

MỤC LỤC

▣ BÀI ④. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO	2
*. Đề kiểm tra rèn luyện	2
♦ Đề ①:	2
♦ Đề ②:	9
♦ Đề ③:	18

***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦ Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$\text{Mà theo giả thiết } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \text{ suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

Câu 2: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

Câu 3: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xác định được góc } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ là góc } A \text{ nên } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 4: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ là hai vector cùng hướng nên } (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1.$$

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý.

Câu 5: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $B = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. **B.** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. **C.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. **D.** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 130^\circ$ nên loại **A**.

Phương án B: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 40^\circ$ nên loại **B**.

Phương án C: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ$ nên loại **C**.

Phương án D: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ$ nên chọn **D**.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ sau đó mới tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 135^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. **B.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. **C.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

- A.** 0 . **B.** a . **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** a^2 .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0$.

Câu 9: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A.** $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{7 - \sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

Câu 10: Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC .

B. Đường tròn $(B; BC)$.

C. Đường tròn $(C; CB)$. **D.** Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 11: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là:

A. Đường tròn đường kính AB .

B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .

D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 12: Cho hai điểm $A(2, 2)$, $B(5, -2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\angle AMB = 90^\circ$

A. $M(1, 6)$.

B. $M(6, 0)$.

C. $M(1, 0)$ hay $M(6, 0)$.

D. $M(0, 1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x, 0)$, với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = (x-2; -2)$, $\overrightarrow{BM} = (x-5; 2)$. Theo YCBT ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow M(1; 0) \\ x=6 \Rightarrow M(6; 0) \end{cases}, \text{ nên chọn C.}$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$. Khi đó:

a) $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

b) $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4$

c) Vector $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi $m = \frac{3}{2}$

d) Tọa độ vector $\vec{d}$ sao cho $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = -2$ bằng $\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$

Lời giải

a) Sai

b) Đúng

c) Đúng

d) Đúng

a) Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (-6; 2) \Rightarrow \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = -2(-6) + 3 \cdot 2 = 18;$

$\vec{a} + \vec{b} = (2; 4), 2\vec{a} - \vec{b} = (-8; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2(-8) + 4 \cdot 5 = 4.$

b) Ta có: $\vec{c} = (m; 1)$. Vì $\vec{c} \perp \vec{a}$ nên $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow -2m + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$

c) Gọi $\vec{d} = (x; y)$. Ta có:
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{d} = 4 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases} \text{ Vậy } \vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right).$$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (3; -7)$, $\vec{c} = (1; 1)$. Khi đó:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 29$

b) $(\vec{a}, \vec{b}) = 15^\circ$

c) $(\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$

d) Để $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$ tạo với vector $\vec{c}$ một góc 45° thì $x = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Sai

b) Sai

c) Đúng

d) Đúng

a) Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-7)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ;$

$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{58}}{58} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ.$

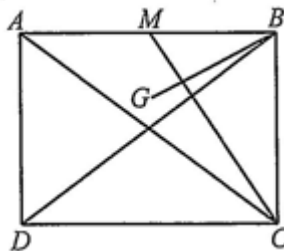
b) Ta có: $\vec{d} = (4x+1; x+4)$ tạo với $\vec{c}$ một góc 45° nên:

$\cos(\vec{d}, \vec{c}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{4x+1+x+4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4x+1)^2 + (x+4)^2}} = \cos 45^\circ$

$\Leftrightarrow \frac{5x+5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17x^2 + 16x + 17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 5x+5 = \sqrt{17x^2 + 16x + 17}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 17x^2 + 16x + 17 = 25x^2 + 50x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2 + 34x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$

Câu 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 4a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ACM (Hình).



a) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

b) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = -a^2.$

Lời giải

a) Sai

b) Sai

c) Đúng

d) Sai

Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ACM nên

$$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC = AD = 3a, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 \\ &= \frac{1}{4}(4a)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 3a - \frac{1}{3}(3a)^2 = -3a^2. \end{aligned}$$

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Khi đó:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 7$.

c) $(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + 30\sqrt{3}$

d) $(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 5 + 30\sqrt{3}$

Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Đúng

d) Sai

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = -6\sqrt{3}$.

