



CHƯƠNG



BẤT PHƯƠNG TRÌNH

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Bạn Lan mang 150000 đồng đi nhà sách để mua một số quyển tập và bút. Biết rằng giá một quyển tập là 8000 đồng và giá của một cây bút là 6000 đồng. Bạn Lan có thể mua được tối đa bao nhiêu quyển tập nếu bạn đã mua 10 cây bút.

Lời giải

Trả lời: 11

Bất phương trình biểu diễn số tập và bút có thể mua được phụ thuộc vào số tiền mang theo là $8000x + 6000y \leq 150000$

Bạn Lan có thể mua được tối đa số quyển tập nếu bạn đã mua 10 cây bút là $8000x + 6000 \cdot 10 \leq 150000 \Leftrightarrow x \leq 11,25$

Vì x nguyên dương nên số quyển tập tối đa bạn Lan mua được là 11 quyển.

Câu 2: Trong 1 lạng (100g) thịt bò chứa khoảng 26g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20g protein. Trung bình trong một ngày, một gia đình nữa cần tối thiểu 460g protein. Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một gia đình nên ăn trong ngày. Hỏi lượng cá rô phi trong một ngày gia đình cần ăn là bao nhiêu, biết rằng lượng thịt bò ăn trong ngày không vượt quá 4 lạng.

Lời giải

Trả lời: 18

Gọi số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi của một người phụ nữ nên ăn trong ngày là x, y .
($x, y > 0, x, y \in \mathbb{N}, x \leq 4$).

Ta có: $26x + 20y \geq 460 \Leftrightarrow 13x + 10y \geq 230 \Leftrightarrow y \geq \frac{230 - 13x}{10}$

Do $x \leq 4$ nên $\frac{230 - 13x}{10} \geq \frac{178}{10}$.

Do vậy, lượng cá rô phi cần tối thiểu là 18 lạng.

Câu 3: Để chuẩn bị đồ dùng học tập cho năm học mới, mẹ cho Hoa 100.000 đồng để đi mua dụng cụ học tập. Sau khi lên danh sách đồ dùng còn thiếu, Hoa quyết định đi mua ít nhất 2 chiếc bút bi và một số vở để ghi chép. Biết giá tiền của một chiếc bút bi là 5.000 đồng và giá tiền một quyển vở là 7.000 đồng. Hỏi bạn Hoa có thể mua tối đa bao nhiêu quyển vở mà vẫn đảm bảo đủ đồ dùng học tập.



Lời giải

Trả lời: 12

Gọi số bút và số vở mà bạn Hoa mua lần lượt là $x; y$ ($x \geq 2; y \geq 0; x, y \in \mathbb{N}$).

Ta có: $5000x + 7000y \leq 100000 \Leftrightarrow 5x + 7y \leq 100 \Leftrightarrow y \leq \frac{100 - 5x}{7}$.

Do $x \geq 2$ nên $\frac{100 - 5x}{7} \leq \frac{90}{7} \Rightarrow y \leq \frac{90}{7}$.

Do vậy, bạn Hoa có thể mua tối đa 12 quyển vở.

Câu 4: Bạn Lan có 15 nghìn đồng để đi mua vở. Vở loại A có giá 3000 đồng một cuốn, vở loại B có giá 4000 đồng một cuốn. Hỏi bạn Lan có thể mua nhiều nhất bao nhiêu quyển vở sao cho bạn có cả hai loại vở?

Lời giải

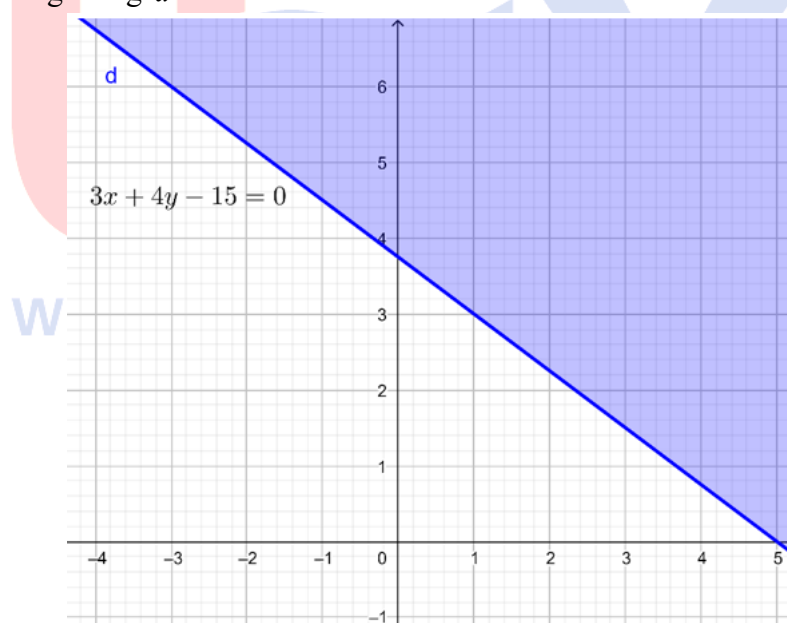
Trả lời: 4

Gọi x, y lần lượt là số vở bạn Lan có thể mua ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Theo bài ra ta có: $3x + 4y \leq 15$.

Ta lấy gốc tọa độ $O(0;0)$ và tính $3.0 + 4.0 - 15 \leq 0$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d chứa gốc tọa độ O , kể cả đường thẳng d .



Vì $x, y \geq 1$ nên các cặp (x, y) thỏa mãn là $(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (3,1)$.

Vậy bạn Lan có thể mua được nhiều nhất 4 quyển vở sao cho có cả hai loại.

Câu 5: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 12 gam hương liệu, 9 lít nước và 315 gam đường để pha chế hai loại nước A và B . Để pha chế 1 lít nước A cần 45 gam đường, 1 lít nước và 0,5 gam hương liệu; để pha chế 1 lít nước B cần 15 gam đường, 1 lít nước và 2 gam hương liệu. Mỗi lít nước A nhận 60 điểm thưởng, mỗi lít nước B nhận 80 điểm thưởng. Giá trị lớn nhất điểm thưởng có thể nhận được là:

Lời giải

Trả lời: 640

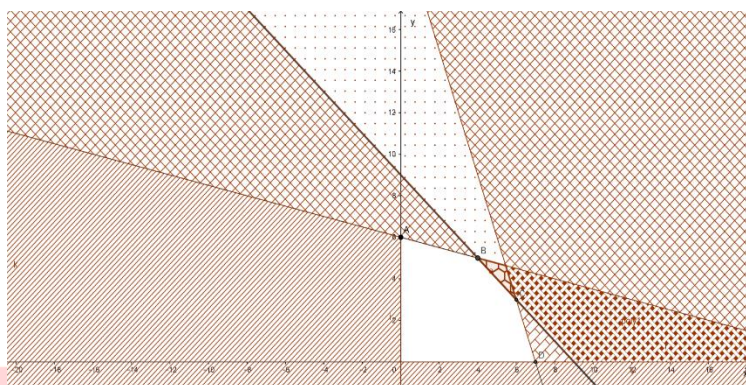


Gọi x và y lần lượt là số lít nước loại A và B cần pha chế. Khi đó theo đề bài ta có hệ bất

$$\text{phương trình } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 9 \\ 45x + 15y \leq 315 \\ 0,5x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

Số điểm thưởng đội chơi nhận được là $F(x; y) = 60x + 80y$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ với $(x; y)$ thỏa mãn hệ trên.

