



CHƯƠNG

III

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

BÀI 6. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



I LÝ THUYẾT.

Cho tam giác ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, S là diện tích tam giác. Giả sử h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh A, B, C ; m_a, m_b, m_c lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh A, B, C . R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC . Ta có kết quả sau đây:

1. Định lý cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

*Hệ quả của định lý cosin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$



Luyện tập 1. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\hat{A} = 45^\circ$. Tính độ dài các cạnh và độ lớn các góc còn lại của tam giác.

$$\text{Áp dụng định lý cosin: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 89 - 40\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}}.$$

$$\text{Áp dụng định lý cosin: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(89 - 40\sqrt{2}) + 5^2 - 8^2}{2(89 - 40\sqrt{2}) \cdot 5} \approx -0,0202 \Rightarrow B \approx 91^\circ 9'$$

$$C \approx 180^\circ - 45^\circ - 91^\circ 9' 26,83'' \approx 43^\circ 50' 33,17''.$$

2. Định lý sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.



Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có $b = 8$, $c = 5$ và $\hat{B} = 80^\circ$. Tính số đo các góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài cạnh còn lại của tam giác.

Giải

Áp dụng Định lý sin cho tam giác ABC ta có:



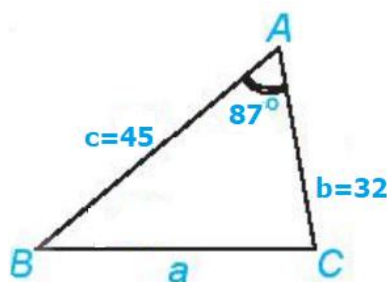
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \begin{cases} \sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{5 \cdot \sin 80^\circ}{8} \approx 0,62 \\ R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{8}{2 \cdot \sin 80^\circ} = 4,06 \end{cases}$$

3. Giải tam giác và ứng dụng thực tế.

Việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó được gọi là giải tam giác.

► **Luyện tập 3.** Giải tam giác ABC , biết $b = 32, c = 45$ và $\hat{A} = 87^\circ$.

Giải



Áp dụng Định lí côsin cho tam giác ABC , ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot \cos 87^\circ = 2898,27$$

Suy ra $a \approx 53,84$.

Áp dụng Định lí sin cho tam giác ABC , ta có: $\frac{53,84}{\sin 87^\circ} = \frac{32}{\sin B}$

$$\text{Suy ra } \sin B = \frac{32 \cdot \sin 87^\circ}{53,84} \approx 0,59 \Rightarrow B \approx 36^\circ 9'.$$

$$\text{Ta có } C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (36^\circ 9' + 87^\circ) = 56^\circ 51'.$$

Chú ý. Áp dụng các Định lí côsin, sin và sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính (gần đúng) các cạnh và các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

- Biết hai cạnh và góc xen giữa;
- Biết ba cạnh;
- Biết một cạnh và hai góc kề.

4. Công thức diện tích:

$$\text{a) } S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

$$\text{b) } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\text{c) } S = \frac{abc}{4R}$$



d) $S = pr$ với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

e) Công thức Hê- Rông $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Luyện tập 4. Tính diện tích tam giác ABC có $b = 2, \hat{B} = 30^\circ, \hat{C} = 45^\circ$.

Giải

Ta có $A = 180^\circ - (C + B) = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$.

Áp dụng Định lí sin cho tam giác ABC ta có: $\frac{c}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} \Rightarrow c = \frac{2 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 105^\circ = 1 + \sqrt{3}$.

5. Công thức trung tuyến (bổ sung)

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

3.5. Cho tam giác ABC có $a = 6, b = 5, c = 8$. Tính $\cos A, S, r$.

Lời giải

Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{53}{80}$

Nửa chu vi là $P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+5+8}{2} = \frac{19}{2}$. Áp dụng công thức Heron ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{19}{2} \left(\frac{19}{2} - 6 \right) \left(\frac{19}{2} - 5 \right) \left(\frac{19}{2} - 8 \right)} = \frac{3\sqrt{399}}{4}$$

Do $S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{399}}{38}$.

3.6. Cho tam giác ABC có $a = 10, A = 45^\circ, B = 70^\circ$. Tính R, b, c .

Lời giải

Áp dụng định lý sin ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{10}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}$.

Ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 13,289$

Vì $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - A - B = 65^\circ \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 12,82$



3.7. Giải tam giác ABC và tính diện tích của tam giác đó, biết $A = 15^\circ, B = 130^\circ, c = 6$.

Lời giải

Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - A - B = 35^\circ$

Áp dụng định lý sin ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{6 \sin 15^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 2,71 \\ b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{6 \sin 130^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 8,01 \end{cases}$

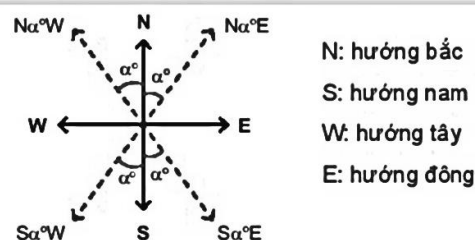
Diện tích của tam giác là: $S = \frac{1}{2} a.c.\sin B = \frac{1}{2} .2,71.6.\sin 130^\circ \approx 6,228$

3.8. Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A , đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

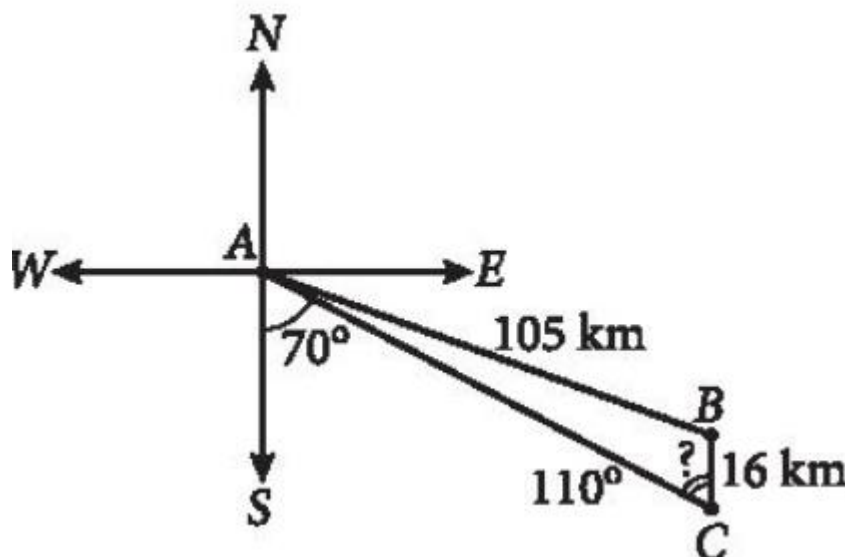
a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

Hướng $S\alpha^\circ E$ là hướng tạo với hướng nam góc α° và tạo với hướng đông góc $90^\circ - \alpha^\circ$. Các hướng $S\alpha^\circ W, N\alpha^\circ E, N\alpha^\circ W$ cũng được định nghĩa một cách tương tự.



Lời giải



a) Theo giả thiết ta có: $AB = 105 \text{ km}, BC = 16 \text{ km}$,

Góc $BAS = 70^\circ \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

Khoảng cách từ A tới đảo tàu neo đậu bằng đoạn AC .

Áp dụng định lý cosin ta có:



$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B}$$

$$= \sqrt{105^2 + 16^2 - 2 \cdot 105 \cdot 16 \cdot \cos 110^\circ} = 115,5 \text{ km}$$

b) Ta có $\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \approx 0,994 \Rightarrow A \approx 6^\circ 17' \Rightarrow SAC = 70^\circ - 6^\circ 17' = 63^\circ 42'$.

Vậy hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là $S63^\circ 42'E$.

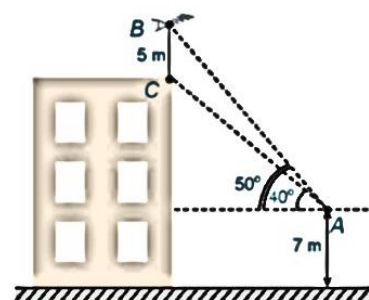
3.9. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten

cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so

với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng

là 50° và 40° so với phương nằm ngang

(H.3.18).



Hình 3.18

a) Tính các góc của tam giác ABC .

b) Tính chiều cao của tòa nhà.

