

MỤC LỤC

▣ BÀI ③. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO	2
*. Đề kiểm tra rèn luyện	2
♦ Đề ①:	2
♦ Đề ②:	10
♦ Đề ③:	18

***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Khẳng định nào **sai**?

- A. $1.\vec{a} = \vec{a}$
- B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$
- C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$
- D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

Lời giải

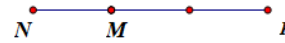
Chọn C

(Dựa vào định nghĩa tích của một số với một vectơ)

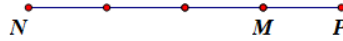
Câu 2: Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



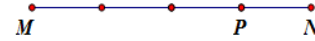
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3
- B. Hình 4
- C. Hình 1
- D. Hình 2

Lời giải

Chọn A

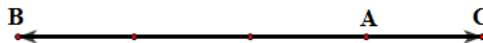
$$\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \text{ ngược hướng với } \overrightarrow{MP} \text{ và } |\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{MP}|.$$

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$
- B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$
- C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$
- D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn D

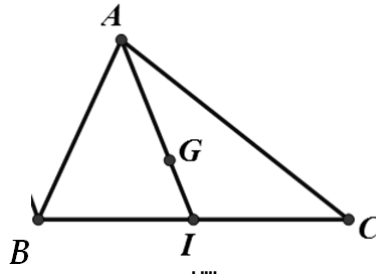


Câu 4: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng

- A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$
- B. $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$
- C. $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$
- D. $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

Lời giải

Chọn A



Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vector $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

Câu 5: Cho hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G' . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = 3\overrightarrow{GG'}$

B. $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$

C. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'}$

D. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Câu 6: Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA'}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} \end{aligned}$$

Câu 7: Cho $\triangle ABC$ và một điểm M tùy ý. Chọn hệ thức đúng?

A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$

B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

Lời giải

Chọn C

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

Câu 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$, I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$

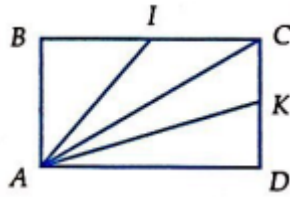
B. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$

D. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn D



$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

Câu 9: Cho hai điểm A và B . Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

- A. Điểm I ngoài đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$
- B. Điểm I thuộc đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$
- C. Điểm I là trung điểm đoạn AB
- D. Điểm I nằm khác phía với B đối với A và $IB = \frac{1}{3}AB$.

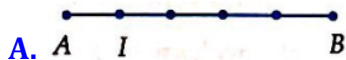
Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}.$$

Vậy I thuộc đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$.

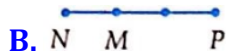
Câu 10: Cho đoạn thẳng AB . Hình nào sau đây biểu diễn điểm I sao cho $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.



Lời giải

Chọn B

Câu 11: Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Hình vẽ nào sau đây xác định đúng vị trí điểm M .



Lời giải

Chọn C

Ta có: $MN = 3MP$ và P, N khác đối với M

Câu 12: Cho đoạn thẳng AB và điểm M là một điểm trong đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k để

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}.$$

A. $k = \frac{1}{4}$

B. $k = 4$

C. $k = -\frac{1}{4}$

D. $k = -4$

Lời giải

Chọn C

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình bình hành $ABCD$ và các điểm M, N, P thỏa mãn

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}. \text{ Khi đó:}$$

a) $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$

c) $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

d) Ba điểm M, N, P thẳng hàng.

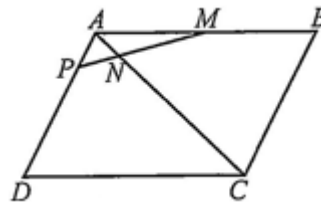
Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Sai

d) Đúng



Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}.$

Suy ra $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ cùng phương.

Vậy ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 2: Cho ngũ giác $ABCDE$. Các điểm M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn EA, AB, BC, CD, MP, NQ . Khi đó:

a) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ})$

b) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED}.$

c) RS cắt ED

d) $RS = \frac{1}{4}ED$

Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Sai

d) Đúng

Ta có: $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{ED}$.

Vậy $RS // ED$ và $RS = \frac{1}{4}ED$.

Câu 3: Cho bốn điểm A, B, C, D có M, N là trung điểm của AB, CD . Khi đó:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$

d) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

a) Đúng

b) Đúng

c) Sai

d) Đúng

Do M và N là trung điểm của AB, CD nên ta có các đẳng thức:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.