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3^2 - 4^2 = -7.$$

$$\begin{aligned} (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) &= 3\vec{a}^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 3|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 \\ &= 3 \cdot 3^2 - 5(-6\sqrt{3}) - 2 \cdot 4^2 = -5 + 30\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 8a$; đáy nhỏ $CD = 4a$; đường cao $AD = 6a$; I là trung điểm của AD . Tính $(\vec{IA} + \vec{IB}) \cdot \vec{ID}$.

Trả lời: $-18a^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} &\vec{IA} \cdot \vec{ID} + \vec{IB} \cdot \vec{ID} \\ &= -\vec{IA}^2 + \vec{IB} \cdot \vec{ID} \cdot \cos BID \\ &= -IA^2 - \vec{IB} \cdot \vec{ID} \cdot \cos BIA \\ &= -IA^2 - \vec{IB} \cdot \vec{ID} \cdot \frac{IA}{IB} \\ &= -IA^2 - IA^2 = -2IA^2 = -2 \cdot (3a)^2 = -18a^2. \end{aligned}$$

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, AC = 2\sqrt{3}a$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\vec{BA} \cdot \vec{AM}$.

Trả lời: $\frac{-a^2}{2}$

Lời giải

Tam giác AMB có $AM = BM = AB$ nên là tam giác đều. Suy ra $MAB = 60^\circ$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{-a^2}{2}.$$

Câu 3: Cho $A(1;2)$ và $B(-1;3)$. Cho điểm $P(0,b)$.

Tính $\cos APB$ theo tung độ của P .

Trả lời:
$$\frac{b^2 - 5b + 5}{\sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{(b-3)^2 + 1}}$$

Lời giải

Vì P thuộc trục tung nên $P(0,b)$. Khi đó $\overrightarrow{PA} = (1; 2-b)$ và $\overrightarrow{PB} = (-1; 3-b)$.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 1 \cdot (-1) + (2-b)(3-b) = b^2 - 5b + 5$$

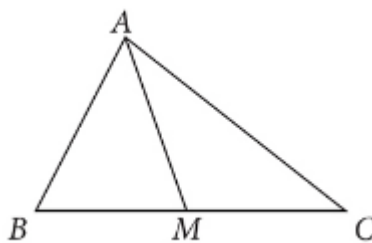
$$\cos APB = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{b^2 - 5b + 5}{\sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{(b-3)^2 + 1}}.$$

Câu 4: Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - kBC^2$. Vậy $k = ?$

Trả lời: $\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2}{4} \\ &= \frac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2. \end{aligned}$$

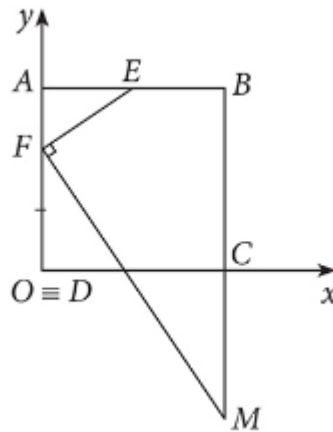
Câu 5: Cho hình vuông $ABCD$; E là trung điểm của AB , F là điểm sao cho $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Xác định

vị trí của điểm M trên đường thẳng BC sao cho $EFM = 90^\circ$.

Trả lời: là điểm nằm trên phần kéo dài của BC về phía C sao cho $CM = \frac{5a}{6}$.

Lời giải

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông.



Xét hệ trục tọa độ xOy sao cho $D \equiv O = (0;0)$, $C = (a;0)$, $A = (0;a)$.

Dễ thấy $E = \left(\frac{a}{2}; a\right)$; $F = \left(0; \frac{2a}{3}\right)$.

Giả sử $M = (a; y)$ ($y \in \mathbb{R}$). Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{FE} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{3}\right) \\ \overrightarrow{FM} = \left(a; y - \frac{2a}{3}\right) \end{cases}$$

Vậy ta có biến đổi tương đương:

$$EF \perp FM$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{a}{3} \left(y - \frac{2a}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-5a}{6}.$$

Vậy $M \left(a; \frac{-5a}{6}\right)$.