Lời giải

a) Ta có $BAC = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$,

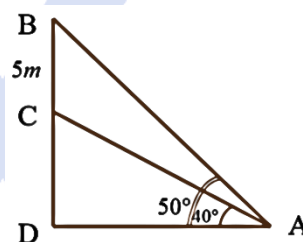
$$ABC = 90^\circ - BAD = 40^\circ \Rightarrow ACB = 180^\circ - ABC - BAC = 130^\circ$$

b) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,51.$$

Xét tam giác ACD vuông tại D có $CD = AC \cdot \sin 40^\circ \approx 11,9$

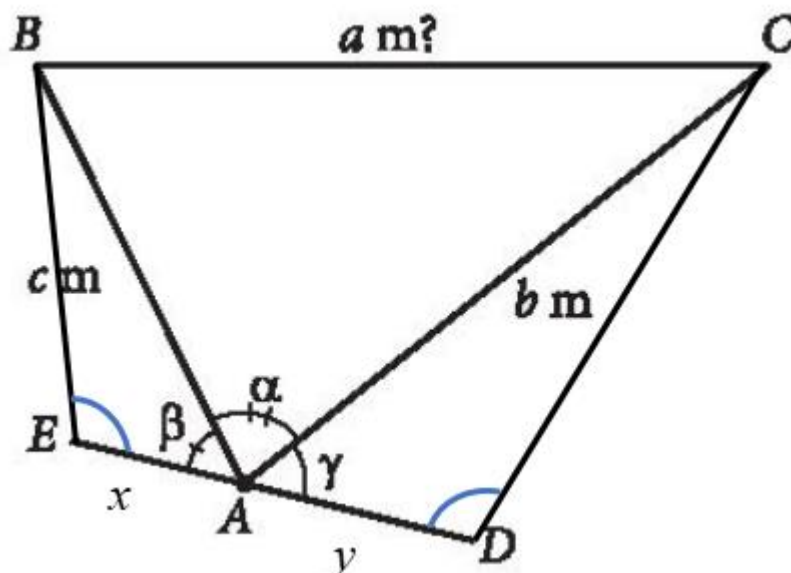
Vậy chiều cao của tòa nhà là: $11,9 + 7 = 18,9 \text{ m}$.



3.10. Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được). Đảo Yến nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình



Lời giải



Gọi B, C là hai vị trí ngoài cùng mà ta quan sát khi nhìn từ bãi biển

Từ một điểm A trên bãi biển dùng giác kế ta xác định được góc $BAC = \alpha$.

Lấy điểm E, D trên bãi biển sao cho E, A, D thẳng hàng và có độ dài đoạn $EA = x$; $AD = y$ mét.

Ta xác định được $EAB = \beta$. Từ đó suy ra được $CAD = \gamma$.

Ta dùng giác kế ta xác định được các góc AEB ; ADC .

Từ đó áp dụng định lý sin cho hai tam giác ABE và ADC ta xác định được AB và AC .

Sau đó ta sử dụng định lý cosin trong ABC tính được bề rộng BC của hòn đảo.

3.11. Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19.

Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



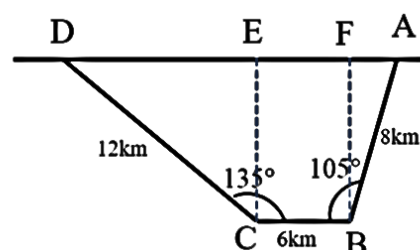
Hình 3.19

Lời giải

Dựng CE, BF vuông góc với AD .

Xét tam giác CDE vuông tại E có $D = C = 45^\circ$

$$\Rightarrow DE = CD \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \text{ km}.$$





Xét tam giác ABF vuông tại F có $B = 15^\circ \Rightarrow AF = AB \cdot \sin 15^\circ = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) km$.

Mặt khác $EF = BC = 6 km$

$$\Rightarrow AD = DE + EF + FA = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \approx 16,56 km.$$

Vậy độ dài đường mới sẽ giảm $9,44 km$ so với đường cũ.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: GIẢI TAM GIÁC

{Tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.}

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lý cosin, hệ quả của định lý cosin, định lý sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, A = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

Lời giải

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{-1}{2} = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}. \end{aligned}$$

Câu 2: Cho tam giác ABC có $a = 7; b = 8; c = 5$. Tính A, S, h_a, R .