Miền nghiệm của hệ là ngũ giác $OABCD$ với $A(0; 6)$, $B(4; 5)$, $C(6; 3)$, $D(7; 0)$ và $O(0; 0)$.



Tính giá trị của $F(x; y)$ tại các đỉnh của ngũ giác:

$$F(0; 6) = 480, F(4; 5) = 640, F(6; 3) = 600, F(7; 0) = 420 \text{ và } F(0; 0) = 0.$$

So sánh các giá trị đó ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $F(4; 5) = 640$. Vậy cần pha chế 4 lít nước loại A và 5 lít nước loại B để số điểm thưởng nhận được là lớn nhất.

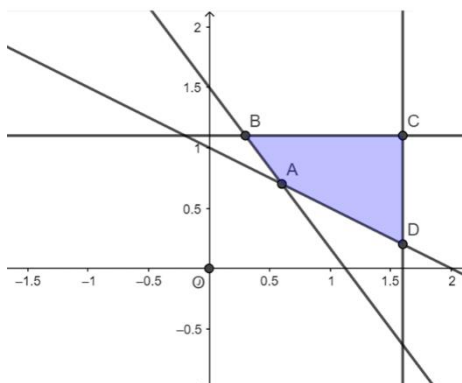
Câu 6: Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi ki-lô-gam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi ki-lô-gam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 220 nghìn đồng, mỗi kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Khi đó $x^2 + y^2$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1,3

$$\text{Theo bài ra, ta có hệ } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ trên là miền tứ giác $ABCD$



Chi phí để mua x kg thịt bò và y kg thịt lợn là $T = 220x + 110y$

T đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác ABCD

Tại A : $T = 220 \cdot 0,6 + 110 \cdot 0,7 = 209$

Tại B : $T = 220 \cdot 0,3 + 110 \cdot 1,1 = 187$

Tại C : $T = 220 \cdot 1,6 + 110 \cdot 1,1 = 473$

Tại D : $T = 220 \cdot 1,6 + 110 \cdot 0,2 = 374$.

Vậy T đạt GTNN khi $x = 0,3; y = 1,1$ nên $x^2 + y^2 = 1,3$.

Câu 7: Bác Long dự định trồng hai loại cây ăn trái là mít và xoài trong nông trại rộng 100 hecta. Biết mỗi hecta trồng mít cần 20 công chăm sóc và thu lại lợi nhuận 70 triệu đồng, mỗi hecta trồng xoài cần 40 công chăm sóc và thu lại lợi nhuận 90 triệu đồng. Biết rằng tổng số công cần dùng không được vượt quá 2800 công. Hỏi bác Long cần trồng mít và xoài trên diện tích là bao nhiêu hecta để thu được lợi nhuận là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 7800

Gọi x, y lần lượt là diện tích đất dùng để trồng mít và xoài

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y \leq 100$.

Số công cần dùng là $20x + 40y \leq 2800$ hay $x + 2y \leq 140$

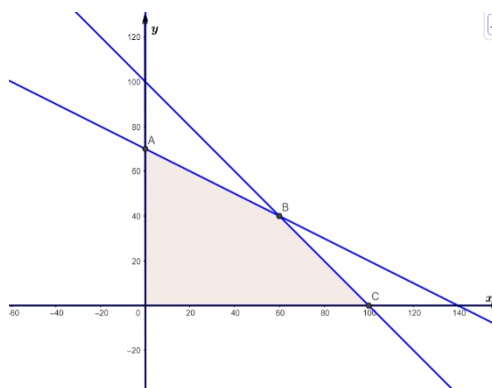
Tổng số tiền thu được là $F = 70x + 90y$.

Ta cần tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 140 \end{cases}$$
 sao cho $F = 70x + 90y$ đạt giá trị

lớn nhất.



Biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình trên ta được miền tứ giác OABC với $A(0;70)$, $B(60;40)$, $C(100;0)$ và $O(0;0)$ như hình bên dưới



Biểu thức $F = 70x + 90y$ đạt giá trị lớn nhất tại $(x; y)$ là tọa độ một trong các đỉnh của tứ giác.

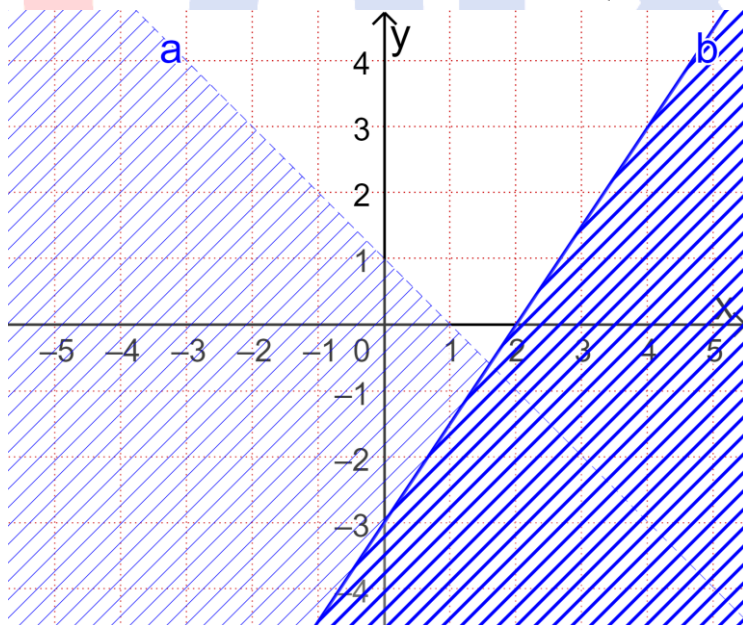
Ta có:

$$F(0;0) = 0, F(0;70) = 5600, F(100;0) = 7000, F(60;40) = 7800.$$

Khi đó giá trị lớn nhất tại $B(60;40)$ nghĩa là bác Long cần trồng 60 hecta mít và 40 hecta xoài thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 8:

Hình dưới đây biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y > 1 \\ 3x - 2y \leq 6 \end{cases}$



Miền nghiệm chứa bao nhiêu điểm có tọa độ là cặp số nguyên và có tung độ nhỏ hơn 2?