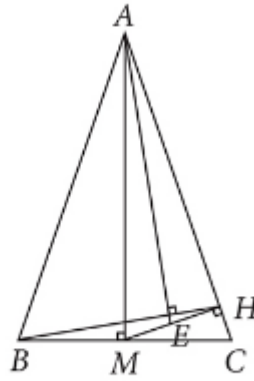
Từ đó M là điểm nằm trên phần kéo dài của BC về phía C sao cho $CM = \frac{5a}{6}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC cân tại A ; M là trung điểm của BC , H là hình chiếu của M trên AC ; E là trung điểm của MH . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH}$

Trả lời: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

Lời giải

Ta có biến đổi tích vô hướng như sau:



$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AH}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MH}) \\
 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BM} \\
 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH}) \cdot \overrightarrow{BM} \\
 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MC} \\
 &= \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH} \\
 &= \overrightarrow{MH}^2 + \overrightarrow{MH}^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Suy ra $AE \perp BH$ (đpcm).

Suy ra $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

•Đề 2:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$
B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$
D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$

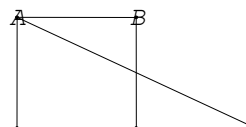
Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$.
B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$.
C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$.
D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.



$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2.$$

Câu 3: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

- A.** một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 4: Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. **D.** $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh vế trái với vế phải.

Phương án A: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = 2x \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$ nên loại **A**.

Phương án B: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot AC \cos 120^\circ = -2$ nên loại **B**.

Phương án C: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$ nên chọn **C**.

Câu 5: Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:

- A.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. **B.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. **D.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$ nên loại **A**.

Phương án B: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên loại **B**.

Phương án C: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$ nên loại **C**.

Phương án D: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên chọn **D**.

Câu 6: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A.** $\frac{3a^2}{4}$. **B.** $\frac{-3a^2}{4}$. **C.** $\frac{3a^2}{2}$. **D.** $\frac{-3a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}.$$

Câu 7: Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng

- A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
- C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
- D. A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng

Câu 8: Cho 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A. $\sqrt{21}$.
- B. $\sqrt{61}$.
- C. 21.
- D. 61.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}$.

Câu 9: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$
- B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
- C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
- D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$. $\frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và D.

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ **Chọn C.**

- A đúng, vì $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
- B đúng, vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 10: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$
- B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$
- C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$
- D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc B nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Câu 11: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc A nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos B = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$$

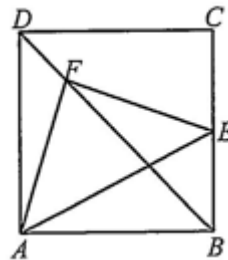
Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Lấy E là trung điểm của BC , điểm F thỏa mãn $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BD}$

Khi đó:



a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4} \overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{EF} = \frac{-3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}$.

d) Tam giác AEF vuông cân.

Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Đúng

d) Đúng

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \right) - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) = \frac{-3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF} &= \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\frac{-3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \right) \\ &= \frac{-3}{16} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{3}{16} \overrightarrow{AD}^2 = 0 \Rightarrow AF \perp EF. \end{aligned}$$

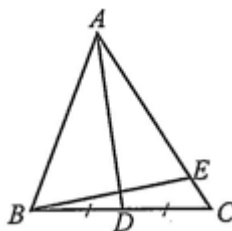
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AF}^2 = \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \right)^2 = \frac{1}{16} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{8} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{9}{16} \overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8} \overrightarrow{AB}^2.$$

$$\overrightarrow{EF}^2 = \left(\frac{-3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \right)^2 = \frac{9}{16} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{8} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{16} \overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8} \overrightarrow{AB}^2.$$

$$\Rightarrow AF^2 = EF^2 = \frac{5}{8} \overrightarrow{AB}^2 \Rightarrow AF = EF. \text{ Vậy tam giác } AEF \text{ vuông cân tại } F.$$

Chú ý: Ta có thể chứng minh tam giác AEF vuông bằng định lý Pythagore.

Câu 2: Cho tam giác ABC có $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 6$, $BAC = 45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = k \overrightarrow{AC} (k \in \mathbb{R})$ (Hình). Khi đó:



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$

c) $BC = 3\sqrt{5}$

d) $AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$.

