} + AC^2 \right) - AC^2}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\begin{aligned}
 &\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{AC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} + AB^2 \right) - AB^2}{2} + \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{BA^2}{4} + \frac{CA^2}{4} + BC^2 \right) - BC^2}{2} \\
 &\quad + \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{CB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} + AC^2 \right) - AC^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \left(\frac{3AB^2}{2} + \frac{3BC^2}{2} + \frac{3AC^2}{2} \right) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)}{2} \\
 &= \frac{\frac{2}{3}(AB^2 + BA^2 + CA^2) - (AB^2 + BA^2 + CA^2)}{2} = \frac{-\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)}{2} = -\frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2).
 \end{aligned}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Lời giải

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) \cdot \frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và D.

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

• A đúng: vì $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

• B đúng: vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

Câu 3: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\hat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\hat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

Câu 5: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$ B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$ C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$

Lời giải

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\hat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\hat{C}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

Xác định được góc $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = 120^\circ$

Do đó $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 30^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = AB \cdot AG \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2}$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\hat{C}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

Câu 7: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\hat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2$

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c, AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$

Cách khác: Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$

Câu 9: Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2\text{cm}, BC = 3\text{cm}, CA = 5\text{cm}$ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và $AC \rightarrow I(4; -1)$. nằm giữa A, C .

Khi đó $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$

Cách khác: Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

Suy ra $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$

Câu 10: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Lời giải

Ta có $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
 $= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A. $P = -1$ B. $P = 3a^2$ C. $P = -3a^2$ D. $P = 2a^2$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

Ta có: $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$

$= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2$

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(2; 10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$

A. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. B. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. C. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$. D. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3; 1), \overrightarrow{OB} = (2; 10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$.

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\vec{a} = (4; 6)$ và $\vec{b} = (3; -7)$ suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$

- A. $\vec{c} = (-1; -3)$ B. $\vec{c} = (-1; 3)$ C. $\vec{c} = (1; -3)$ D. $\vec{c} = (1; 3)$

Lời giải

Gọi $\vec{c} = (x; y)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \vec{c} = (-1; 3)$$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$. Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

- A. $P = 0$ B. $P = 18$ C. $P = 20$ D. $P = 28$

Lời giải

Ta có $\vec{b} + \vec{c} = (6; 6)$ suy ra $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1.6 + 2.6 = 18$.

Câu 16: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. a^2 . C. $-a^2$. D. $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \frac{BC}{2}$. $AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$.

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều suy ra góc $\widehat{MAB} = 60^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 17: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

- A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2$$

Câu 18: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0 . D. a^2 .

Lời giải

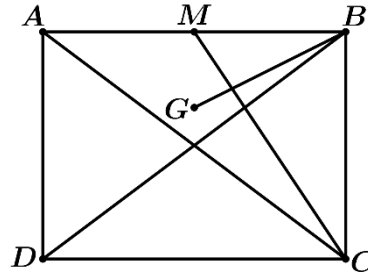
Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{ABAD}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 4a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ACM . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

b) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = -a^2$.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

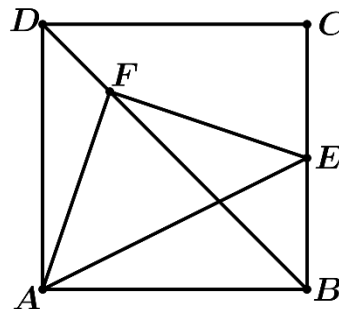
b) Sai: Vì G là trọng tâm của tam giác ACM nên

$$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

c) Đúng: Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC = AD = 3a$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

d) Sai: Ta có: $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2$
 $= \frac{1}{4}(4a)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 3a - \frac{1}{3}(3a)^2 = -3a^2$.

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Lấy E là trung điểm của BC , điểm F thỏa mãn $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{EF} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

d) Tam giác AEF vuông cân.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

b) Sai: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

c) Đúng: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$

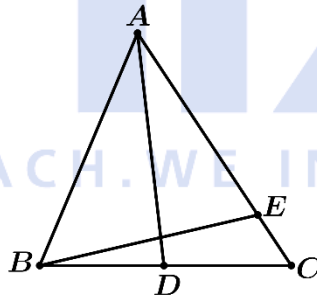
$$= \frac{-3}{16}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AD}^2 = 0 \Rightarrow AF \perp EF.$$

Ta có: $\overrightarrow{AF}^2 = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

$$\overrightarrow{EF}^2 = \left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2.$$

$\Rightarrow AF^2 = EF^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2 \Rightarrow AF = EF$. Vậy tam giác AEF vuông cân tại F .