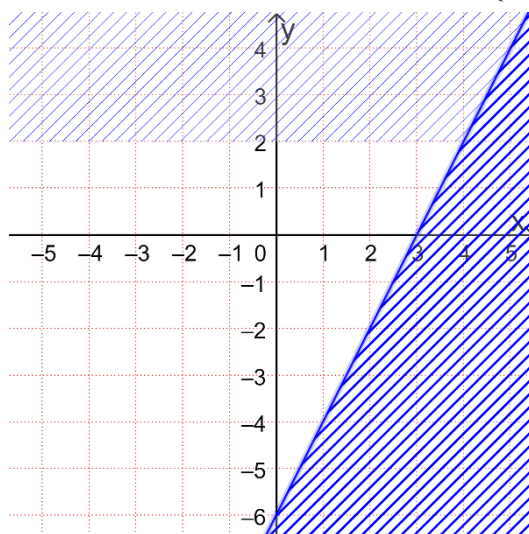
Lời giải

Trả lời: 3

Có 3 điểm thỏa yêu cầu bài toán là $(1;1), (2;1), (3;0)$.



Câu 9: Hình dưới đây biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y \leq 6 \\ y - 2 < 0 \end{cases}$:



Có bao nhiêu điểm mà toạ độ là cặp số nguyên dương (m, n) thoả mãn là nghiệm của hệ phương trình và $m^2 + n^2 > 2$,

Lời giải

Trả lời: 2

Có 2 điểm thoả yêu cầu bài toán là $(2;1), (3;1)$.

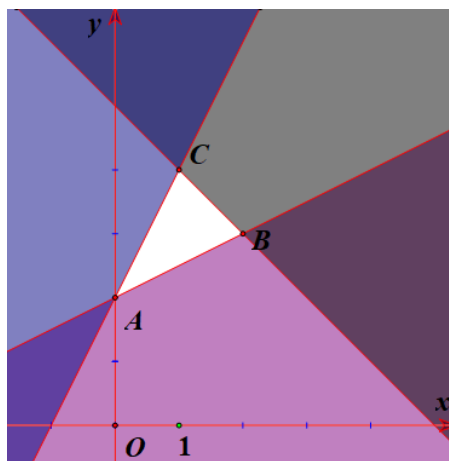
Câu 10: Xét biểu thức $F = y - x$ với $(x; y)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức F là :

Lời giải

Trả lời: 1

Vẽ các đường thẳng $d_1: 2x - y + 2 = 0$; $d_2: x - 2y + 4 = 0$; $d_3: x + y - 5 = 0$ trên cùng hệ trục Oxy .

Chọn điểm $M(0;1)$ thay vào các bất phương trình,, của hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2(1) \\ 2y - x \geq 4(2) \\ x + y \leq 5(3) \end{cases}$.



Ta được: $M(0;1)$ thuộc miền nghiệm của BPT, và không thuộc miền nghiệm của BPT.

Kết luận: Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tam giác ABC với $A(0;2); B(2;3); C(1;4)$.

Tìm x, y để $F = y - x$ nhỏ nhất.

Ta có $F(0;2) = 2; F(2;3) = 1; F(1;4) = 3$.

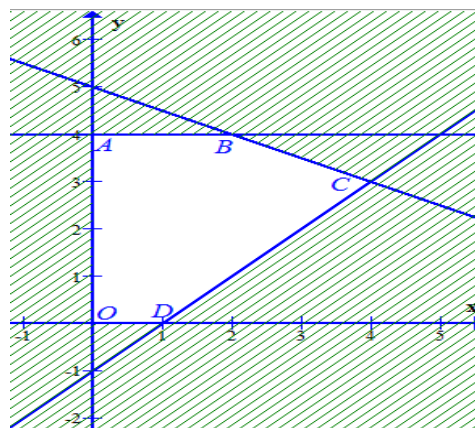
$\Rightarrow F_{\min} = T(2;3) = 1$

Câu 11: Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là

Lời giải

Trả lời: 10

Xét các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$



Khi đó $M(x; y)$ thuộc miền ngũ giác ABCDO.

Trong đó $A(0;4); B(2;4); C(4;3); D(1;0); O(0;0)$



Biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác đó.

Thay tọa độ của các đỉnh vào biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ ta có:

$$F(0; 4) = 8$$

$$F(2; 4) = 10$$

$$F(4; 3) = 10$$

$$F(1; 0) = 1$$

$$F(0; 0) = 0$$

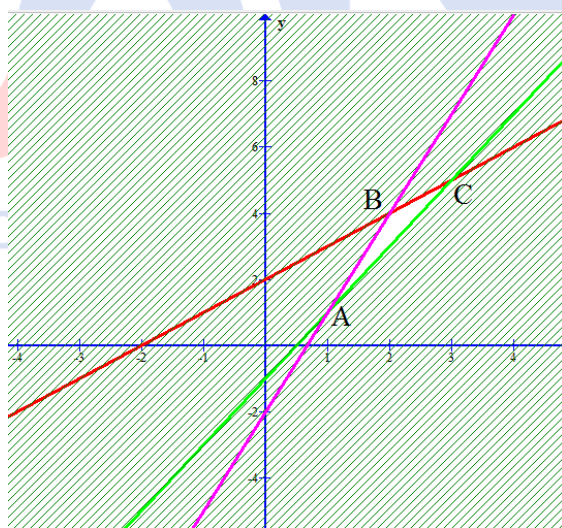
Vậy biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ đạt được giá trị lớn nhất bằng 10, tại điểm B hoặc C .

Câu 12: Cho các giá trị x, y thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 1 \leq 0 \\ 3x - y - 2 \geq 0 \end{cases}$$
. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = 3x + 2y.$$

Lời giải

Trả lời: 25



Miền nghiệm của hệ đã cho là miền trong tam giác ABC trong đó $A(1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(3; 5)$.

Giá trị lớn nhất của $T = 3x + 2y$ đạt được tại các đỉnh của tam giác ABC .

Do $T_A = T(1; 1) = 3.1 + 2.1 = 5$, $T_B = T(2; 4) = 3.2 + 2.4 = 14$ và $T_C = T(3; 5) = 3.3 + 2.5 = 25$ nên giá trị lớn nhất của $T = 3x + 2y$ là 25 đạt được khi $x = 3$ và $y = 5$.



