



CHƯƠNG

3

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

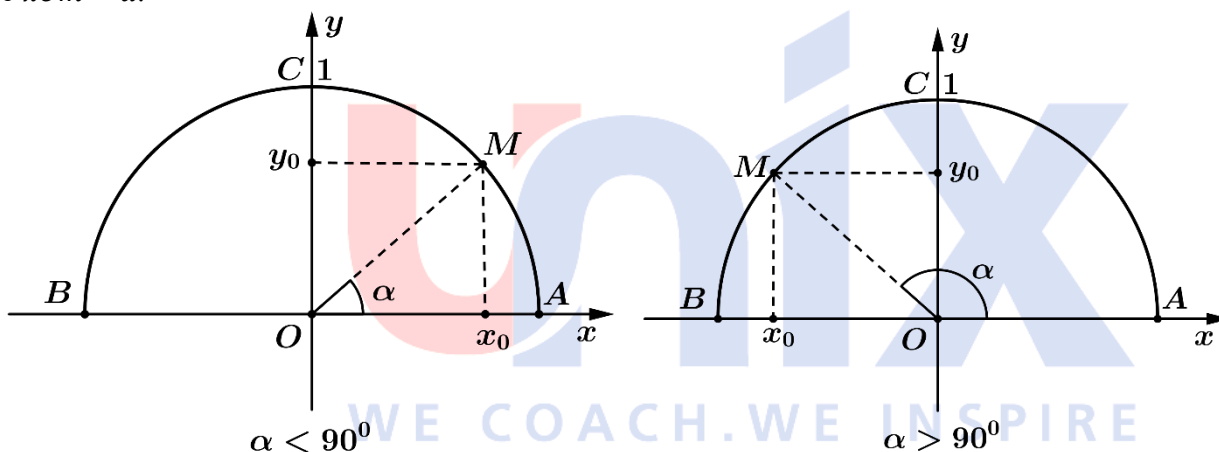
BÀI 01 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giá trị lượng giác của một góc

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R=1$ nằm phía trên trục hoành như hình dưới đây được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Cho trước một góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Khi đó có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\widehat{xOm} = \alpha$.



Với mỗi góc $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOm} = \alpha$. Khi đó:

- sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M được kí hiệu là $\sin \alpha$
- cosin của góc α là hoành độ x_0 của điểm M được kí hiệu là $\cos \alpha$
- Khi $\alpha \neq 90^\circ$ (hay là $x_0 \neq 0$), tang của α là $\frac{y_0}{x_0}$ được kí hiệu là $\tan \alpha$
- Khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ (hay là $y_0 \neq 0$) cotang của α là $\frac{x_0}{y_0}$ được kí hiệu là $\cot \alpha$.

Từ định nghĩa trên ta có:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ \text{ và } \alpha \neq 180^\circ); \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\})$$

Sau đây là bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt nên nhớ.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
GTLG						
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1



$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\parallel$

2 Mỗi quan hệ giữa các giá trị lượng giác

Hai góc bù nhau:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

- Hai góc phụ nhau:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

3 Các hệ thức lượng giác cơ bản

$$\square \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$\square \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$\square \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$\square \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\square 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$\square 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính các giá trị của biểu thức lượng giác

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

Bài tập 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \tan 30^\circ + \cot 30^\circ$

b) $B = \sin^2 45^\circ - 2\sin^2 50^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 40^\circ + 4\tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

c) $C = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

d) $D = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

e) $E = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$

f) $F = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

g) $G = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$



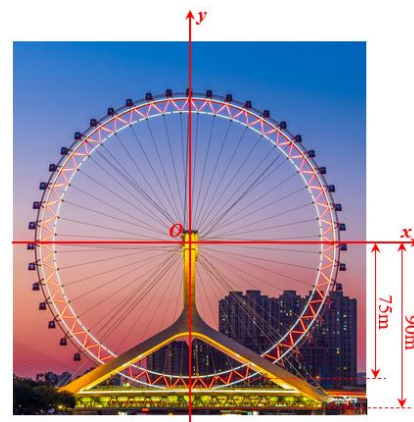
h) $H = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

i) $I = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$

j) $J = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \tan 58^\circ + \frac{5 \tan^2 18^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$

k) $K = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \cos^2 17^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$

Bài tập 3: Một chiếc đu quay có bán kính 75m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m như hình vẽ dưới đây. Thời gian thực hiện mỗi vòng quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay thì sau 20 phút quay người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.

