

Dạng 2: Góc giữa hai vector. Biểu thức tọa độ và tính chất của tích vô hướng

Phương pháp: Sử dụng lý thuyết đã nêu để tính toán

- Để tính góc của hai vector ta sử dụng công thức: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1), \vec{b} = (x_2; y_2)$.

- Tích vô hướng hai vector là $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$
- Góc của hai vector được xác định bởi công thức $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Chú ý: Hai vector $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Để xác định độ dài một vector đoạn thẳng thì ta sử dụng công thức:

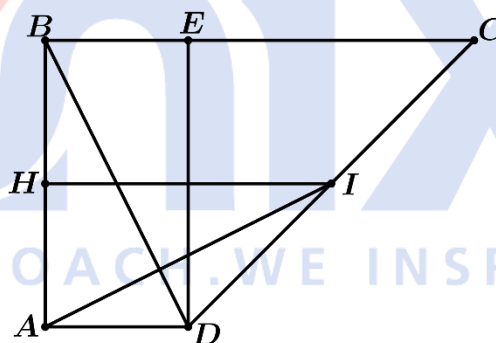
- Nếu $\vec{a} = (x; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Nếu $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Lời giải



Dựng $DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = -|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -DE \cdot DC \cdot \cos 45^\circ = -2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 3|\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos DBE = 3BE \cdot BD \cdot \frac{BE}{BD} = 3a^2$
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$
 $= |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2$

(Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0; \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$).

b) Gọi H trung điểm của AB suy ra HI là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

Do đó $HI = \frac{AD+BC}{2} = 2a$

Ta có $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$

Mặt khác $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 (\text{do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}); \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 (\text{do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

Vậy $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90° .

Bài tập 2: Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Ta có } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3 \Leftrightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 12 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9b^2 = 16 \Leftrightarrow 4 - 12 \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{4}.$$

Bài tập 3: Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2b^2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\bullet \vec{u}^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 1 = 7 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7}$$

$$\bullet \vec{v}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = 1$$

$$\text{Khi đó } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Bài tập 4: Cho tam giác ABC có $A(1; 2), B(-2; 6), C(9; 8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A

b) Tính góc B của tam giác ABC

c) Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB}(-3; 4), \overrightarrow{AC}(8; 6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 0$$

Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{BC}(11; 2), \overrightarrow{BA}(3; -4)$$

$$\text{Suy ra } \cos B = \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{11 \cdot 3 + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{11^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

c) Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu của A lên BC

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AH}(x - 1; y - 2), \overrightarrow{BH}(x + 2; y - 6), \overrightarrow{BC}(11; 2)$$

$$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x - 1) + 2(y - 2) = 0 \text{ hay } 11x + 2y - 15 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương nên } \frac{x+2}{11} = \frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x = \frac{1}{5}, y = \frac{32}{5}$$

$$\text{Vậy hình chiếu của } A \text{ lên } BC \text{ là } H\left(\frac{1}{5}; \frac{32}{5}\right)$$

Bài tập 5: Cho các điểm $A(4\sqrt{3}; -1), B(0; 3), C(8\sqrt{3}; 3)$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC .

b) Tính các góc của tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4\sqrt{3}; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{48 + 16} = 8$; $\overrightarrow{BC} = (8\sqrt{3}; 0) \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$ $\overrightarrow{CA} = (-4\sqrt{3}; -4) \Rightarrow AC = 8$

b) Ta có: $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{128 - 192}{128} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $\hat{A} = 120^\circ$ và vì tam giác cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$.

Bài tập 6: Cho các điểm $A(-1; -1)$, $B(3; 1)$, $C(6; 0)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính góc B và diện tích tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (7; 1)$. Vì $\frac{4}{7} \neq \frac{2}{1}$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{BA} = (-4; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (3; -1)$.

Do đó $\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{(-4) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{-10}{\sqrt{200}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\hat{B} = 135^\circ$.

Hạ đường cao AH ta có $S = \frac{1}{2} BC \cdot AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$.

Bài tập 7: Cho các điểm $A(1; 3)$, $B(4; 2)$.

a) Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox và cách đều hai điểm A và B .

b) Tính chu vi và diện tích tam giác OAB .