Ta lại có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{cases}$

Cộng hai đẳng thức trên về theo về, ta chứng minh được $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua G, M là trung điểm của BC . Khi đó:

a) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}$

b) $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{MD} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

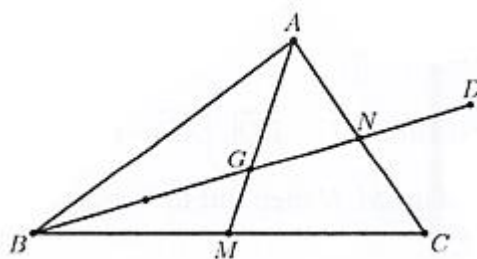
Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Sai

d) Đúng



Ta có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{4}{3} \overrightarrow{BN}$

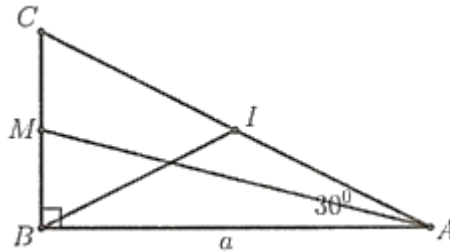
Ta có: $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AM} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{2}{3} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN})$
 $= -\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = -\frac{5}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC}$.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại B có $\hat{A} = 30^\circ$, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC . Hãy tính: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$

Trả lời: $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại B : $\tan A = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \cdot \tan A = a \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

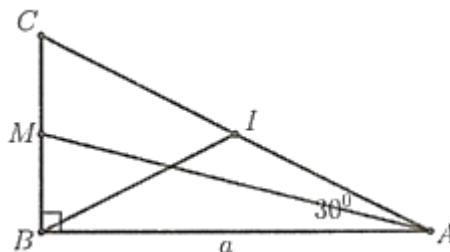
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2BI = 2 \cdot \frac{AC}{2} = AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại B có $\hat{A} = 30^\circ$, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC . Hãy tính: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Trả lời: $\frac{a\sqrt{39}}{3}$

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại B : $\tan A = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \cdot \tan A = a \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Gọi M là trung điểm của BC , ta có:

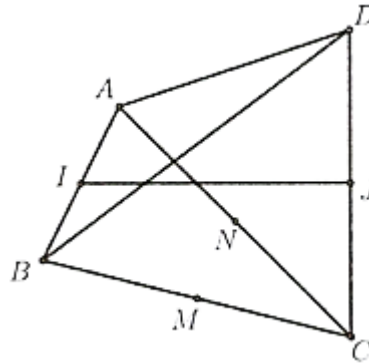
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| &= |2\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} \\ &= 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}. \end{aligned}$$

Câu 3: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và $IJ = \frac{5}{4}$.

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC . Tính $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CI}|$?

Trả lời: 0

Lời giải



Ta có: $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (1), $2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (2), $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ (3). Cộng theo vế (1), (2), (3): $2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CI}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$. Do vậy $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CI}| = 0$.

Câu 4: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý, G là trọng tâm tam giác ABC . Điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định. Khi đó điểm cố định đó là điểm nào?

Trả lời: trung điểm AG

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 6\overrightarrow{MI}$

(với I là trung điểm AG).

Vậy hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MI}$ cùng phương nên ba điểm M, N, I thẳng hàng.

Do đó đường thẳng MN luôn qua điểm I cố định.

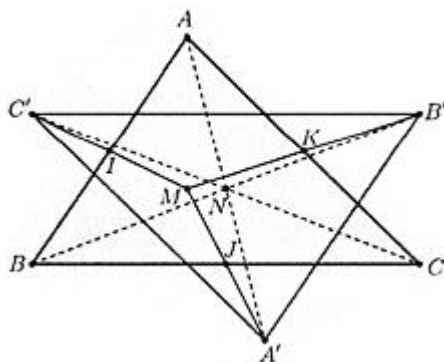
Câu 5: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, AC . Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm J, K, I của cạnh BC, AC, AB .

Biết ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm (đặt điểm đó là N).

Khi đó MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động. Vậy điểm cố định đó là điểm nào?

Trả lời: trọng tâm tam giác ABC

Lời giải



Xét tứ giác $MBA'C$ có hai đường chéo $BC, A'M$ cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường nên $MBA'C$ là hình bình hành, suy ra: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'}$ (1); mặt khác $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MN}$ (2).

Cộng theo vế (1) và (2):

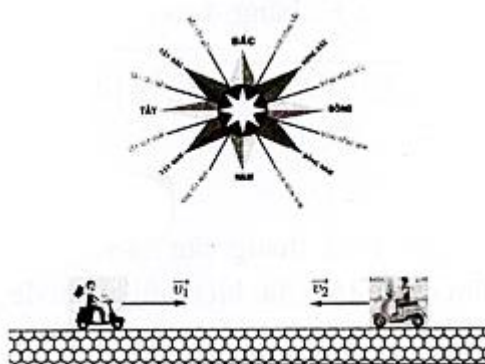
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MN} \quad (3).$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (4).

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } 2\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}.$$

Vậy MN luôn đi qua điểm G cố định khi M di động.