Câu 13: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y \geq -4 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 trên mặt phẳng tọa độ. Từ đó tìm

tổng GTLN-GTNN của biểu thức $T = x + y$ với $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình trên.

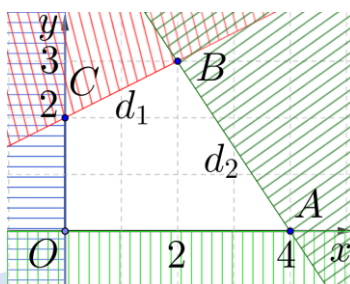
Lời giải

Trả lời: 5

Vẽ lần lượt các đường thẳng $d_1: x - 2y = -4$; $d_2: 3x + 2y = 12$.

Tìm miền nghiệm từng bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ các nửa mặt phẳng không thỏa mãn bất phương trình đó.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình thu được là miền tứ giác $OABC$ kẻ cả biên.



Tọa độ các đỉnh $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(2;3)$, $C(0;2)$.

Thay tọa độ các đỉnh trên vào $T = x + y$ ta được các giá trị là $T = 0, T = 4, T = 5, T = 2$.

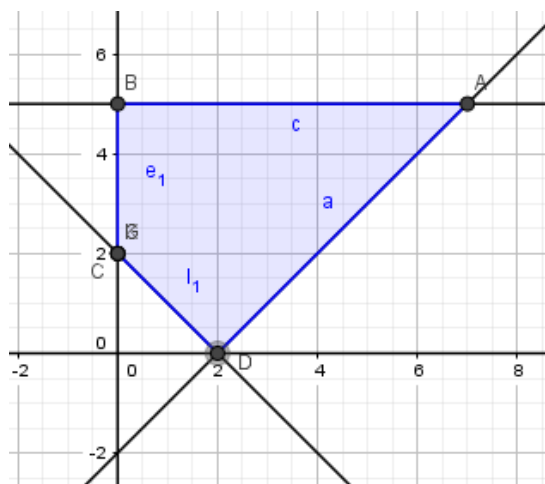
Vậy $\max T = 5, \min T = 0$.

Câu 14: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x - 2y$ với điều kiện
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$$
 là

Lời giải

Trả lời: -10

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$$
 trên hệ trục tọa độ như dưới đây:..



Nhận thấy biết thức $F = y - x$ chỉ đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm A, B, C hoặc D .

Ta có: $F(A) = 7 - 2 \times 5 = -3; F(B) = -2 \times 5 = -10$.

$F(C) = -2 \times 2 = -4, F(D) = 2 - 2 \times 0 = 2$.

Vậy $\min F = -10$ khi $x = 0, y = 5$.

Câu 15: Cho biểu thức $F(x; y) = 2x + y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x + y - 9 \leq 0 \\ x - y \leq 0 \\ y - 1 \leq 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất

của F bằng

Lời giải

Trả lời: 9

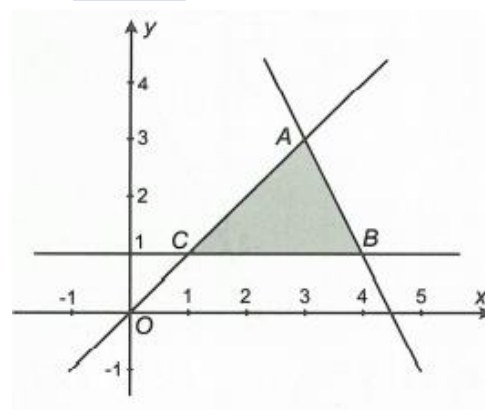
Trong mặt phẳng Oxy ta vẽ các đường thẳng có phương trình:

$2x + y - 9 = 0; x - y = 0; y - 1 = 0$.

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền tam giác ABC kể cả biên, được tô đậm, với $A(3; 3), B(4; 1), C(1; 1)$.

Ta có $F(3; 3) = 9; F(4; 1) = 9; F(1; 1) = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất là $F_{\max} = 9$ khi $x = 4; y = 1$ hoặc $x = 3; y = 3$.



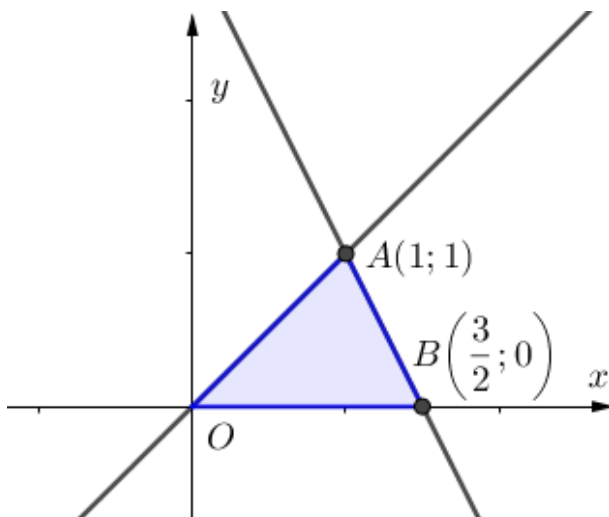
Câu 16: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \\ x + y - m > 0 \end{cases}$. Có bao nhiêu số tự nhiên $m \leq 50$ sao cho hệ bất phương

trình trên vô nghiệm

Lời giải

Trả lời: 49

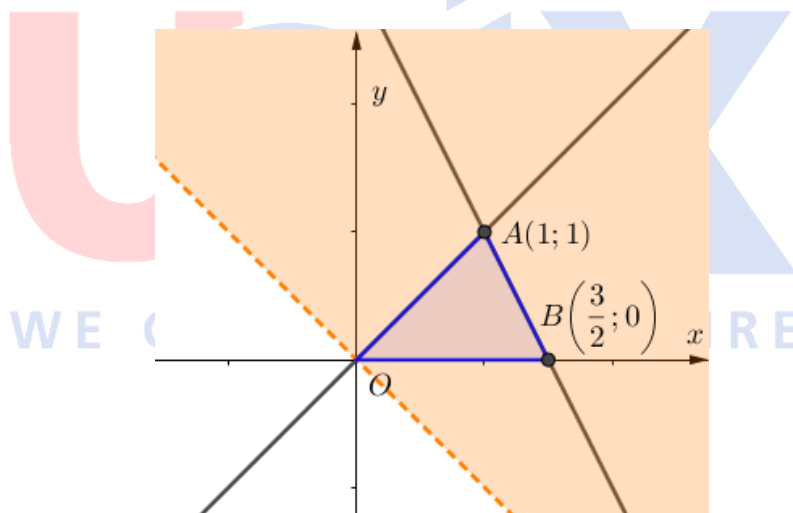
Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ là



Hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi miền nghiệm của bất phương trình $x + y - m > 0$ và miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ không có điểm chung

Ta có đường thẳng $x + y - m = 0$ là đường thẳng song song với đường thẳng $x + y = 0$

Mà miền nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x + y = 0$ chứa điểm A và không lấy đường thẳng $x + y = 0$



Từ hình vẽ ta có hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $m \geq 2$

Vậy có $50 - 2 + 1 = 49$ số tự nhiên m thỏa yêu cầu bài toán

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ $\begin{cases} x + y - z = 1 & (1) \\ 2x + 3y + mz = 3 & (2) \\ x + my + 3z = 2 & (3) \end{cases}$ vô nghiệm?