Lời giải

a) Vì D nằm trên trục Ox nên $D(x; 0)$.

Ta có $DA = DB \Leftrightarrow DA^2 = DB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 3^2 = (x-4)^2 + 2^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + 9 = x^2 + 16 - 8x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ nên $D(\frac{5}{3}; 0)$.

b) Chu vi tam giác: $OA + OB + OC = \sqrt{1^2 + 3^2} + \sqrt{4^2 + 2^2} + \sqrt{3^2 + 1^2} = 2\sqrt{10} + \sqrt{20} = 2(\sqrt{10} + \sqrt{5})$

Ta có $OA = AB = \sqrt{10}$ và $OB = \sqrt{20} = AC\sqrt{2}$ nên tam giác OAB là tam giác vuông cân tại A .

Vậy diện tích tam giác OAB là $S = \frac{OA \cdot OB}{2} = 5$.

Bài tập 8: Cho ba điểm $A(3; 4)$, $B(2; 1)$ và $C(-1; -2)$. Tìm điểm M nằm trên đường thẳng BC sao cho góc $\widehat{AMB} = 45^\circ$

Lời giải

Giả sử $M(x; y)$ suy ra $\overrightarrow{MA}(3-x; 4-y)$, $\overrightarrow{MB}(2-x; 1-y)$, $\overrightarrow{BC}(-3; -3)$

Vì $\widehat{AMB} = 45^\circ$ suy ra $|\cos \widehat{AMB}| = |\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC})|$

$$\Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3(3-x) - 3(4-y)|}{\sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} \sqrt{9+9}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} = |x+y-7| (*)$$

Mặt khác M thuộc đường thẳng BC nên hai vector $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương

Suy ra $\frac{2-x}{-3} = \frac{1-y}{-3} \Leftrightarrow x = y + 1$ thế vào (*) ta được

$$\sqrt{(2-y)^2 + (4-y)^2} = |2y-6| \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ hoặc } y = 4$$

Với $y = 2 \Rightarrow x = 3$ ta có $\overrightarrow{MA}(0; 2)$, $\overrightarrow{MB}(-1; -1) \Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB} = 135^\circ$ (không thỏa mãn)

Với $y = 4 \Rightarrow x = 5$, $\overrightarrow{MA}(-2; 0)$, $\overrightarrow{MB}(-3; -3) \Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB} = 45^\circ$. Vậy $M(5; 4)$ là điểm cần tìm.

Bài tập 9: Cho 3 điểm $A(1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(-3; 5)$.

a) Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho $P = |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

b) Xác định tọa độ điểm N trên trục tung sao cho $Q = 2|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB}| + 3|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}|$ nhỏ nhất.

Lời giải

a) Gọi $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0)$. Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1 - x_M; 3) \\ \overrightarrow{MB} = (2 - x_M; 4) \\ \overrightarrow{MC} = (-3 - x_M; 5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = (22 + x_M; -10)$$

Biểu thức $P = |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}| = \sqrt{(22 + x_M)^2 + 10^2} \geq 10$.

Dấu "=" xảy ra $22 + x_M = 0 \Leftrightarrow x_M = -22 \Rightarrow M(-22; 0)$.

b) Gọi $N(x_N; y_N)$

Ta có $\overrightarrow{NA} = (1 - x_N; 3 - y_N)$; $\overrightarrow{NB} = (2 - x_N; 4 - y_N)$; $\overrightarrow{NC} = (-3 - x_N; 5 - y_N)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = (5 - 3x_N; 11 - 3y_N)$; $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = (-2 - x_N; 8 - 2y_N)$.

Biểu thức $Q = 2|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB}| + 3|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}|$

$$= 2\sqrt{(5 - 3x_N)^2 + (11 - 3y_N)^2} + 3\sqrt{(-2 - x_N)^2 + (8 - 2y_N)^2}$$

$$= 6 \left[\sqrt{\left(\frac{5}{3} - x_N\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - y_N\right)^2} + \sqrt{(-1 - x_N)^2 + (4 - y_N)^2} \right]$$

 $= 6(KN + HN) \geq 6HK, H\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right), K(-1; 4).$

Nhận xét: H, K nằm về hai phía so với trục Oy nên dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N$ nằm giữa H, K

Gọi $N(0; y)$ $\overrightarrow{KH} = \left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; $\overrightarrow{KN} = (1; y - 4)$ cùng phương $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow y = \frac{31}{8} \Rightarrow N\left(0; \frac{31}{8}\right)$

WE COACH. WE INSPIRE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 180^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$. Mà $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ nên $\cos \alpha = -1$ suy ra $\alpha = 180^\circ$.