Câu 6: Một người đi xe máy từ Tây sang hướng Đông với vận tốc 40 km/h được biểu thị bởi vector $\vec{v}_1$, một người khác đi xe máy từ hướng Đông sang hướng Tây với vận tốc 60 km/h được biểu thị bởi vector $\vec{v}_2$. Hãy biểu diễn vector $\vec{v}_2$ theo $\vec{v}_1$.



$$\text{Trả lời: } \vec{v}_2 = -\frac{3}{2}\vec{v}_1$$

Lời giải

Ta có: $\vec{v}_2$ ngược hướng với $\vec{v}_1$ và có độ lớn bằng $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ lần độ lớn vector $\vec{v}_1$.

$$\text{Vì vậy } \vec{v}_2 = -\frac{3}{2}\vec{v}_1.$$

♦Đề 2:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$ C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$ D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$ B. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$ C. $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$ D. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -4\vec{a} - 3\vec{a} = -7\vec{a}$.

Câu 3: Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

- A. $m = 3$ B. $m = -\frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = -3$

Lời giải

Chọn B

Do $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng nên $m = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm của BC
B. M là trung điểm của IC
C. M là trung điểm của IA
D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$

Lời giải

Chọn B

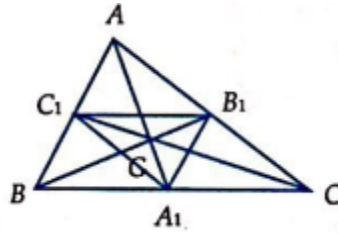
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của IC .

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chọn đẳng thức sai.

- A. $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ C. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC_1}$

Lời giải

Chọn D



Câu 6: Cho $\triangle ABC$ với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp trọng tâm. Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (1)

Gọi I là trung điểm BC , A' đối xứng với A qua O .

Dễ thấy $HBA'C$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}.$$

Câu 7: Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$ B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ D. $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} &+ \text{ B đúng vì } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = 2\overrightarrow{IJ} \end{aligned}$$

$$+ \text{ C đúng vì } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$+ \text{ D đúng vì } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

Câu 8: Cho $\triangle ABC$, M là một điểm trên cạnh BC . Khi đó đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{BM} = \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{MB}{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- C. $3\overrightarrow{CM} = \frac{MB}{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ D. $2\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

Lời giải

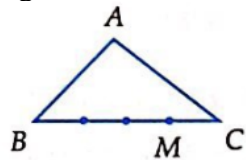
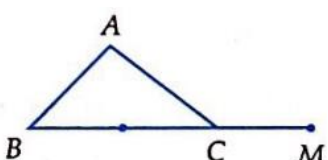
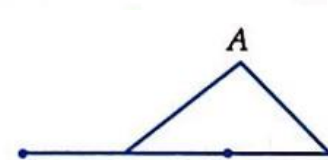
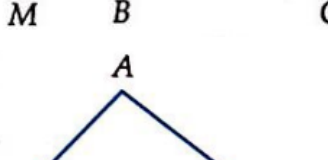
Chọn A

Kẻ $MN \parallel AC, N \in AB$.

$$\text{Áp dụng định lí Ta-lét ta có } \overrightarrow{AN} = \frac{AM}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{NM} = \frac{NM}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Câu 9: Cho $\triangle ABC$. Trên đường thẳng BC lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Điểm M được vẽ đúng trong hình nào sau đây?

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Lời giải

Chọn B

Câu 10: Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. Điểm M là trung điểm cạnh AC .
- B. Điểm M là trung điểm cạnh GC .
- C. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số 4.
- D. Điểm M chia đoạn GC thỏa mãn $\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM} \end{aligned}$$

Câu 11: Cho $\triangle ABC$, I là trung điểm của AC . Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức:

- A. $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ B. $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$ C. $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ D. $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BI}$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} &= \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} &= -\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NI} = -\overrightarrow{NB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} \end{aligned}$$

Câu 12: Cho 2 điểm A, B là hai số thực a, b sao cho $a + b \neq 0$. Xét các mệnh đề:

(I) Tồn tại duy nhất một điểm M thỏa mãn $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

(II) $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$.

(III) M là điểm nằm trên đường thẳng AB .

Trong các mệnh đề trên thì:

A. (I) và (III) tương đương nhau

B. (II) và (III) tương đương nhau

C. (I) và (II) tương đương nhau

D. (I), (II), (III) tương đương nhau

Lời giải

Chọn C

$$a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$$

Do giả thiết M được xác định duy nhất trên đường thẳng AB .

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BN, CP . Khi đó:

a) G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN}$

c) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BN} - \frac{2}{3} \overrightarrow{CP}$

d) $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{CP} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BN}$.