Lời giải



Trả lời: -3

Ta có:

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ 2x+3y+mz=3 & (2) \\ x+my+3z=2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(m+2)z=1 & (4) \\ x+my+3z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(m+2)z=1 \\ (1-m)y-4z=-1 & (5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(m+2)z=1 \\ (1-m)[1-(m+2)z]-4z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(2+m)z=1 \\ (m+3)(m-2)z=m-2 & (6) \end{cases}$$

Hệ đã cho vô nghiệm khi phương trình vô nghiệm.

$$\text{Phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)(m-2)=0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$$

Câu 18: Một nhà nông dân nọ có 8 sào đất trồng hoa màu. Biết rằng 1 sào trồng đậu cần 20 công và lãi được 3 triệu đồng, 1 sào trồng cà cần 30 công và lãi được 4 triệu đồng. Người nông dân trồng được x sào đậu và y sào cà thì thu được tiền lãi cao nhất. Tính giá trị biểu thức $F=3x+2y$ biết rằng tổng số công không quá 180.

Lời giải

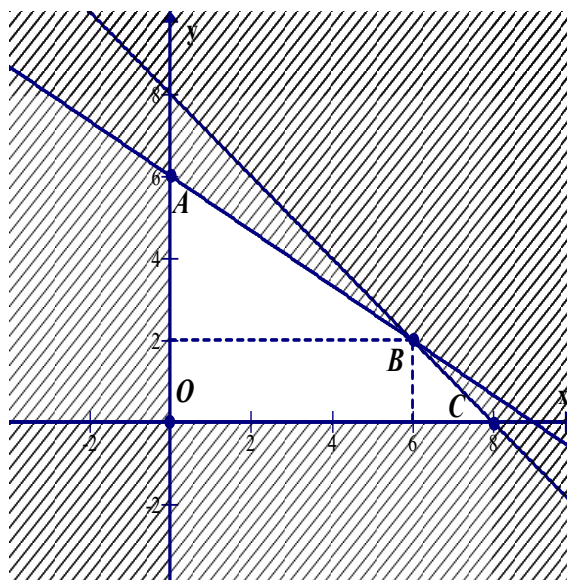
Trả lời: 22

Ta có x, y lần lượt là số sào đậu và số sào cà ($0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 8$).

$$\text{Khi đó ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} x+y \leq 8 \\ 20x+30y \leq 180 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Tiền lãi: } T(x, y) = 3x + 4y$$

Bài toán trở về bài toán tìm x, y thỏa mãn sao cho $T(x, y)$ lớn nhất và xảy ra tại một trong các điểm O, A, B, C ở hình 1. Tại điểm B thì $T(x, y)$ đạt giá trị lớn nhất. Do đó cần trồng 6 sào đậu và 2 sào cà. Hay ta có $x=6; y=2 \Rightarrow F=3.6+2.2=22$.



Câu 19: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là An và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II . Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì An phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì An phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng An không thể làm quá 180 giờ và Bình không thể làm quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

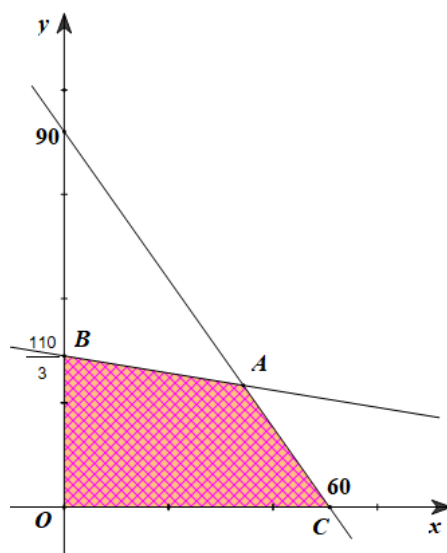
Lời giải

Trả lời: 32

Gọi số sản phẩm I sản xuất trong một tháng là x , số sản phẩm II sản xuất trong một tháng là y ($x \geq 0, y \geq 0$). Số tiền lãi trong 1 tháng là: $f(x, y) = 0,5x + 0,4y$

Theo bài ra ta có:
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 180 \\ x + 6y \leq 220 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ x + 6y = 220 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Miền thỏa mãn là miền gạch chéo:

Ta có $O(0;0)$; $B\left(0; \frac{110}{3}\right)$; $A(40;30)$; $C(60;0)$

Khi đó:

$$f(O) = f(0,0) = 0$$

$$f(A) = 0,5.40 + 0,4.30 = 32 \text{ (triệu)}$$

$$f(B) = 0,4 \cdot \frac{110}{3} = \frac{44}{3} \approx 14,67 \text{ (triệu)}$$

$$f(C) = 0,5.60 + 0,4.0 = 30 \text{ (triệu)}$$

Vậy lợi nhuận lớn nhất trong một tháng là 32 triệu khi sản xuất 40 sản phẩm loại I và 30 sản phẩm loại II.

Câu 20: Một xưởng sản xuất có hai máy, sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I cần máy thứ nhất làm việc trong 3 giờ và máy thứ hai làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm loại II cần máy thứ nhất làm việc trong 1 giờ và máy thứ hai làm việc trong 1 giờ. Mỗi máy không đồng thời làm hai loại sản phẩm cùng lúc. Một ngày máy thứ nhất làm việc không quá 6 giờ, máy thứ hai làm việc không quá 4 giờ. Hỏi một ngày tiền lãi lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 6,8

Gọi x, y ($x \geq 0, y \geq 0$) lần lượt là số tấn sản phẩm loại I, loại II sản xuất trong một ngày. Khi đó số tiền lãi một ngày là $L = 2x + 1,6y$, số giờ làm việc của mỗi ngày của máy thứ nhất là $3x + y$ và của máy thứ hai là $x + y$.