- Câu 2:** Tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?
A. 90° . B. $36^\circ 52'$. C. $143^\circ 7'$. D. $53^\circ 7'$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2)$; $\overrightarrow{AC} = (2; -1)$ nên $\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \widehat{BAC} = 143^\circ 7'$.

- Câu 3:** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:
A. $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$. B. $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$. C. $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$. D. $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$.

- Câu 4:** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.
A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Ta có: $|\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16$
 $\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8}$

- Câu 5:** Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Lời giải

Ta có $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\alpha = 45^\circ$.

- Câu 6:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (3; -7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 120^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 135^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4+25} \cdot \sqrt{9+49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ$.

- Câu 7:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (3; -6)$. Góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
A. 0° . **B.** 90° . **C.** 180° . **D.** 60° .

Lời giải

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6)}{\sqrt{2^2+1^2} \cdot \sqrt{3^2+(-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

- Câu 8:** Cho hai vector $\vec{a}; \vec{b}$ khác vector $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vector $\vec{a}; \vec{b}$ là
A. 60° . **B.** 120° . **C.** 150° . **D.** 30° .

Lời giải

Ta có $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$. Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

- Câu 9:** Cho véc tơ $\vec{a}(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b} = (3; y)$ tạo với véc tơ $\vec{a}$ một góc 45°
A. $y = -9$. **B.** $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$. **D.** $y = -1$.

Lời giải

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3-2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9+y^2}}$.

Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3-2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{90+10y^2} = 6-4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4y \geq 0 \\ 90+10y^2 = (6-4y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1$.

- Câu 10:** Cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
A. 120° . **B.** 60° . **C.** 90° . **D.** 30° .

Lời giải

Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
 $\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

- Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào đúng?
A. $\vec{u} = -\vec{v}$. **B.** $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.
C. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. **D.** $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$. Do đó $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- Câu 12:** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .
A. $C(6; 0)$. **B.** $C(0; 6)$. **C.** $C(-6; 0)$. **D.** $C(0; -6)$.

Lời giải

Ta có $C \in Oy \Leftrightarrow C(0; y)$ nên $\overrightarrow{AB} = (-4; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; y - 2)$.

Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow y = 6.$

Vậy $C(0; 6)$.

Câu 13: Cho tam giác ABC có $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .

- A.** $(0; 3)$. **B.** $(0; -3)$. **C.** $(3; 0)$. **D.** $(-3; 0)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (6; -4)$; $\overrightarrow{BC} = (5; -5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1.5 + 1.(-5) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0; 3)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 2)$ và $\vec{v} = (4m; 2m - 2)$. Tìm m để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

- A.** $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -\frac{1}{2}$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Hai vectơ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + 2.(2m - 2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC có $A(-1; 0), B(4; 0), C(0; m), m \neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Xác định m để tam giác GAB vuông tại G .

- A.** $m = -\sqrt{6}$. **B.** $m = \pm 3\sqrt{6}$. **C.** $m = 3\sqrt{6}$. **D.** $m = \pm\sqrt{6}$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right)$; $\overrightarrow{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right)$.

Để tam giác GAB vuông tại G thì $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$.

Câu 15: Cho tam giác ABC có $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$. Diện tích $DABC$ là

- A.** 6. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 3)$

Ta thấy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1; 3)$ và $C(3; 1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

- A.** $A(0; 0)$ hoặc $A(2; -4)$. **B.** $A(0; 0)$ hoặc $A(2; 4)$.
C. $A(0; 0)$ hoặc $A(-2; -4)$. **D.** $A(0; 0)$ hoặc $A(-2; 4)$.

Lời giải

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

$$\begin{aligned} \text{Gọi } A(x; y). \text{ Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } A &\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } A(0; 0) \text{ hoặc } A(2; 4). \end{aligned}$$

Câu 17: Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0; 4), B(3; 4), C(3; 0)$.