B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$.

D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3} \sin 150^\circ + \cos 135^\circ - \sin 120^\circ$ ta được

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $-\sqrt{2}$.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3: Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 4: Tổng $\sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \sin^2 7^\circ + \dots + \sin^2 83^\circ + \sin^2 85^\circ + \sin^2 87^\circ$ bằng

A. 21.

B. 23.

C. 22.

D. 24.

Câu 5: Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Câu 6: Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 1.

D. -1.

Câu 7: Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 x} + 3 - 2 \tan^2 x$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 9: Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

A. 1.

B. 2.

C. -2.

D. -1.

Câu 10: Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin x \cos x$ bằng

A. $-\frac{5}{18}$.

B. $-\frac{5}{9}$.

C. $\frac{5}{18}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Câu 11: Cho $\tan x - \cot x = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x + \cot^2 x$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. 6.

D. 2.

Câu 12: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 13: Biểu thức $\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$ không phụ thuộc vào a và có giá trị bằng

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.



Câu 14: Cho $H = \cos(x + 60^\circ) - 5\cos(120^\circ - x) - 6.\sin(x + 60^\circ).\cot(x + 60^\circ)$ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $H = -1$. B. $H = \frac{1}{3}$. C. $H = \frac{\pi}{3}$. D. $H = 0$.

Câu 15: Cho $D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $D = 0$. B. $D = 8$. C. $D = 2022$. D. $D = 18$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $A = \tan 2^\circ \tan 3^\circ \tan 4^\circ \dots \tan 87^\circ \tan 88^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Góc có số đo 2° và góc có số đo 88° là hai góc phụ nhau.
b) Biểu thức A được đưa về dạng $A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$
c) Ta có $\tan 88^\circ = \cot 2^\circ$.
d) Giá trị của biểu thức A bằng 2.

Câu 2: Cho $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Xét biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi góc a, b ta luôn có $\sin^2 a + \cos^2 b = 1$.
b) Biểu thức $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ được viết lại $2\sin a \cos a = 1$
c) Biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$ được viết lại $P = 1 - 2\sin a \cos a$
d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ và biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi góc α ta luôn có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.
b) Với mọi góc α ta luôn có $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha$.
c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2$.
d) Biểu thức $P = 7$ khi và chỉ khi $m = \pm 3$.

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = \sin x \cdot \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
b) $2M = (\sin x + \cos x)^2 - 1$
c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2$.
d) Khi $M = \frac{1}{4}$ thì $m = \frac{3}{4}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức: $P = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$.

Câu 2: Giá trị của biểu thức $P = 5(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4\sin^2 x \cos^2 x$ bằng

Câu 3: Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + (\tan \alpha + \cot \alpha)^2$

Câu 4: Cho các góc α, β thỏa mãn $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ và $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^6 \alpha + \sin^6 \beta + 3\sin^2 \alpha \sin^2 \beta$.

Câu 5: Xạ phẫu Gamma Knife là phương pháp điều trị u não (không cần mở hộp sọ) bằng cách sử dụng bức xạ gamma tập trung, hội tụ chính xác vào tổn thương, không làm hại mô lành. Nếu khối u của bệnh nhân cách mặt da 6,3 cm, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u 9 cm để tránh làm tổn thương mô thì góc tạo bởi chùm tia với mặt da là β . Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \beta$

Câu 6: Cho $\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \tan^n x$ và $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^n x + \cos^n x$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