Lời giải

a) Đúng

b) Đúng

c) Sai

d) Đúng

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$

Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BN} - \frac{2}{3} \overrightarrow{CP}$$

$$= -\frac{4}{3} \overrightarrow{BN} - \frac{2}{3} \overrightarrow{CP}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{CP} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BN}.$$

Câu 2: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O, M là một điểm bất kỳ. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

Lời giải

a) Đúng**b) Đúng****c) Sai****d) Đúng**

Ta có: $\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 5\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
 $= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$
 $= 4\overrightarrow{MO} + \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})}_0 + \underbrace{(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})}_0 = 4\overrightarrow{MO}$.

Câu 3: Cho tứ giác $OABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Khi đó:

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$;

c) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$;

d) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$.

Lời giải**a) Sai****b) Đúng****c) Sai****d) Đúng**

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Ta có: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$.

Câu 4: Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó:

a) $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

b) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$

c) $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$.

Lời giải**a) Đúng****b) Đúng****c) Sai****d) Đúng**

Ta có: $-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$$

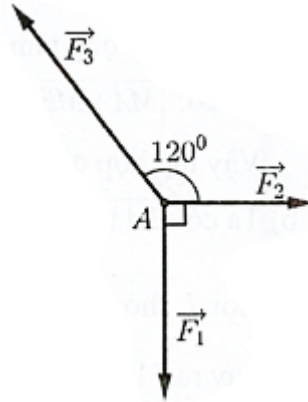
$$\begin{aligned}\text{Ta có: } -\frac{4}{3}\overline{CM} - \frac{2}{3}\overline{BN} &= -\frac{2}{3}(\overline{CA} + \overline{CB}) - \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{BC}) = \frac{2}{3}\overline{AC} + \frac{2}{3}\overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{BC} \\ &= \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{BC} + \frac{2}{3}\overline{AC} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{BC}) + \frac{2}{3}\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AC} + \frac{2}{3}\overline{AC} = \overline{AC}\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\overline{AC} - \overline{AB} &= -\frac{2}{3}\overline{CM} + \frac{2}{3}\overline{BN} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{BN} - \frac{2}{3}\overline{CM} \Leftrightarrow 2\overline{MN} = \frac{2}{3}\overline{BN} - \frac{2}{3}\overline{CM} \\ \Leftrightarrow \overline{MN} &= \frac{1}{3}\overline{BN} - \frac{1}{3}\overline{CM}.\end{aligned}$$

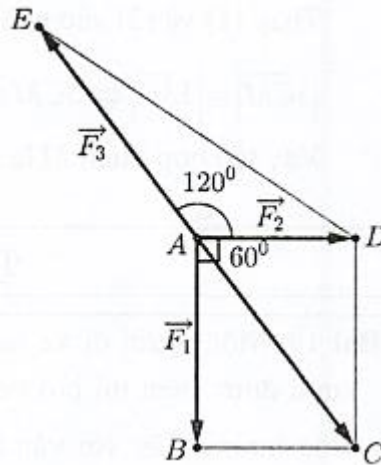
Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Một chất điểm A chịu tác dụng của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ như hình vẽ biết chất điểm A đang ở trạng thái cân bằng. Tính độ lớn của các lực $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ biết rằng lực $\vec{F}_1$ có độ lớn 12N



Trả lời: $8\sqrt{3} \text{ N}$

Lời giải



Đặt $\vec{F}_1 = \overline{AB}, \vec{F}_2 = \overline{AD}, \vec{F}_3 = \overline{AE}$. Vẽ hình chữ nhật ABCD. Từ giả thiết:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \text{ (vật ở trạng thái cân bằng)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AC} = -\overline{AE}.$$

Ta có $AB = 12, \angle CAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC = 30^\circ$.

Tam giác ABC vuông tại B nên: $BC = AB \tan 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} = AD$;

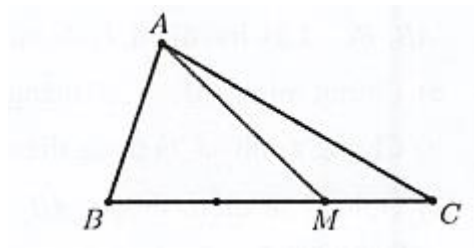
Độ lớn lực $\vec{F}_2$ bằng $4\sqrt{3} N$.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3}. \text{ Do vậy } |\vec{F}_3| = |\vec{AE}| = AC = 8\sqrt{3} N.$$

Câu 2: Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Phân tích $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.