- A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Tính được $AB = 3, BC = 4$ và $AC = 5 \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$.

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1; 0); B(-1; 1); C(5; -1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

- A.** $H(-1; -9)$. **B.** $H(-8; -27)$. **C.** $H(-2; 5)$. **D.** $H(3; 14)$.

Lời giải

$$\text{Gọi } H(x; y) \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AH} = (x-1; y); \overrightarrow{BC} = (6; -2); \overrightarrow{BH} = (x+1; y-1); \overrightarrow{AC} = (4; -1).$$

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2y = 0 \\ 4(x+1) - 1(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 6 \\ 4x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -27 \end{cases}.$$

Vậy $H(-8; -27)$.

Câu 19: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy ; cho tam giác ABC có $A(-1; 1), B(1; 3)$ và trọng tâm là $G(-2; \frac{2}{3})$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M .

- A.** $M(0; -3)$. **B.** $M(0; 3)$. **C.** $M(0; 4)$. **D.** $M(0; -4)$.

Lời giải

Ta có G là trọng tâm ΔABC

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3(-2) - (-1) - 1 = -6 \\ y_C = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 - 3 = -2 \end{cases} \\ &\Rightarrow C(-6; -2) \end{aligned}$$

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; m)$

Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có:
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{5}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{BM} = (-1; m - 3); \overrightarrow{CM} = (6; m + 2); \overrightarrow{CB} = (7; 5); \overrightarrow{IM} = \left(\frac{5}{2}; m - \frac{1}{2}\right)$

Tam giác ΔMBC vuông cân tại M khi:
$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 3)(m + 2) - 6 = 0 \\ 5\left(m - \frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 = 0 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \Rightarrow M(0; -3).$$

Câu 20: Trên hệ trục tọa độ xOy , cho tam giác ABC có $A(4; 3), B(2; 7), C(-3; -8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là

- A.** $(1; -4)$. **B.** $(-1; 4)$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(4; 1)$.

Lời giải

Gọi $D(x; y)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC ta có $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và D, B, C thẳng hàng

Mà $\overrightarrow{AD} = (x - 4; y - 3); \overrightarrow{BC} = (-5; -15); \overrightarrow{BD} = (x - 2; y - 7)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} x - 4 + 3(y - 3) = 0 \\ 3(x - 2) - y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Câu 21: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A.** Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 22: Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A.** Đường tròn đường kính IJ . **B.** Đường tròn đường kính IK .
C. Đường tròn đường kính JK . **D.** Đường trung trực đoạn JK .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lại có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$.

Như vậy $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}).(4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK} = 0$.

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (4; 1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

b) $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4$

c) Vector $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi $m = \frac{3}{2}$

d) Tọa độ vector $\vec{d}$ sao cho $\vec{a}.\vec{d} = 4, \vec{b}.\vec{d} = -2$ bằng $(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7})$

Lời giải

a) Sai: Ta có $\vec{a} - \vec{b} = (-6; 2) \Rightarrow \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = -2(-6) + 3.2 = 18$;

b) Đúng: $\vec{a} + \vec{b} = (2; 4); 2\vec{a} - \vec{b} = (-8; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2(-8) + 4.5 = 4$.

c) Đúng: Ta có: $\vec{c} = (m; 1)$ mà do $\vec{c} \perp \vec{a}$ nên $\vec{a}.\vec{c} = 0 \Rightarrow -2m + 3.1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$.

d) Đúng: Gọi $\vec{d} = (x; y)$ nên ta có:
$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{d} = 4 \\ \vec{b}.\vec{d} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = (-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}).$$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (2; 5), \vec{b} = (3; -7), \vec{c} = (1; 1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\vec{a}.\vec{b} = 29$

b) $(\vec{a}, \vec{b}) = 15^\circ$

c) $(\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$

d) Để $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$ tạo với vector $\vec{c}$ một góc 45° thì $x = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{2.3+5(-7)}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{3^2+(-7)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$

Khi đó: $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}|.|\vec{c}|} = \frac{2.1+5.1}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{7\sqrt{58}}{58} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$.