- Câu 7:** Guồng nước (cồn nước) được biết đến là một công cụ đặc lực trong sản xuất nông nghiệp của bà con dân tộc Thái ở nước ta. Chiếc guồng được cấu tạo giống như bánh xe đạp, có đường kính 10m. Tâm quay ở độ cao 6,5m. Nan hoa làm bằng loại tre già, có sức chịu đựng trong môi trường ẩm ướt. Vành guồng rộng 50cm, được đặt các phen nửa để cản nước, tạo lực đẩy guồng quay và có gắn các ống bương (lùng) buộc chéo khoảng 30 độ để mức đầy nước khi chìm xuống. Lực đẩy của nước khiến guồng quay liên tục, đến tầm cao nhất định, thì các ống bương bắt đầu đổ nước vào các máng dài. Biết thời gian cồn nước thực hiện 1 vòng quay là 3 phút. Máng nước cao 11m. Nếu một ống bương đang ở vị trí thấp nhất thì thời gian nó di chuyển đến vị trí máng nước là?



Dạng 2: Cho một giá trị lượng giác. Tính các giá trị còn lại

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

- Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$
- Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\tan \alpha$
- Cho α là góc tù và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính giá trị của biểu thức $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$

Bài tập 2: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

- Biết $\cot \alpha = -a$, $a > 0$. Tính $\cos \alpha$
- Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$
- Cho $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $P = 2\cos^2 \alpha + 5\sin \alpha \cos \alpha + 1$
- Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

Bài tập 3: Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

Bài tập 4: Cho $\tan a = -3$ ($0^\circ \leq a \leq 180^\circ$). Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 2\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + 4\cos^2 a}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- A. $\cot \alpha = 2$. B. $\cot \alpha = \sqrt{2}$. C. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. D. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = 3\cot \alpha + 4\tan \alpha$ là

- A. 7. B. $-7\sqrt{2}$. C. $7\sqrt{2}$. D. -7.



Câu 3: $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu nếu $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$?

- A. $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 4: Nếu $\tan \alpha = 3$ thì $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 5: Cho $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của biểu thức $A = |\sin \alpha - \cos \alpha|$ là

- A. $\frac{\sqrt{21}+2}{25}$. B. $\frac{\sqrt{21}-2}{5}$. C. $\frac{\sqrt{21}+2}{5}$. D. $\frac{\sqrt{21}-2}{25}$.

Câu 6: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $E = \tan \alpha + \cot \alpha$ là

- A. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 7: Cho $\cot \alpha = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + 3 + \tan^2 \alpha$ bằng

- A. $\frac{23}{2}$. B. $\frac{23}{4}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 23.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 9: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Biểu thức: $P = \frac{\cos \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{15}{16}$. B. $\frac{15}{4}$. C. $\frac{15}{64}$. D. $\frac{15}{8}$.

Câu 10: Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos x$ bằng

- A. $-\frac{31}{34}$. B. $\frac{31}{34}$. C. $\frac{31}{18}$. D. $-\frac{31}{18}$.

Câu 11: Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \cot^2 x + \cos^2 x$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{5}{4}$. D. 5.

Câu 12: Cho $8\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1 = 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ bằng

- A. $\frac{113}{120}$. B. $\frac{113}{60}$. C. $\frac{120}{113}$. D. $\frac{60}{113}$.

Câu 13: Biết α là một góc từ 0° đến 180° thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{5}{2}$ và $\sin \alpha > \cos \alpha$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. D. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Câu 14: Biết α là một góc từ 0° đến 180° thỏa mãn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{5}$ và $\tan \alpha < 1$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. C. $\tan \alpha = 2$. D. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 15: Cho α là góc nhọn và thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $M = \frac{\tan \alpha - 3\cot \alpha + 2}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ là

- A. $\frac{2\sqrt{2}-23}{9}$. B. $\frac{4\sqrt{2}+23}{9}$. C. $\frac{4\sqrt{2}+25}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{2}-23}{9}$.