Lời giải

a) Sai**b) Đúng****c) Sai****d) Đúng**

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24$.

b) Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 6^2 - 2 \cdot 24 + (4\sqrt{2})^2 = 20 \\ \Rightarrow BC &= 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}^2 &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[(4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 24 + 6^2 \right] = 29 \Rightarrow AD = \sqrt{29}.\end{aligned}$$

c) Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2} \left(k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} \left[24k + 6^2 \cdot k - (4\sqrt{2})^2 - 24 \right] \\ &= 30k - 28.\end{aligned}$$

Khi đó $AD \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC đều, đường cao AH . Khi đó:

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$

b) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$

c) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

d) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 130^\circ$

Lời giải

a) Sai**b) Đúng****c) Đúng****d) Sai**

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 60^\circ$.

b) Ta có: $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$ do $AH \perp BC$.

c) Cách giải 1: Gọi D là điểm đối xứng với B qua C , ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$.

Khi đó: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = ACD = 120^\circ$.

Cách giải 2: Áp dụng tính chất được rút ra từ định nghĩa:

$(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (-\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, -\vec{b})$, ta được:

$$(\vec{CA}, \vec{BC}) = 180^\circ - (\vec{CA}, \vec{CB}) = 180^\circ - ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

d) Ta có: $(\vec{AH}, \vec{BA}) = 180^\circ - (\vec{AH}, \vec{AB}) = 180^\circ - BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$

Câu 4: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc B bằng 60° . Khi đó:

a) $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$

b) $(\vec{AB}, \vec{DA}) = 30^\circ$

c) $\vec{DA} \cdot \vec{DC} = 3$

d) $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = -3$

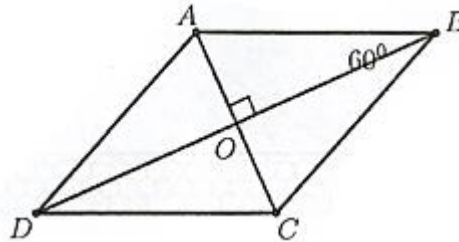
Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Sai

d) Đúng



Xét hình thoi $ABCD$ có $ABC = 60^\circ \Rightarrow BAD = 120^\circ$; tam giác ABC có

$$AB = BC = 2, ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều cạnh } 2 \Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Ta có: $(\vec{AB}, \vec{AC}) = BAC = 60^\circ, (\vec{AB}, \vec{DA}) = 180^\circ - (\vec{AB}, \vec{AD}) = 180^\circ - BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Ta có: $\vec{DA} \cdot \vec{DC} = |\vec{DA}| \cdot |\vec{DC}| \cos(\vec{DA}, \vec{DC}) = DA \cdot DC \cdot \cos ADC = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2;$

$$\vec{OB} \cdot \vec{BA} = -\vec{BO} \cdot \vec{BA} = -|\vec{BO}| \cdot |\vec{BA}| \cdot \cos ABO = -BO \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = -\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3.$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết M là trung điểm của BC .

Tính $\overline{AM}^2$?

Trả lời: $\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

Lời giải

Vì M là trung điểm của BC , nên: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$;

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2). \text{ Mà } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2};$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b^2\right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

(đây cũng là công thức để tính độ dài đường trung tuyến tam giác).

Câu 2: Cho nửa đường tròn đường kính AB . Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$ biết $AB = 2$.

Trả lời: 4

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Vì AB là đường kính nửa đường tròn nên

$$\angle ADB = 90^\circ, \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4 \end{aligned}$$

Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD . Khi đó BMN là tam giác vuông cân tại đỉnh nào?

Trả lời: vuông cân tại đỉnh M .

Lời giải

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}.$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b}) \text{ và}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b}).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{16}(-3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$= \frac{1}{16}(-3AD^2 + 3AB^2 + 0) = 0 \Rightarrow MB \perp MN(1).$$

$$\text{Hơn nữa: } \overrightarrow{MB}^2 = \frac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{16}(AD^2 + 9AB^2 - 0) = \frac{5}{8}AB^2;$$

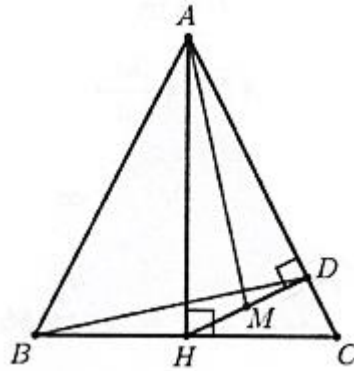
$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a} + \vec{b})^2 = \frac{1}{16}(9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{16}(9AD^2 + AB^2 + 0) = \frac{5}{8}AB^2.$$

Suy ra $MB = MN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BMN$ vuông cân tại đỉnh M .