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$ ($k \in \mathbb{R}$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $BC = 3\sqrt{5}$

d) $AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24$.

b) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó: $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 6^2 - 2 \cdot 24 + (4\sqrt{2})^2 = 20$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } \overrightarrow{AD}^2 &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right)^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2) \\ &= \frac{1}{4}[(4\sqrt{2})^2 + 2.24 + 6^2] = 29 \Rightarrow AD = \sqrt{29}. \end{aligned}$$

c) Sai: Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó ta có: } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}[24k + 6^2 \cdot k - (4\sqrt{2})^2 - 24] = 30k - 28. \end{aligned}$$

d) Đúng: Khi đó $AD \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\widehat{ACB} = 60^\circ$

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Lời giải

a) Đúng: Xét tam giác vuông ABC : $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$,

Khi đó: $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ$.

b) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$.

c) Sai: Ta có: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos \widehat{ACB}$

$$= -CB \cdot CA \cdot \cos 30^\circ = -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2$$

d) Đúng: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

Câu 5: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh a . Biết M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

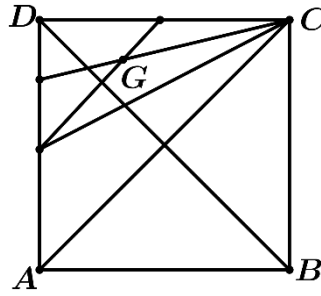
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$

b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$

Lời giải



a) Sai: Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh a là: $AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$= -AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$$

b) Sai: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = AM \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAM} = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$= DA \cdot DB \cdot \cos \widehat{ADB} - \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAD}$$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2$$

d) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}_0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos \widehat{ACB} = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

(trong đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$).

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$

c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$

Lời giải

a) Sai: Do $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$

b) Sai: Hai vectơ $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$ cùng hướng do đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \widehat{BAO} = 45^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = AB \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Đúng: Hai vector $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng do đó $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = CA \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180^\circ = -a^2$.

d) Đúng: Ta có: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

(trong đó $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$).

Ta có: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB} = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$.

Vậy $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$.

Câu 7: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , biết $AD = a, BC = 3a$ và cạnh $AB = 2a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

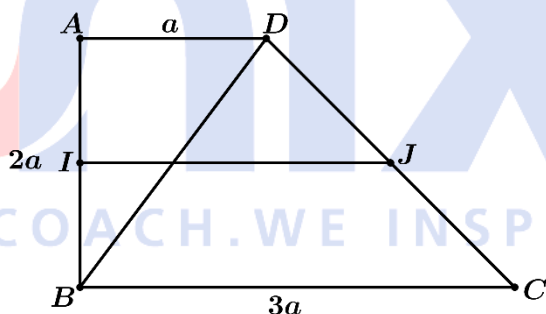
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$

b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$

d) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$

Lời giải



a) Đúng: Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ thì ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_0$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -4a^2.$$

b) Sai: Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ thì ta có $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = BC \cdot BD \cdot \cos \widehat{DBC}$

$$= BC \cdot BD \cdot \cos \widehat{BDA} = BC \cdot BD \cdot \frac{AD}{BD} = BC \cdot AD = 3a^3$$

(trong đó $\widehat{DBC} = \widehat{BDA}$ vì là hai góc so le trong).

c) Sai: Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= -\overrightarrow{AB}^2 + 0 + 0 + BC \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = -AB^2 + 3a \cdot a \cdot 1 = -(2a)^2 + 3a^2 = -a^2$$

d) Đúng: Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}}_0 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ} = BC \cdot IJ \cdot \cos 0^\circ = 3a \cdot 2a \cdot 1 = 6a^2.$$

Câu 8: Cho tam giác ABC đều có cạnh a , có trọng tâm G . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{4}$

c) $\widehat{AGB} = 120^\circ$

c) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{a^2}{6}$

Lời giải

a) Đúng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$

b) Sai: $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) = AG \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}a^2$

c) Đúng: Tam giác AGB có $\widehat{GAB} = \widehat{GBA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AGB} = 120^\circ$

d) Sai: $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos \widehat{AGB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$

Câu 9: Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $AC = 3a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng BC . Điểm J thuộc đoạn AC thỏa mãn $12AJ = 7AC$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4a^2$

b) $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

d) $AI \perp BJ$

Lời giải

a) Sai: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = 3a^2$

b) Sai: Do I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) Đúng: $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

c) Đúng: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(-4a^2 + \frac{7}{12} \cdot 3a^2 - 3a^2 + \frac{7}{12} \cdot 9a^2\right) = 0$$

Vậy $AI \perp BJ$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 4. Khi đó hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = AB^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$.