Trả lời: $\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

Lời giải



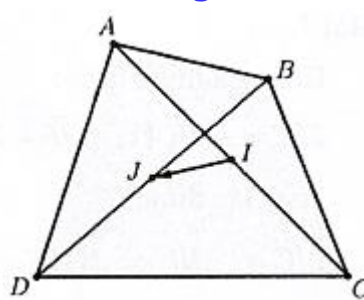
Ta có

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AC} + \vec{CM} = \vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{BC} \\ &= \vec{AC} - \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \end{aligned}$$

Câu 3: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD . Biết $\vec{AB} + \vec{CD} = k\vec{IJ}$, khi đó $k = ?$

Trả lời: $k = 2$

Lời giải



Ta có
$$\begin{cases} \vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AB} + \vec{BJ} & (1) \\ \vec{IJ} = \vec{IC} + \vec{CD} + \vec{DJ} & (2) \end{cases}$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

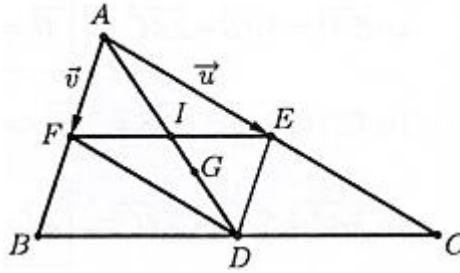
$$\begin{aligned} 2\vec{IJ} &= (\vec{IA} + \vec{IC}) + (\vec{AB} + \vec{CD}) + (\vec{BJ} + \vec{DJ}) \\ &\Leftrightarrow 2\vec{IJ} = \vec{0} + \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{CD} \end{aligned}$$

Suy ra $k = 2$

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \vec{AE}, \vec{v} = \vec{AF}$. Hãy phân tích các vector $\vec{AI}$ theo hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Trả lời: $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

Lời giải



Theo tính chất đường trung bình thì

$$\begin{cases} DE // AB \\ DF // AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DE // AF \\ DF // AE \end{cases}$$

Suy ra: $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow AD = AE + AF$.

Từ giả thiết ta có I là tâm của hình bình hành $AEDF$.

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v};$$

Câu 5: Nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $k\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$, khi đó $k = ?$

Trả lời: $k = 3$

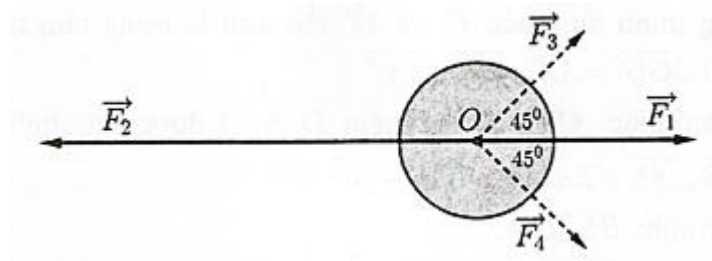
Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \\ &= 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'} + \vec{0} + \vec{0} = 3\overrightarrow{GG'}. \end{aligned}$$

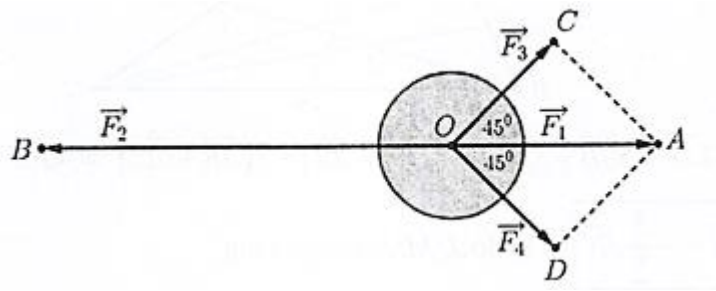
Suy ra $k = 3$

Câu 6: Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$, trong đó độ lớn lực $\vec{F}_2$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F}_1$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ có phương hợp với lực $\vec{F}_1$ các góc 45° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng 20 N . Tìm độ lớn của mỗi lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$.



Trả lời: $40\sqrt{2}\text{ N}$

Lời giải



Ta có: $\vec{F}_2 = -2\vec{F}_1$. Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng $\vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 - 2\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1.$$

Đặt $\vec{F}_1 = \vec{OA}$, $\vec{F}_2 = \vec{OB}$, $\vec{F}_3 = \vec{OC}$, $\vec{F}_4 = \vec{OD}$.

Ta có: $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 \Leftrightarrow \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OA}$. Do đó $OCAD$ là hình bình hành.

Mặt khác: $OC = OD = 20$ và $COD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên $OCAD$ là hình vuông. Khi đó:

$$|\vec{F}_1| = OA = 20\sqrt{2} \text{ N}, |\vec{F}_2| = 2|\vec{F}_1| = 40\sqrt{2} \text{ N}.$$

•Đề 3:

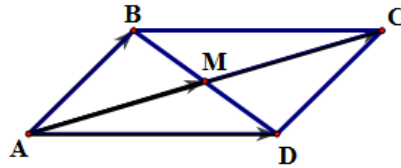
Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC}$. Khi đó điểm M là:

- A. Trung điểm của AC B. Điểm C
C. Trung điểm của AB D. Trung điểm của AD

Lời giải

Chọn A



Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

Câu 2: Cho đoạn thẳng AB . Gọi M là một điểm trên AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\vec{MA} = \frac{1}{3}\vec{MB}$. B. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$. C. $\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BA}$. D. $\vec{MB} = -3\vec{MA}$.