Câu 4: Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của BC , D là hình chiếu của H trên AC , M là trung điểm của HD . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$

Trả lời: 0

Lời giải



Ta cần chứng minh: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD}),$$

$$\text{mà } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \text{ (do } AH \perp BC) \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \text{ (do } HD \perp AC) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{HC}]$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}}_0 + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Vậy $AM \perp DB$.

Câu 5: Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \text{ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?}$$

Trả lời: $R = a$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB ta có:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\stackrel{IA=\frac{a}{2}}{\Leftrightarrow} MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MI = a.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k . Tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R = \sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$

Lời giải

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2.$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự, ta có: } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 - IB^2.$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 - IA^2 - IB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 - 2IA^2 = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$$

$$(\text{trong đó } IA^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}).$$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng.

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ (điểm M trùng với điểm I).

$$\text{Nếu } k > -a^2 \text{ thì } MI = \sqrt{\frac{k+a^2}{2}}.$$

Khi đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

•Đề 3:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A}=120^\circ$ và $AB=a$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = BA.CA.\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$.

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ suy ra $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$ nên loại **A**.

Phương án B: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 0$ và $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC} = 0$ suy ra $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC} = 0$ nên loại **B**.

Phương án C: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 45^\circ = AB.AB\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.DC.\cos 180^\circ = -AB^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ nên chọn **C**.

Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A: Do $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB} = DA.CB.\cos 0^\circ = a^2$ nên loại **A**.

Phương án B: Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD.\cos 180^\circ = -a^2$ nên chọn **B**.

Câu 4: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=4a$, đáy nhỏ $CD=2a$, đường cao $AD=3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}).\overrightarrow{ID}$ bằng:

- A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0 . D. $9a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}).\overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ID} = -\frac{9a^2}{2}$ nên chọn **B**.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B}=60^\circ$, $AB=a$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$

- A. $3a^2$. B. $-3a^2$. C. $3a$. D. 0 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = AC.BC.\cos 150^\circ = a\sqrt{3}.2a.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2$.

Câu 6: Cho 2 vector đơn vị $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

A. 7.

B. 5.

C. -7.

D. -5.

Lời giải

Chọn C

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, (3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -7.$$

Câu 7: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $-9a^2$.

B. $15a^2$.

C. 0.

D. $9a^2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2 \text{ nên chọn A.}$$

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. 9.

B. 81.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 81 \text{ nên chọn B.}$$

Câu 9: Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2\text{ cm}$, $BC = 3\text{ cm}$, $CA = 5\text{ cm}$ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$

B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$

C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$

D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và $AC \longrightarrow I(4; -1)$. nằm giữa A, C .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$$

$$\text{Cách khác. Ta có } AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

Câu 10: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$

B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$

C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$

D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$$

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A. $P = -1$

B. $P = 3a^2$

C. $P = -3a^2$

D. $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$$

$$= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2$$

Câu 12: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$.

B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Khi đó:

a) $\angle ACB = 60^\circ$

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Lời giải

a) Đúng

b) Đúng

c) Sai

d) Đúng

$$\text{Xét tam giác vuông } ABC: AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3},$$

$$\cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow ABC = 60^\circ \Rightarrow ACB = 30^\circ.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos ABC = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos ACB$$

$$= -CB \cdot CA \cdot \cos 30^\circ = -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2.$$

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh a . Biết M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$

b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$

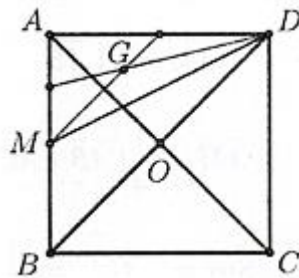
Lời giải

a) Sai

b) Sai

c) Đúng

d) Đúng



Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh a là $AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$= -AB \cdot AC \cdot \cos BAC = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$$

$$= AM \cdot AC \cdot \cos CAM = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Ta có: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
&= DA \cdot DB \cdot \cos ADB - \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \cos CAD \\
&= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2.
\end{aligned}$$

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Do đó: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}_0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos ACB = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

(trong đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$).

Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng a . Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$;

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$;

c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$;

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$

Lời giải

a) Sai

b) Sai

c) Đúng

d) Đúng

a) Do $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$ cùng hướng, do đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = BAO = 45^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = AB \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng, do đó $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = CA \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180^\circ = -a^2$.

d) Ta có: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ (trong đó $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$).

Ta có: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = CA \cdot CB \cdot \cos ACB = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$.

Vậy $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$.

Câu 4: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , biết $AD = a, BC = 3a$ và cạnh $AB = 2a$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$

b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$

d) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$

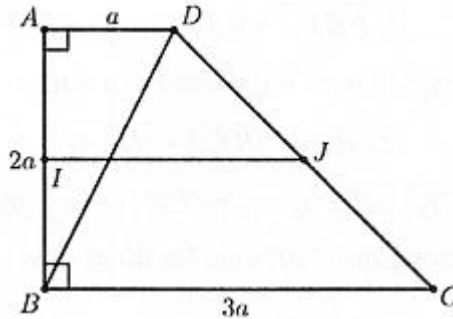
Lời giải

a) Đúng

b) Sai

c) Sai

d) Đúng



a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_0$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -4a^2.$$

b) Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = BC \cdot BD \cdot \cos DBC$

$$= BC \cdot BD \cdot \cos BDA = BC \cdot BD \cdot \frac{AD}{BD} = BC \cdot AD = 3a^3.$$

(trong đó $DBC = BDA$ vì là hai góc so le trong).

c) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

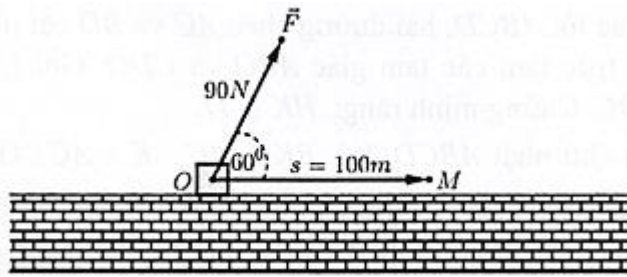
$$= -\overrightarrow{AB}^2 + 0 + 0 + BC \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = -AB^2 + 3a \cdot a \cdot 1 = -(2a)^2 + 3a^2 = -a^2.$$

d) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$. Ta có:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}}_0 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ} = BC \cdot IJ \cdot \cos 0^\circ = 3a \cdot 2a \cdot 1 = 6a^2.$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$.



Trả lời: 4500J

Lời giải

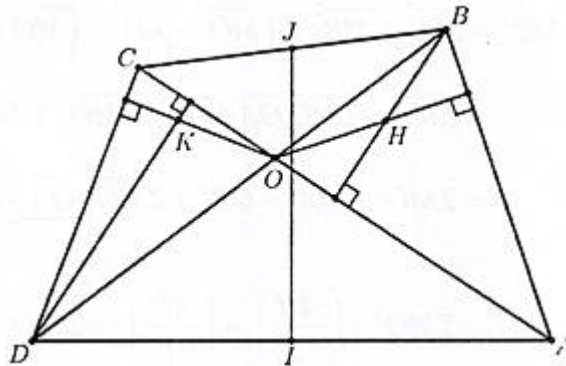
Đặt $OM = s$ là đoạn đường mà vật di chuyển được với O là điểm đặt vật ban đầu. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{OM}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500J.$$

Câu 2: Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC . Tính $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ}$?

Trả lời: 0

Lời giải



$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$$

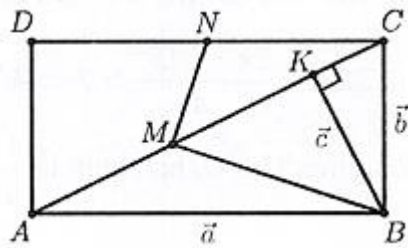
$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \overrightarrow{HK} \cdot 2\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK})\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK})\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{0} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

Câu 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC, K \in AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD . Tìm số đo góc BMN .