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ, AC = 2$ Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

Lời giải

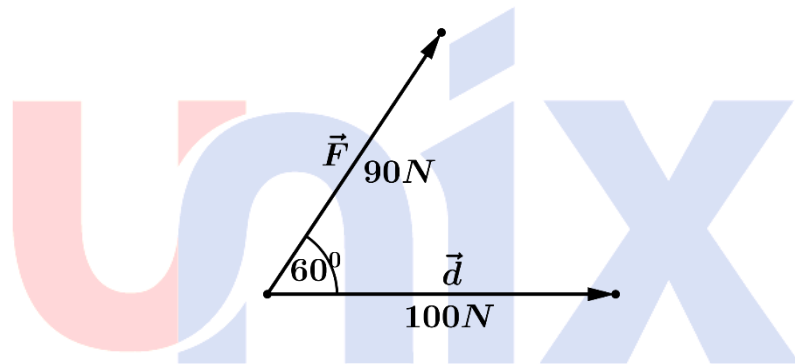
Ta có ΔABC vuông tại A có $AB = \frac{AC}{\tan B} = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$.

$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{4}(-AB \cdot BC \cdot \cos B + AC \cdot BC \cdot \cos C) = \frac{1}{4}(-2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ + 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ) = -2. \end{aligned}$$

Câu 3: Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

Lời giải



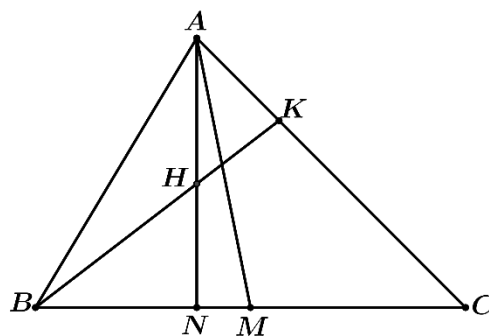
Công sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500 \text{ (J)}$$

Vậy công sinh bởi lực $\vec{F}$ có độ lớn bằng 4500 (J)

Câu 4: Cho đoạn thẳng BC cố định có độ dài bằng 4. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, BM . Trên đường thẳng vuông góc BC tại N lấy điểm A bất kì. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và $BH \cap AC = K$. Giá trị biểu thức $P = MH \cdot BK$ bằng:

Lời giải



Theo giả thiết tam giác AMB cân tại A nên $AB = AM, \widehat{AMH} = \widehat{ABH}$

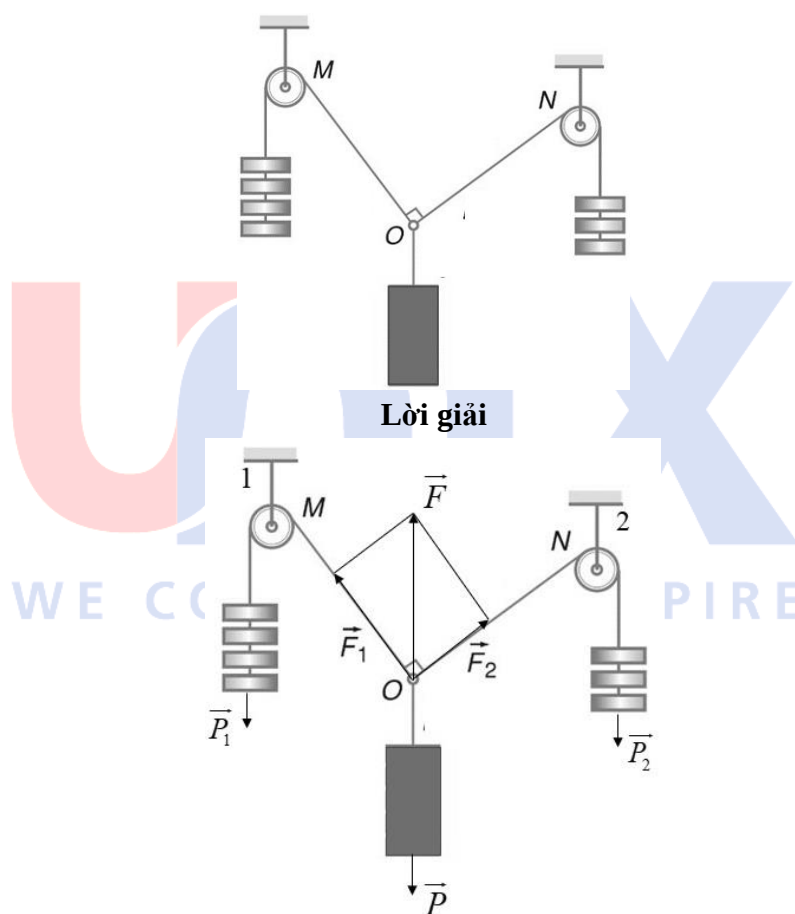
Ta có: $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AH}$