b) Ta có: $\vec{d} = (4x+1; x+4)$ tạo với $\vec{c}$ một góc 45° nên:

$$\cos(\vec{d}, \vec{c}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{4x+1+x+4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4x+1)^2 + (x+4)^2}} = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17x^2 + 16x + 17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 5x+5 = \sqrt{17x^2 + 16x + 17}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 17x^2 + 16x + 17 = 25x^2 + 50x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2 + 34x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Câu 3: Cho tam giác ABC đều và kẻ đường cao AH . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 30^\circ$

b) $(\vec{AH}, \vec{CB}) = 90^\circ$

c) $(\vec{CA}, \vec{BC}) = 120^\circ$

d) $(\vec{AH}, \vec{BA}) = 130^\circ$

Lời giải

a) Sai: Ta có $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \widehat{BAC} = 60^\circ$.

b) Đúng: Ta có $(\vec{AH}, \vec{CB}) = 90^\circ$ do $AH \perp BC$.

c) Đúng: Cách giải 1: Gọi D là điểm đối xứng với B qua C ta có: $\vec{BC} = \vec{CD}$.

Khi đó: $(\vec{CA}, \vec{BC}) = (\vec{CA}, \vec{CD}) = \widehat{ACD} = 120^\circ$.

Cách giải 2: Áp dụng tính chất được rút ra từ định nghĩa:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (-\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, -\vec{b}) \text{ ta được:}$$

$$(\vec{CA}, \vec{BC}) = 180^\circ - (\vec{CA}, \vec{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

d) Sai: Ta có $(\vec{AH}, \vec{BA}) = 180^\circ - (\vec{AH}, \vec{AB}) = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Câu 4: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc B bằng 60° . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

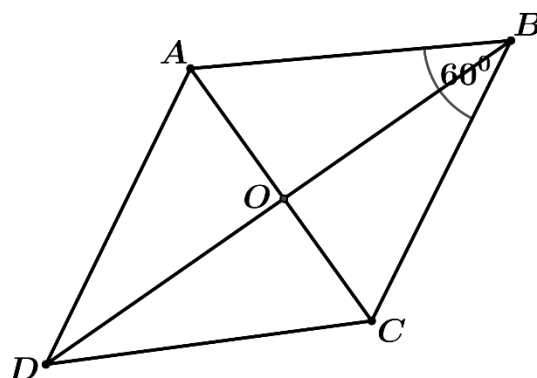
a) $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$

b) $(\vec{AB}, \vec{DA}) = 30^\circ$

c) $\vec{DA} \cdot \vec{DC} = 3$

d) $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = -3$

Lời giải



a) Đúng: Xét hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 120^\circ$

Xét tam giác ABC có $AB = BC = 2, \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều cạnh 2 $\Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

b) Sai: Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 60^\circ$

Khi đó: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 180^\circ - \widehat{BAD} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

c) Sai: Ta có: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = DA \cdot DC \cdot \cos \widehat{ADC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2$

d) Đúng: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = -|\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos \widehat{ABO} = -BO \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = -\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3$.

Câu 5: Cho tam giác đều ABC , đường cao AH . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

c) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$

d) $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$

Lời giải

a) Đúng: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 60^\circ$.

b) Đúng: Dựng hình bình hành $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Suy ra: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

c) Đúng: Tam giác ABC đều nên $AH \perp BC$ suy ra $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$

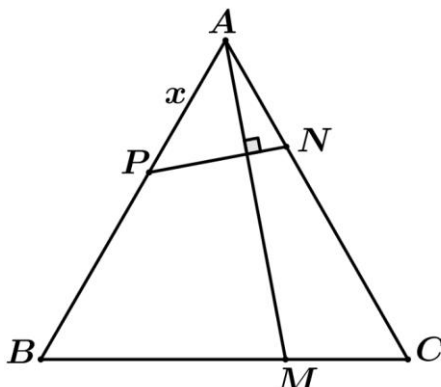
d) Sai: Dựng hình bình hành $ABEH$ ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE}$.

Suy ra: $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HE}) = \widehat{AHE} = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tam giác ABC đều cạnh 1. Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP (kết quả làm trong đến hai chữ số thập phân).