Trả lời: 90°

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BK} = \vec{c}$ và $BA = a$, $BC = b$, $BK = c$. Khi đó:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(2\vec{b} - \vec{c}).$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}(2\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{4}(2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2)$$

$$= \frac{1}{4}[2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b} - \vec{a})\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c})\vec{c}].$$

Ta thấy rằng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ do $\vec{a} \perp \vec{b}$; $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{c} = 0$

Do $AC \perp BK$; $(\vec{b} - \vec{c})\vec{c} = \overrightarrow{KC} \cdot \vec{c} = 0$ do $CK \perp BK$.

Vì vậy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow BMN = 90^\circ$.

Câu 4: Cho đoạn $AB = 20$. Tồn tại điểm M sao cho $T = 3MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

Trả lời: 480

Lời giải

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Vậy điểm I thuộc đoạn AB và $IA = \frac{2}{5} \cdot AB = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8$, $IB = 12$.

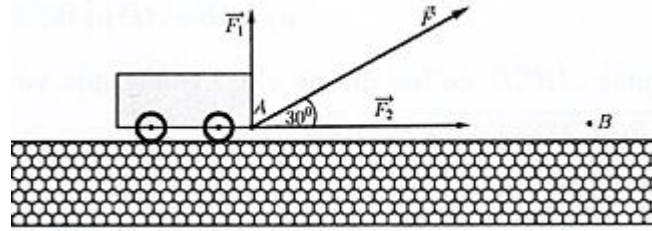
$$\begin{aligned} \text{Ta có : } T &= 3MA^2 + 2MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 3\overrightarrow{MI}^2 + 6\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}^2 \\ &= 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\underbrace{3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}) = 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2. \end{aligned}$$

Ta có $(3IA^2 + 2IB^2)$ là hằng số do ba điểm A, B, I cố định.

Do đó: T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ bé nhất $\Leftrightarrow$ Điểm M trùng với điểm I .

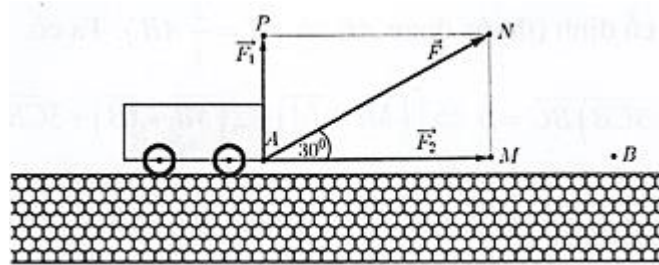
Khi đó giá trị T nhỏ nhất là : $T_{\min} = 3IA^2 + 2IB^2 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 12^2 = 480$.

Câu 5: Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn 50 N , di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài 200 m . Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\overline{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Tính công sinh ra bởi các lực $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$?



Trả lời: $5000\sqrt{3}\text{ J}$; 0 ; $5000\sqrt{3}\text{ J}$

Lời giải



Đặt $\vec{F} = \overline{AN}, \vec{F}_1 = \overline{AP}, \vec{F}_2 = \overline{AM}$.

Khi đó $AMNP$ là hình bình hành, mà $AM \perp AP$ nên $AMNP$ là hình chữ nhật.

Ta có: $AN = 50, AM = AN \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3},$

$AP = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 25.$

Lực $\vec{F}$ sinh ra công $A = |\vec{F}| \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000\sqrt{3}\text{ J}.$

Lực $\vec{F}_1$ có độ lớn 25 N và tạo với phương dịch chuyển góc 90° nên công sinh ra là

$A_1 = |\vec{F}_1| \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos 90^\circ = 0\text{ J}.$

Lực $\vec{F}_2$ có độ lớn $25\sqrt{3}\text{ N}$ và tạo với phương dịch chuyển góc 0° nên công sinh ra là

$A_2 = |\vec{F}_2| \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos 0^\circ = 25\sqrt{3} \cdot 200 \cdot 1 = 5000\sqrt{3}\text{ J}.$

Câu 6: Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC = 7\text{ cm}$ và $BC = 14\text{ cm}.$

Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overline{AC}$ và $\overline{CB}.$

Trả lời: $-\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $(\overline{AC}, \overline{CB}) = 180^\circ - (\overline{CA}, \overline{CB}) = 180^\circ - ACB.$

$$\text{Mà } \cos(\angle ACB) = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \text{ nên } \angle ACB = 60^\circ.$$

$$\text{Vậy } \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ hay } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$