$$\begin{aligned} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA})^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA})\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BA}(2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}) \\ &= \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} = \frac{1}{4}BC^2 = 4(1) \end{aligned}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = MH \cdot MA \cdot \cos \angle AMH = MH \cdot AB \cdot \cos \angle ABH = MH \cdot AB \cdot \frac{BK}{AB} = MH \cdot BK(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MH \cdot BK = 4$

Câu 5: Người ta mắc lệch hai ròng rọc cố định để treo một vật có trọng lượng 200 (N). Biết rằng ở mỗi đầu dây của các ròng rọc người ta đặt các quả cân có trọng lượng 20 (N). Hỏi số quả cân cần thiết để giữ vật cân bằng sao cho hai dây căng vật của hai ròng rọc tạo với nhau một góc 90° (như hình vẽ).



Gọi trọng lượng các quả cân đặt ở các ròng rọc thứ nhất là $\overrightarrow{P_1}$ (tương ứng với m quả cân) và $\overrightarrow{P_2}$ (tương ứng với n quả cân). Các lực căng tạo ra bởi các ròng rọc là $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{P}$ là trọng lượng của vật.

Ta có: $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{P_1}| = 20m$; $|\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{P_2}| = 20n$.

$$|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F}| = |\overrightarrow{P}| = 200 \text{ (N)}$$

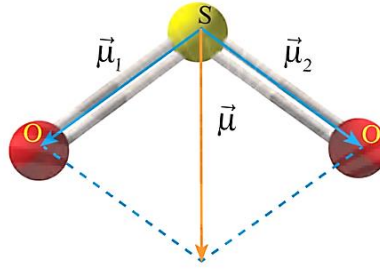
$$\Rightarrow |F_1|^2 + |F_2|^2 = (20m)^2 + (20n)^2 = 200^2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 10^2$$

Vì $m, n \in \mathbb{N}$; $m, n \geq 1 \Rightarrow m, n \in \{6, 8\}$. Vậy số quả cân cần thiết là 14.

Câu 6: Phân tử sulfur dioxide (SO_2) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết $\widehat{OSO}$ gần bằng 120° . Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các vectơ $\overrightarrow{\mu_1}$ và $\overrightarrow{\mu_2}$, có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

là 1,6 đơn vị (Hình 6). Cho biết vector tổng $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử SO_2 . Tính độ dài của $\vec{\mu}$.



Từ điểm cuối của vector $\vec{\mu}_1$ vẽ vector $\vec{\mu}_3 = \vec{\mu}_2$ suy ra $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_3 \Rightarrow |\vec{\mu}| = |\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_3|$

Ta có: $(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2) = 120^\circ \Rightarrow (\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_3) = 60^\circ \Rightarrow |\vec{\mu}|^2 = |\vec{\mu}_1|^2 + |\vec{\mu}_3|^2 - 2|\vec{\mu}_1||\vec{\mu}_3|\cos(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_3) =$
 $1,6^2 + 1,6^2 - 2.1,6.1,6.\cos 60^\circ = \frac{64}{25} \Rightarrow |\vec{\mu}| = \sqrt{\frac{64}{25}} = 1,6$

Vậy độ dài của $\vec{\mu}$ là 1,6 đơn vị

-----HẾT-----