Lời giải



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$ thì ta có $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3a}(-3x\vec{b} + a\vec{c})$$

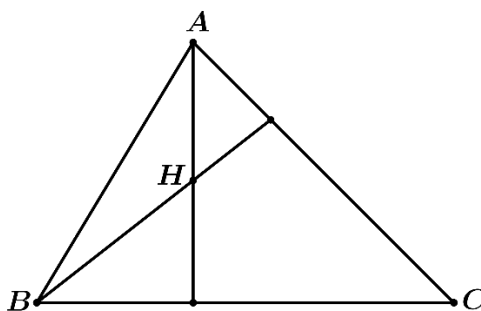
Theo yêu cầu bài toán ta có $AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c})(-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$

$$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}.$$

Khi đó $x = 0,83$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Biết $A(3; -1), B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$ là trọng tâm tam giác ABC . Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a; b)$. Tính $a + 3b$.

Lời giải



Giả sử $C(x_C; y_C)$ và $H(x_H; y_H)$. Và có I là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1; -4)$$

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2; -6)$ và $\overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

Do H là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0), B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AH} = (a + 3; b), \overrightarrow{BC} = (-1; 6), \overrightarrow{BH} = (a - 3; b), \overrightarrow{AC} = (5; 6)$.

Vì H là trực tâm $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow a + 6b = 7$.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(3; 1)$. Giả sử $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a - 3; -1), \overrightarrow{MB} = (-3; b - 1)$.

Tam giác MAB là tam giác vuông tại M khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -3(a - 3) - (b - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a (*)$$

Với $a \geq 0, b \geq 0$ suy ra $0 \leq a \leq \frac{10}{3} (**)$

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB = \frac{1}{2} \sqrt{(a - 3)^2 + 1} \cdot \sqrt{9 + (b - 1)^2} = \frac{3}{2} (a^2 - 6a + 10) = \frac{3}{2} (a - 3)^2 + \frac{3}{2}$$

$$\geq \frac{3}{2}$$

Do đó $\min S_{MAB} = \frac{3}{2}$ đạt được khi $a = 3$ khi đó $b = 1$. Vậy $T = a^2 + b^2 = 10$.

Câu 5: Mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các điểm $A(1; 3), B(-2; 3), C(-2; 1)$. Điểm $M(a; b)$ thuộc đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ Oxy sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị biểu thức $S = 12a - 8b$.

Lời giải

Gọi $I(x; y)$ sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = (-9 - 6x; 12 - 6y) \Leftrightarrow \begin{cases} -9 - 6x = 0 \\ 12 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$ suy ra

$$I\left(-\frac{3}{2}; 2\right).$$

Ta có $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| = 6|\overrightarrow{MI}| = 6MI$

Đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ Oxy có phương trình $y = -x$.

Điểm $M(a; b)$ thuộc đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ Oxy nên có tọa độ dạng $M(a; -a)$ trong đó $b = -a$.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của $I\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ lên đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ Oxy .

Khi đó: $\overrightarrow{IM} \perp \vec{v}$ trong đó $P(-1; 1)$ thuộc đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ Oxy và $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (-1; 1)$.

Ta có $I\left(-\frac{3}{2}; 2\right), M(a; -a) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(a + \frac{3}{2}; -a - 2\right)$.

Do đó: $\overrightarrow{IM} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot \left(a + \frac{3}{2}\right) + 1 \cdot (-a - 2) = 0 \Leftrightarrow -2a = \frac{7}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{7}{4} \Rightarrow b = \frac{7}{4}$.

Vậy $S = 12 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) - 8 \cdot \frac{7}{4} = -35$.

Câu 6: Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 (km/h) thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 (km/h). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

Lời giải

Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc của máy bay khi không có gió là $|\vec{v}_0| = 650$ (km/h)

Gọi $\vec{v}_1$ là vận tốc của gió thì $|\vec{v}_1| = 35$; $\vec{v}_2$ là vận tốc của máy bay khi có gió.

Ta có: $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ mà theo giả thiết $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2^2 &= (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_0^2 + \vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45^\circ \\ &= 650^2 + 35^2 + 2 \cdot 650 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36 \text{ suy ra } |\vec{v}_2| \approx 675,2 \text{ (km/h).} \end{aligned}$$

-----HẾT-----

WE COACH.WE INSPIRE