Lời giải

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

$$\text{Ta có: } S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Rightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{4 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3: Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2, BC = 5, CA = 6$. Tính độ dài đường trung tuyến MA , với M là trung điểm của BC .

Lời giải

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có:



$$MA = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{2^2 + 6^2}{2} - \frac{5^2}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}.$$

Câu 4: Tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Do tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm nên

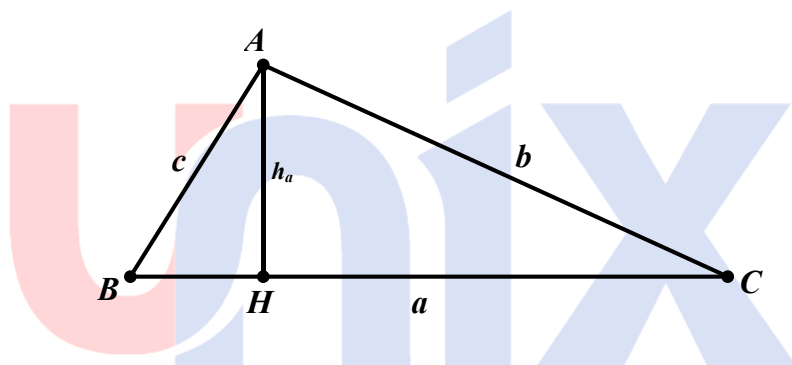
$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{2 \cdot 24}{6 + 8 + 10} = 2$.

Câu 5: Cho tam giác ABC có $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác ABC .

Lời giải



Theo định lí hàm cos ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$.

Ta lại có: $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$.

Vì $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ nên $h_a = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Vậy $h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

DẠNG 2: HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC, NHẬN DẠNG TAM GIÁC



PHƯƠNG PHÁP.

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.



2 BÀI TẬP.

Câu 6: Cho tam giác ABC thỏa $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$. Tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b = c$$

Tam giác ABC cân tại **A**.

Câu 7: Chứng minh trong tam giác ABC ta có: $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

Lời giải

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác ta có: } \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow 2R \cdot \sin B = b$$

$$\text{Do đó: } h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow h_a = b \cdot \sin C \text{ (đúng)}$$

Câu 8: Cho tam giác ABC . Chứng minh $S = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } VP = R \cdot r \cdot \left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right) = r \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = r \cdot p = S \text{ (đpcm).}$$

Câu 9: Cho tam giác ABC thỏa $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \\ a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -bc + 2bc \cdot \cos A = 0 \\ b^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ b = c \end{cases}$$

Vì tam giác ABC cân có 1 góc bằng 60° nên tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 10: Chứng minh trong tam giác ABC ta có: $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \sin A$

Lời giải

$$VT = \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4aR} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4aR} = \frac{2a^2}{4aR} = \frac{a}{2R} = \sin A$$

DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ

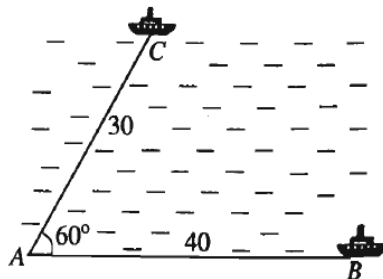
1 PHƯƠNG PHÁP.

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lý cosin, hệ quả của định lý cosin, định lý sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.



2 BÀI TẬP.

Câu 11: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?



Lời giải

Ta có: Sau $2h$ quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30.2 = 60\text{ km}$.

Sau $2h$ quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80\text{ km}$.

Vậy: sau $2h$ hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$.

Câu 12: Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80\text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$ so với phương nằm ngang. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB (chính xác đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Ta có: Trong tam giác vuông CDA : $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$.

Trong tam giác vuông CDB : $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$.

Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91\text{ m}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 13: Cho tam giác ABC có $a = 13, b = 8, c = 7$. Tính góc A , suy ra S, h_a, R, r, m_a .