Câu 3: Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\vec{AM} = \frac{1}{5}\vec{AB}$ B. $\vec{MA} = -\frac{1}{4}\vec{MB}$ C. $\vec{MB} = -4\vec{MA}$ D. $\vec{MB} = -\frac{4}{5}\vec{AB}$

Lời giải

Chọn D



Ta thấy $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ là sai.

Câu 4: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

A. $AB = AC$

B. $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M

Lời giải

Chọn B

Câu 5: Cho $\triangle ABC$, AM, BN, CP là các trung tuyến. D, E, F là trung điểm của AM, BN và CP . Với O là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

B. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OD}$ (1)

Tương tự $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OE}$ (2)

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OF}$ (3)

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được đáp án **A**

Câu 6: Cho tam giác ABC đều tâm O , M là điểm bất kì trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh lần lượt là D, E, F . Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$

B. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$

D. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Lời giải

Chọn D

Qua M kẻ các đường thẳng $A_1B_1 \parallel AB, A_2C_1 \parallel AC, B_2C_2 \parallel BC$

$\Rightarrow$ Các tam giác đều $\triangle MB_1C_1, \triangle MA_1C_2, \triangle MA_2B_2$

Ta có: $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}), \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2}), \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MA_2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$. I, J lần lượt là trung điểm của AB và DC . G là trung điểm của IJ . Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$ (II) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IG}$ (III) $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{JI}$

Mệnh đề sai là:

A. (I) và (II)

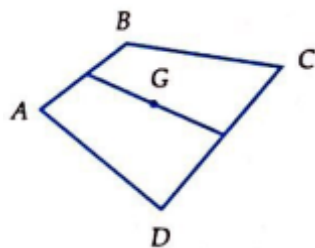
B. (II) và (III)

C. Chỉ (I)

D. Tất cả đều sai

Lời giải

Chọn B



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}) \\ &= 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{I} + 2\overrightarrow{GJ} = 4\overrightarrow{AG}\end{aligned}$$

(II) và (III) sai vì G không phải là trung điểm của AC và BD .

Câu 8: Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, AC = b, AB = c$. Nếu điểm I thỏa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ thì:

- A. Điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- B. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
- C. Điểm I là trực tâm của $\triangle ABC$.
- D. Điểm I là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Lời giải

Chọn B

Lấy A' sao cho $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ hay AA' là đường phân giác.

Ta có: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow I \text{ thuộc đoạn } AA' \text{ và } \frac{IA}{IA'} = \frac{b+c}{a} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{BA}{BA'}$$

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Câu 9: Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC}$.

- A. Điểm I là trung điểm của cạnh AC
- B. Điểm C là trung điểm của cạnh IA
- C. Điểm C chia đoạn IA theo tỉ số -2
- D. Điểm I chia đoạn AC theo tỉ số 2

Lời giải

Chọn C

$$2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}$$

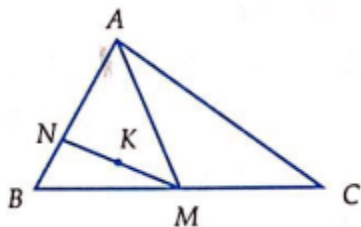
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -2\overrightarrow{CA}$$

Câu 10: Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm AB và N trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Xác định điểm K sao cho $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

- A. Điểm K là trung điểm cạnh AM
- B. Điểm K là trung điểm cạnh BN
- C. Điểm K là trung điểm cạnh BC
- D. Điểm K là trung điểm cạnh MN

Lời giải

Chọn D



M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$

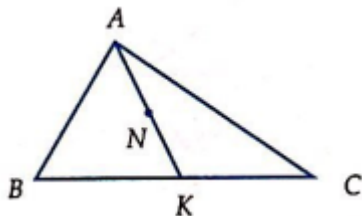
$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AM} + 6\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \Rightarrow K \text{ là trung điểm của } MN.$$

Câu 11: Cho $\triangle ABC$. Tìm điểm N sao cho: $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

- A. N là trọng tâm $\triangle ABC$
- B. N là trung điểm của BC
- C. N là trung điểm của AK với K là trung điểm của BC
- D. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận AB và AC làm 2 cạnh

Lời giải

Chọn C



Gọi K là trung điểm $BC \Rightarrow \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NK}$

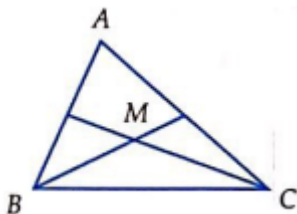
Nên $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NK} = \vec{0} \Rightarrow N$ là trung điểm AK

Câu 12: Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$.