Vì một ngày máy thứ nhất làm việc không quá 6 giờ, máy thứ hai làm việc không quá 4 giờ nên x, y thỏa mãn hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \quad (*) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



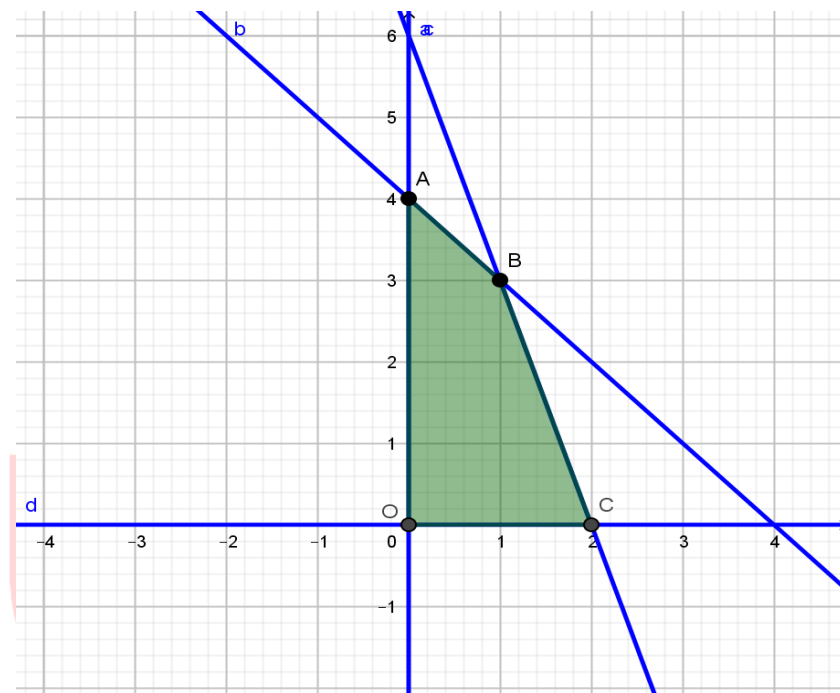
Khi đó bài toán trở thành: trong các nghiệm của hệ bất phương trình (*), tìm nghiệm $x = x_0, y = y_0$ sao cho $L = 2x + 1,6y$ lớn nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta sẽ biểu diễn phần mặt phẳng chứa điểm $M(x; y)$ thỏa mãn (*).

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ kẻ cả miền trong của tứ giác.

Biểu thức $L = 2x + 1,6y$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$.

Tính giá trị của L tại các đỉnh $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B(1;3)$, $C(2;0)$, ta thấy L đạt giá trị lớn nhất là $\max L = 6,8$ tại đỉnh B .



Vậy tiền lãi lớn nhất trong một ngày của xưởng là 6,8 triệu đồng.

Câu 21: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 gam hương liệu, 9 lít nước và 210 gam đường để pha chế nước ngọt loại I và nước ngọt loại II. Để pha chế 1 lít nước ngọt loại I cần 10 gam đường, 1 lít nước và 4 gam hương liệu. Để pha chế 1 lít nước ngọt loại II cần 30 gam đường, 1 lít nước và 1 gam hương liệu. Mỗi lít nước ngọt loại I được 80 điểm thưởng, mỗi lít nước ngọt loại II được 60 điểm thưởng. Hỏi số điểm thưởng cao nhất có thể của mỗi đội trong cuộc thi là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 640

Gọi số lít nước ngọt loại I là x và số lít nước ngọt loại II là y .

Khi đó ta có hệ điều kiện về vật liệu ban đầu mà mỗi đội được cung cấp:

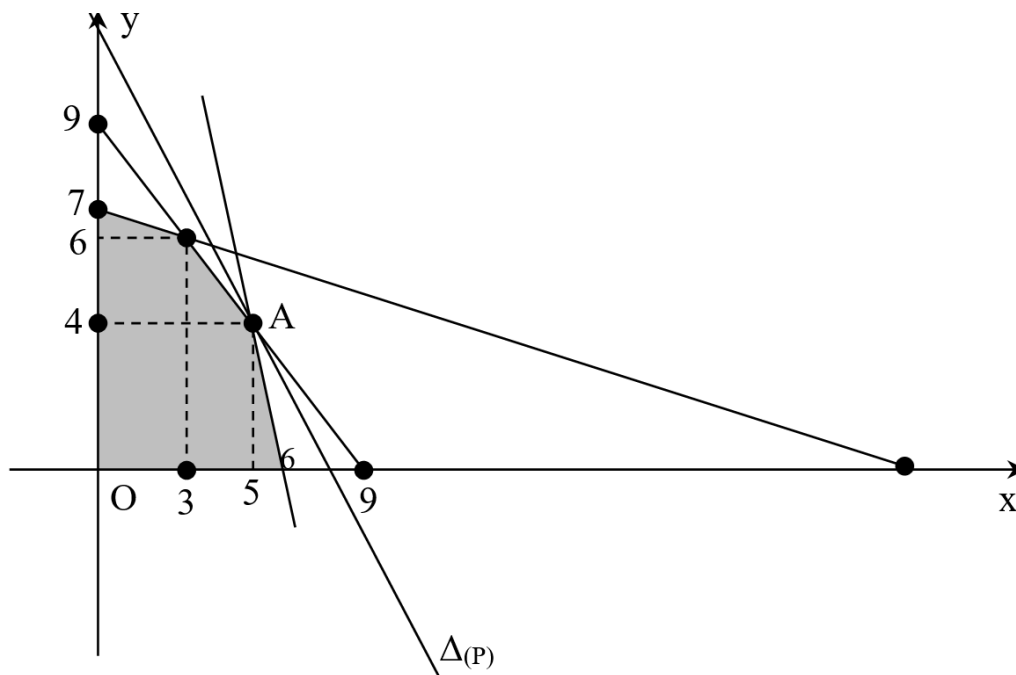
$$\begin{cases} 10x + 30y \leq 210 \\ 4x + y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 210 \\ 4x + y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Điểm thưởng đạt được: $P = 80x + 60y$



Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P trong miền D được cho bởi hệ điều kiện

Biến đổi biểu thức $P = 80x + 60y \Leftrightarrow 80x + 60y - P = 0$ đây là họ đường thẳng $\Delta_{(P)}$ trong hệ tọa độ Oxy . Miền D được xác định trong hình vẽ bên dưới:



Giá trị lớn nhất của P ứng với đường thẳng $\Delta_{(P)}$ đi qua điểm $A(5;4)$, suy ra:

$$80 \cdot 5 + 60 \cdot 4 - P = 0 \rightarrow P = 640 = P_{\max}.$$

Câu 22: Một nhà máy sản xuất hai sản phẩm A và B . Biết để sản xuất ra 1 kg sản phẩm A cần 5 kg nguyên liệu I và 4 kg nguyên liệu II ; để sản xuất 2 kg sản phẩm B cần 4 kg nguyên liệu I và 4 kg nguyên liệu II . Biết giá của 1 kg nguyên liệu I là 1 triệu đồng, giá của 1 kg nguyên liệu II là 2 triệu đồng. Giá bán của 1 kg sản phẩm A là 18 triệu đồng và giá 1 kg sản phẩm B là 8,25 triệu đồng. Biết chi phí vận chuyển là 20 triệu đồng và nhà máy hiện chỉ có 175 kg nguyên liệu I và 150 kg nguyên liệu II . Nhà máy phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm A để thu được lợi nhuận lớn nhất

Lời giải

Trả lời: 25

Đặt $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số kg sản phẩm A và B mà nhà máy sản xuất được.

Từ giả thiết bài toán ta có hệ bất phương trình 2 ẩn sau:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 5x + 2y \leq 175 \\ 4x + 2y \leq 150 \end{cases}$$

Số tiền mà nhà máy cần để sản xuất x kg sản phẩm A và y kg sản phẩm B là

$$1. 5x + 2y + 2. 4x + 2y = 13x + 6y \text{ triệu đồng}$$

Số tiền mà nhà máy thu được khi bán x kg sản phẩm A và y kg sản phẩm B là

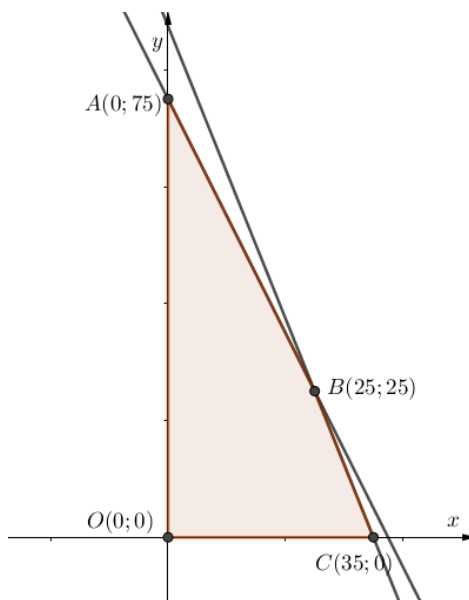


$$18x + 8,25y \text{ triệu đồng}$$

Số tiền lời mà nhà máy thu được khi bán x kg sản phẩm A và y kg sản phẩm B là

$$P = 18x + 8,25y - 13x - 6y - 20 = 5x + 2,25y - 20 \text{ triệu đồng}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là



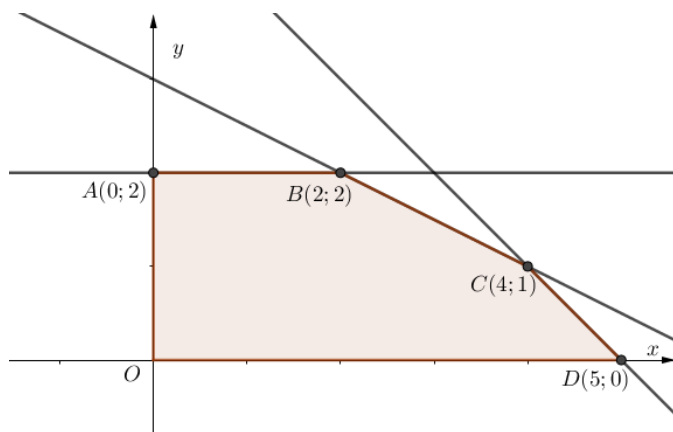
Thay A, B, C vào P ta được: $P_A = 148,75$ triệu đồng, $P_B = 161,25$ triệu đồng, $P_C = 155$ triệu đồng. Vậy để lợi nhuận là lớn nhất nhà máy phải sản xuất 25 sản phẩm A

Câu 23: Biết miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$
 là một đa giác. Hãy tính diện tích của đa giác đó