Lời giải

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28\sqrt{3}}{13}$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 13}{4 \cdot 14\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$$S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 14\sqrt{3}}{7+8+13} = \sqrt{3}$$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}$$



Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 17 \text{ Suy ra } BC = \sqrt{17}$$

$$\text{Vì } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ nên } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Theo công thức tính diện tích ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{17}.h_a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{1}{2}.\sqrt{17}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{Vậy độ dài đường cao kẻ từ } A \text{ là } h_a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$$

Câu 15: Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 4$ và $A = 60^\circ$.

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính $\tan C$

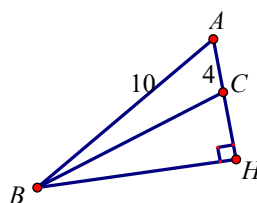
Lời giải

a) Theo định lí côsin ta có

$$BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2.10.4 \cos 60^\circ = 76 \\ \Rightarrow BC \approx 8,72$$

$$\text{Suy ra chu vi tam giác là } 2p \approx 10 + 4 + 8,72 = 22,72$$

b) (Hình 2.23a)



Hình 2.23a

Kẻ đường cao BH ta có

$$AH = AB \cos 60^\circ = 5 \\ \Rightarrow HC = 5 - 4 = 1$$



$$BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}. \text{ Vậy } \tan C = -\tan BCH = -\frac{HB}{HC} = -5\sqrt{3}$$

Câu 16: Giải tam giác ABC biết $A = 60^\circ$, $B = 40^\circ$ và $c = 14$.

Lời giải

$$\text{Ta có } C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

Câu 17: Giải tam giác ABC , biết:

$$b = 4,5; \quad A = 30^\circ; \quad C = 75^\circ$$

Lời giải

$$\text{Ta có } B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ = C$$

suy ra tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow c = b = 4,5$.

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4,5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow a \approx 2,33.$$

Câu 18: Cho tam giác ABC cân tại A biết $a = \sqrt{3}$; $B = C = 30^\circ$. Tính R, r , cạnh c, b , suy ra S

Lời giải

Áp dụng định lí sin:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow b = c = 2R \sin 30^\circ = 1$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2 - \sqrt{3}).$$

Câu 19: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

$$\text{Ta có } C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$



Theo định lí sin ta có $a = 2R \sin A = 2.3. \sin 30^\circ = 3$,

$$b = 2R \sin B = 2.3. \sin 45^\circ = 6. \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$c = 2R \sin C = 2.3. \sin 105^\circ \approx 5,796$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + c^2 - a^2}{4} \approx \frac{2 \cdot 18 + 5,796^2 - 9}{4} = 23,547$$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \\ \approx \frac{3\sqrt{2} \cdot 5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$$

Câu 20: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lí cosin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

Câu 21: Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và trung tuyến $AM = AB = c$ chứng minh rằng:

a) $a^2 = 2(b^2 - c^2)$

b) $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức đường trung tuyến

$$\text{Ta có } b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 = \frac{a^2}{2} + 2c^2 \Rightarrow a^2 = 2(b^2 - c^2) (*)$$

b) Theo định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4R^2 \sin^2 A \\ b^2 = 4R^2 \sin^2 B \\ c^2 = 4R^2 \sin^2 C \end{cases}$$

Thay vào (*) ta có đpcm

Câu 22: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2 (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow \frac{4}{9}m_b^2 + m_c^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \left[\frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \right] = a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$$

Câu 23: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;

a) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

Lời giải

a) Áp dụng định lí côsin ta có:

$$\begin{aligned} VP &= b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2a} = a = VT \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} \cdot \cos C + \frac{c}{2R} \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

Câu 24: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có: $h_a = 2R \sin B \sin C$

Lời giải



$$h_a = 2R \sin B \sin C \Leftrightarrow \frac{2S}{a} = 2R \frac{b}{2R} \sin C$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin C \text{ (đúng)}$$

Câu 25: Nhận dạng tam giác ABC biết: $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

Lời giải

Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ah_a$ suy ra

$$a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow a - b^2 + b - c^2 + c - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác ABC đều.

Câu 26: Cho tam giác ABC . Chứng minh tam giác ABC cân nếu $h_a = c \cdot \sin A$

Lời giải

Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bc \sin A$ * thay $h_a = c \cdot \sin A$ vào (*) được:

$$bh_a = ah_a \Leftrightarrow a = b \text{ suy ra tam giác } ABC \text{ cân tại } C$$

WE COACH.WE INSPIRE