- A. M là trung điểm cạnh AB
- B. M là trung điểm cạnh BC
- C. M chia đoạn AB theo tỉ số 2
- D. M là trọng tâm $\triangle ABC$

Lời giải

Chọn D



$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow M \text{ là trọng tâm } \triangle ABC$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O , H là trực tâm tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O . Khi đó:

a) $BD // CH$

b) $CD // BH$

a) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO}$;

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH}$

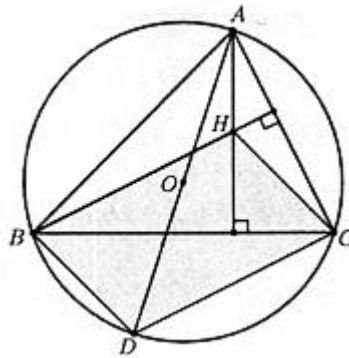
Lời giải

a) Đúng

b) Đúng

c) Sai

d) Sai



Xét tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AB \perp BD$; mặt khác $AB \perp CH$ nên $BD // CH$ (1).

Tương tự, tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AC \perp CD$; mặt khác $AC \perp BH$ nên $CD // BH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BDCH$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (vì O là trung điểm AD).

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}$
 $= 3\overrightarrow{OH} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Khi đó:

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm B , bán kính $R = CG$.

b) $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI (với I là trung điểm của BC).

c) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 2028$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm G , bán kính $R = 626$.

d) $|3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IC với $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

a) Sai

b) Đúng

c) Sai

d) Đúng

a) Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM}|$

$\Leftrightarrow |3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MC}| = BM \Leftrightarrow |3(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC})| = BM \Leftrightarrow 3|\overrightarrow{CG}| = BM \Leftrightarrow BM = 3CG.$

Nhận xét: Ba điểm B, C, G cố định. Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm B , bán kính $R = 3CG$.

b) Ta có: $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{MG}| = 3|2\overrightarrow{MI}|$

(với I là trung điểm của BC).

$\Leftrightarrow 6MG = 6MI \Leftrightarrow MG = MI.$

Nhận xét: Hai điểm G, I cố định. Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI .

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC nên G cố định.

Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 2028 \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MG}| = 2028 \Leftrightarrow 3MG = 2028 \Leftrightarrow MG = 676.$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G , bán kính $R = 676$.

d) Ta có: $3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{CM} \quad (1).$

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$

Suy ra I là điểm cố định. Khi đó:

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 3\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}) = 3\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MI} \quad (2).$

Thay (1) và (2) vào hệ thức $|3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$, ta được:

$|3\overrightarrow{CM}| = |3\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow 3CM = 3MI \Leftrightarrow MC = MI.$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IC .

Câu 3: Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB // CD, AB = 2AD = 2CD, E$ là trung điểm cạnh AB . Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC};$

b) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{CB};$

c) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CE};$

d) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EC};$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{DC};$

f) $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}).$

Lời giải

a) Đúng

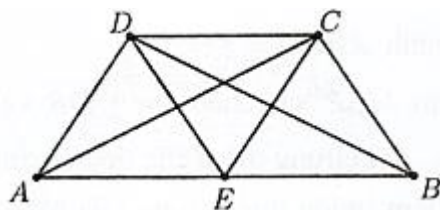
b) Sai

c) Đúng

d) Đúng

e) Đúng

f) Đúng



Ta có: $AE = CD = \frac{1}{2}AB, AE // CD$ nên $AECD$ là hình bình hành (*).

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $BCDE$ là hình bình hành (**).

- a) Mệnh đề đúng.
- b) Mệnh đề sai (do (**)).
- c) Mệnh đề đúng (tính chất trung điểm).
- d) Mệnh đề đúng (do (*)).
- e) Mệnh đề đúng. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{DC}$.
- f) Mệnh đề đúng (tính chất trung điểm).

Câu 4: Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Khi đó:

- a) $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OP} = \vec{0}$
- b) $3\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$
- c) Ba điểm B, P, N không thẳng hàng
- d) Ba đường thẳng AC, BD, MN đồng quy

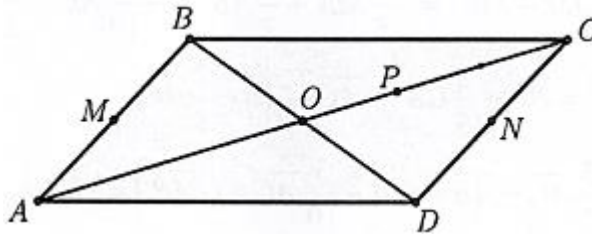
Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Sai

d) Đúng



Ta có: $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

Khi đó: $3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) - 2.2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \Rightarrow P$ là trọng tâm của tam giác BCD , do vậy trung tuyến BN của tam giác BCD đi qua trọng tâm P đó. Vậy ba điểm B, P, N thẳng hàng.