Câu 16: Cho α là góc tù và $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{4}{5}$. Giá trị của $M = \sin \alpha - 2\cos \alpha$ là

A. $M = \frac{12 - \sqrt{34}}{10}$. B. $M = \frac{4 - 3\sqrt{34}}{10}$. C. $M = \frac{12 + \sqrt{34}}{10}$. D. $M = -\frac{4 + 3\sqrt{34}}{10}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $0 < \cos \alpha < 1$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. b) $\sin \alpha$ được đưa về dạng $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.
 c) Giá trị của $\cot \alpha$ bằng $-\frac{\sqrt{5}}{2}$. d) Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \tan^2 \alpha$ bằng 2.

Câu 2: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Xét biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 4$
 b) Biểu thức $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$ được đưa về dạng $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.
 c) Biểu thức P được viết lại $P = 1 + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
 d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\tan \alpha > 0$.
 b) $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0$ được viết lại $(\tan \alpha - 2)(\tan \alpha - 3) = 0$
 c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$.
 d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{91}{9}$.

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

- a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 b) $M^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 4\sin \alpha \cos \alpha$
 c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2$.
 d) Giá trị của biểu thức M bằng $-m^2 - 1$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{9(\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha)}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Câu 2: Biết $\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha + 2 = 0$, ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3}\tan \alpha + \sqrt{3}\cot \alpha$ bằng

Câu 3: Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước với độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m \right) 180^\circ \right) \right| . 23,5^\circ$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \leq N \leq 172$, $m = 1$ nếu $173 \leq N \leq 355$, $m = 2$ nếu $356 \leq N \leq 365$.

Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không



nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20^\circ$ là a° (Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5^\circ$). Tính giá trị của biểu thức $P = \tan a + \cot a$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Câu 4: Một quả bóng Golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng cách d (mét) theo phương nằm ngang. Biết rằng $d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$ trong đó $v_0 (m/s)$ là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và φ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang. Tính giá trị của $\cos 2\varphi$, khi $v_0 = 15 (m/s)$, $g = 10 (m/s^2)$, $d = 18 (m)$.

Câu 5: Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất $25 (m)$ tại một góc ngắm α (góc hợp bởi phương ngắm với phương ngang). Nếu giảm góc ngắm đi một nửa thì vận động viên bắn trúng mục tiêu cách mặt đất $10 (m)$ thì khoảng cách từ vận động viên đến bức tường bằng $10\sqrt{5} (m)$. Tính giá trị của $P = 3\cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Câu 6: Cho b, c là các số nguyên khác 0, $c \neq 2025$ và $\tan x = \frac{2b}{2025 - c}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2025\cos^2 x + 2b\sin x \cdot \cos x + c\sin^2 x$.

Dạng 3: Rút gọn các biểu thức lượng giác

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

b) $B = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$

c) $C = \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a$

d) $D = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 3\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + \cos^2 a}$

e) $E = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x + \cot x}$

b) $B = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + (\tan x - \cot x)^2 + 1$

c) $C = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$

d) $D = \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x}$

e) $E = \frac{\cos^3 x + 2\cos^2 x \sin x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^3 x}{(\tan x - \cot x)(\cos x + 2\sin x)}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây là sai?

A. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$.

B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$.