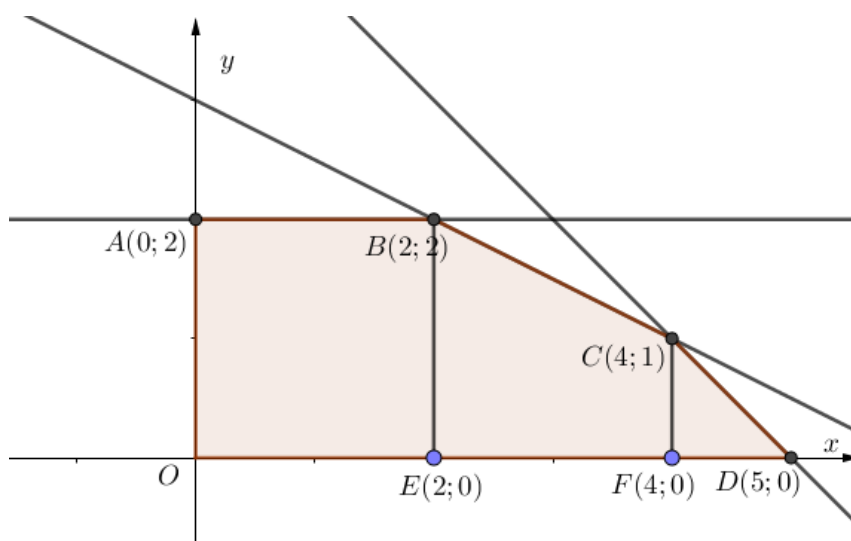
Lời giải

Trả lời: 7,5

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$
 là



Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là ngũ giác $OABCD$

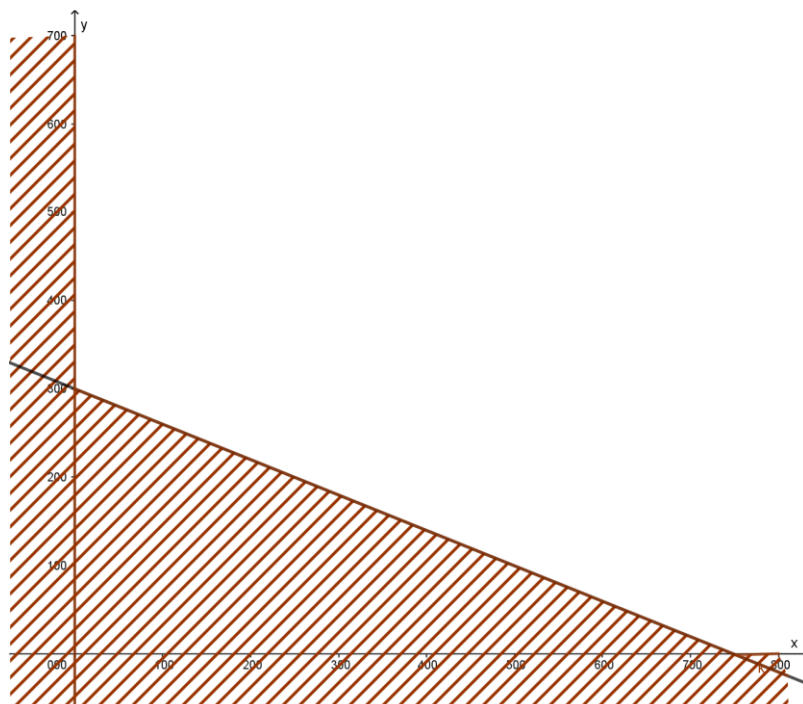


Ta có $S = S_{AEOB} + S_{BEFC} + S_{CFD} = \frac{15}{2}$

Câu 24: Nhân dịp tết trung thu, một rạp xiếc tổ chức lưu diễn tại các xã. Vé được bán ra gồm 2 loại: Loại 1: 20000 đồng/vé; Loại 2: 50000 đồng/vé. Người ta tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền mỗi buổi biểu diễn phải đạt tối thiểu 15 triệu đồng. Gọi x, y lần lượt là số vé loại 1 và loại 2 mà rạp xiếc bán được. Trong trường hợp rạp xiếc có lãi, tính giá trị nhỏ nhất của $x + y$.

Lời giải

Trả lời: 301



Từ giả thiết, ta có
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20000x + 50000y > 15000000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 5y > 1500 \end{cases}.$$

Vẽ các đường thẳng $x = 0$; $y = 0$; $2x + 5y = 1500$ trên cùng hệ trục tọa độ, khi đó miền nghiệm của hệ là phần không gian không bị gạch. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y$ chỉ có thể đạt được tại các điểm $(0; 300)$; $(750; 0)$. Thay tọa độ các điểm $(0; 300)$; $(750; 0)$ vào biểu thức $x + y$, ta có giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y$ là 300. Tuy nhiên, do miền nghiệm của hệ không lấy bờ nên ta có $x + y \geq 301$.

Câu 25: Một cửa hàng có kế hoạch nhập về hai loại máy hút bụi I và II , giá mỗi chiếc lần lượt là 10 triệu đồng và 15 triệu đồng với số vốn ban đầu không quá 2 tỉ đồng. Loại máy I mang lại lợi nhuận 2,5 triệu đồng cho mỗi máy bán được và loại máy II mang lại lợi nhuận là 3 triệu đồng cho mỗi máy bán được. **C.** Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu hàng tháng sẽ không vượt quá 150 máy. Giả sử trong một tháng cửa hàng cần nhập số máy hút bụi loại I là x và số máy hút bụi loại II là y . Lợi nhuận thu được trong tháng của cửa hàng lớn nhất là

Lời giải

Trả lời: 425

Giả sử cửa hàng cần nhập số máy hút bụi loại I là x và số máy hút bụi loại II là y . Khi đó ta có $x \geq 0$, $y \geq 0$.

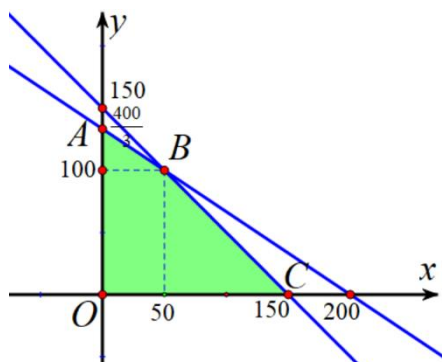
Số tiền để nhập hai loại máy hút bụi với số lượng như trên là: $10x + 15y$.

Số vốn ban đầu không quá 2 tỉ đồng, nên ta có $10x + 15y \leq 2000$ hay $2x + 3y \leq 400$.

Vì tổng nhu cầu hàng tháng không vượt quá 150 máy nên $x + y \leq 150$.



Từ đó ta được hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 400 \\ x + y \leq 150. \end{cases}$$



Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác $OABC$ với tọa độ các đỉnh $O(0;0)$, $A\left(0; \frac{400}{3}\right)$, $B(50;100)$ và $C(150;0)$.

Gọi F là lợi nhuận mà cửa hàng thu được trong tháng đó khi bán x máy hút bụi loại I và y máy hút bụi loại II . Khi đó $F(x; y) = 2,5x + 3y$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ khi $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình trên.

Tính giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của tứ giác $OABC$:

$$F(0;0) = 0, F\left(0; \frac{400}{3}\right) = 400, F(50;100) = 425, F(150;0) = 375.$$

So sánh các giá trị thu được của F , ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $F(50;100) = 425$.

Vậy lợi nhuận thu được trong tháng của cửa hàng lớn nhất là 425 triệu đồng khi cửa hàng nhập 50 máy hút bụi loại I và 100 máy hút bụi loại II .

Câu 26: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II . Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 700 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Tính số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng.

Lời giải

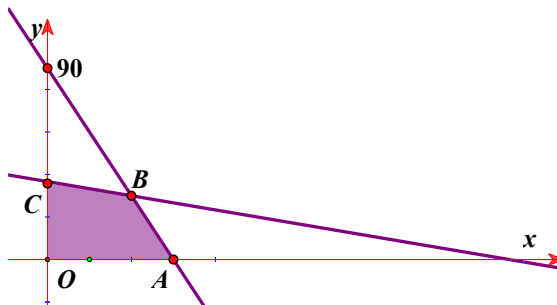
Trả lời: 41

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y là hai số tự nhiên.



Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 180 \\ x + 6y \leq 220 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ trên là miền đa giác $OABC$.



Với $O(0;0)$, $A(60;0)$, $C\left(0; \frac{100}{3}\right)$ và tọa độ B là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ x + 6y = 220 \end{cases} \Rightarrow B(40;30)$$

Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,7y$.

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A , B , C .

Khi đó:

$$T(60;0) = 0,5 \cdot 60 + 0,7 \cdot 0 = 30$$

$$T(40;30) = 0,5 \cdot 40 + 0,7 \cdot 30 = 41$$

$$T(0;0) = 0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot 0 = 0$$

$$T\left(0; \frac{100}{3}\right) = 0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot \frac{100}{3} = \frac{70}{3}$$

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 41 triệu đồng.