Nhận xét: AC và BD cắt nhau tại tâm O là trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$.

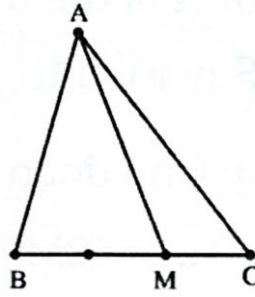
Do đó O là trung điểm của MN hay AC, BD, MN đồng quy tại O .

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Câu 1: Cho $\triangle ABC$. Gọi M là điểm thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Trả lời: $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải



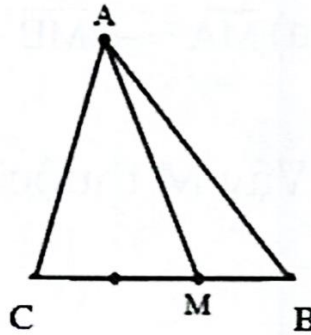
$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 2: Cho $\triangle ABC$. Gọi M là điểm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Trả lời: $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải



Cách 1: $MC = 2MB$, $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ ngược hướng nên

$$\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Cách 2: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

Câu 3: Cho 2 điểm phân biệt A và B và hai số α và β với $\alpha + \beta \neq 0$.

Khi đó tồn tại bao nhiêu điểm I thỏa $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Trả lời: 1

Lời giải

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\alpha\overrightarrow{AI} + \beta(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{AI} = \beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

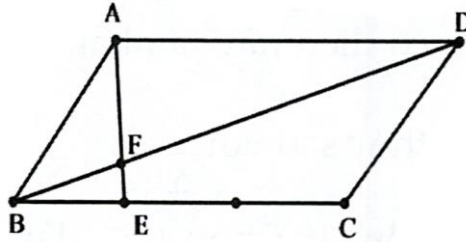
Do A, B cố định, $\frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB}$ không đổi nên tồn tại duy nhất điểm I thỏa: $\alpha \overline{IA} + \beta \overline{IB} = \vec{0}$.

Câu 4: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F là 2 điểm thỏa $\overline{BE} = \frac{1}{3} \overline{BC}$, $\overline{BF} = \frac{1}{4} \overline{BD}$. Khi đó

$\overline{AE} = k \overline{AF}$. Vậy $k = ?$

Trả lời: $\frac{4}{3}$

Lời giải



Ta phân tích $\overline{AE}$ và $\overline{AF}$ theo 2 vector $\overline{AB}$ và $\overline{AD}$.

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{BC} = \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AD}$$

$$\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{BF} = \overline{AB} + \frac{1}{4} (\overline{AD} - \overline{AB}) = \frac{3}{4} \overline{AB} + \frac{1}{4} \overline{AD}.$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} \overline{AE} = \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AD} \\ \overline{AF} = \frac{3}{4} \overline{AB} + \frac{1}{4} \overline{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AE} = \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AD} \\ \frac{4}{3} \overline{AF} = \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AD} \end{cases} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{4}{3} \overline{AF}$$

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Lấy các điểm I, J sao cho $3\overline{IA} + 2\overline{IC} - 2\overline{ID} = \vec{0}$; $\overline{JA} - 2\overline{JB} + 2\overline{JC} = \vec{0}$. Khi đó $\overline{IJ} = k \overline{IO}$, vậy $k = ?$

Trả lời: 4

Lời giải

$$3\overline{IA} + 2\overline{IC} - 2\overline{ID} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overline{IA} + 2(\overline{IC} - \overline{ID}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{IA} + 2\overline{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overline{AI} + 2\overline{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AI} = -\frac{2}{3} \overline{AB}$$

$$\overline{JA} - 2\overline{JB} + 2\overline{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AJ} + 2(\overline{JC} - \overline{JB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AJ} = 2\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AJ} = 2\overline{AD}$$

$$\overline{IO} = \overline{AO} - \overline{AI} = \frac{1}{2} \overline{AC} - \frac{2}{3} \overline{AB} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{AD}) - \frac{2}{3} \overline{AB} = -\frac{1}{6} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AD}$$

$$\overline{IJ} = \overline{AJ} - \overline{AI} = 2\overline{AD} - \frac{2}{3} \overline{AB} = -\frac{2}{3} \overline{AB} + 2\overline{AD}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{IO} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{IJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\overrightarrow{IO} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} \\ \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow 6\overrightarrow{IO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IO}$$

Câu 6: Cho $\triangle ABC$. Gọi I, J là 2 điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BJ}$. Vậy $k = ?$

Trả lời: $\frac{3}{2}$

Lời giải

$$\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{BJ} + 3(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BJ}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{BJ} + 3\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BJ} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ}$$