D. $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

Câu 2: Biểu thức $(\cot a + \tan a)^2$ bằng

A. $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}$.

B. $\cot^2 a + \tan^2 a$.

C. $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$.

D. $\cot^2 a \tan^2 a + 2$.



- Câu 3:** Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được
 A. $\sin x$. B. $\frac{1}{\cos x}$. C. $\frac{1}{\sin x}$. D. $\cos x$.
- Câu 4:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$ ta được
 A. $P = \frac{1}{2} \tan x$. B. $P = \frac{1}{2} \cot x$. C. $P = 2 \cot x$. D. $P = 2 \tan x$.
- Câu 5:** Rút gọn biểu thức $A = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^6 x - \cos^6 x$ ta được
 A. $\sin x \cos x$. B. $\sin^2 x \cos^2 x$. C. $-\sin x \cos x$. D. $-\sin^2 x \cos^2 x$.
- Câu 6:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1}$ ta được
 A. 1. B. 2. C. -1. D. -2.
- Câu 7:** Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{-\sin^2 x + 4 \cos x + 5} - 2$ ta được
 A. $\cos x$. B. $-\cos x$. C. $4 + \cos x$. D. $\cos x + 2$.
- Câu 8:** Đơn giản biểu thức $P = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\cot x} + \frac{3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)}{(\sin x - \cos x)^2 - 1}$ ta được
 A. $\frac{1}{\sin x \cos x}$. B. $\frac{1}{2 \sin x \cos x}$. C. $-\frac{1}{\sin x \cos x}$. D. $-\frac{1}{2 \sin x \cos x}$.
- Câu 9:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos x}{\tan x + \cot x} + \cos x \sin^2 x$ ta được
 A. $\sin x$. B. $\cos x$. C. $\tan x$. D. $\cot x$.
- Câu 10:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{2 \sin(180^\circ - x) \sin(90^\circ - x)}{\tan x + \cot x} + \sin^4 x + \cos^4 x$ ta được
 A. 1. B. 2. C. -2. D. 3.
- Câu 11:** Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$ ta được
 A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.
- Câu 12:** Đơn giản biểu thức $P = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được
 A. $\frac{1}{\cos x}$. B. $\tan x$. C. $\frac{1}{\sin x}$. D. $\cot x$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x}{\tan x - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$.

b) Biểu thức $A = \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x$ được viết lại $A = \frac{\tan^2 x + 3 \tan x - 4}{1 + \tan^2 x}$.

c) Rút gọn biểu thức P ta được $P = \frac{\tan x + 4}{1 + \tan^2 x}$

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$ khi $\cos x = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho biểu thức $P = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x) - (\sin^8 x + \cos^8 x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) Biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$ được viết lại $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$
 b) Biểu thức $\sin^8 x + \cos^8 x$ được đưa về dạng $1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cos^4 x$.
 c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = 2(1 - \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 1 + 4\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^4 x \cos^4 x$
 d) Rút gọn P ta được $P = 1$.

Câu 3: Cho $A = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan^2 x \sin^2 x}$ và biểu thức $B = 1 + 2\cot^3 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Biểu thức $(\sin x + \cos x)^2$ bằng $1 - 2\sin x \cos x$.
 b) $\tan^2 x - \sin^2 x$ được viết lại $\tan^2 x \sin^2 x$
 c) Biểu thức A được đưa về dạng $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x}$.
 d) Biểu thức A bằng B .

Câu 4: Cho $P = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 4\sin x \cos x - 3}{\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x + 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 + 2\sin^2 x \cos^2 x$
 b) $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1$ được đưa về dạng $\sin x \cos x$
 c) Biểu thức P được đưa về dạng $-2\sin x \cos x - 2$.
 d) Khi $\cos x = \frac{1}{3}$ thì giá trị của biểu thức P bằng $-\frac{4\sqrt{2}}{9} - 2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Biết tồn tại số thực $a = a_0$ sao cho $P = P_0$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn hệ thức:

$$(9\sin^2 a - 6\sin a)^2 - (11 + 2P)(9\sin^2 a - 6\sin a) + P^2 + 11P - 80 = 0. \text{ Tính giá trị của biểu thức } M = (2P_0 + 8) \cdot \tan^2 a_0 + 9P_0 \cdot \cos^2 a_0.$$

Câu 2: Biết rằng biểu thức $P = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}} - \frac{8}{\tan x} + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

tại $x = \alpha$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{7\sin \alpha - 7\cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

Câu 3: Cho biểu thức $A = \frac{\sin^8 \alpha}{8} + \frac{\cos^8 \alpha}{27}$. Biết $\frac{\sin^4 \alpha}{2} + \frac{\cos^4 \alpha}{3} = \frac{1}{5}$. Tính giá trị $5A$

Câu 4: Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$.

Câu 5: Cho góc x thỏa mãn $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Khi đó $P = |\sin x - \cos x| = \sqrt{\frac{a}{b}}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

Câu 6: Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$