



CHƯƠNG

IV

VECTƠ

BÀI 10: VECTO TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ



LÝ THUYẾT.

I. TỌA ĐỘ CỦA VECTO

1. Trục tọa độ

Trục tọa độ (còn gọi là trục, hay trục số) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm O và một vector $\vec{i}$ có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là gốc tọa độ, vector đơn vị $\vec{i}$ gọi là vector đơn vị của trục. Điểm M trên trục biểu diễn số x_0 nếu $\overrightarrow{OM} = x_0 \vec{i}$ (Hình 4.32.b).



Hình 4.32.b

Cho hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$. Ta gọi số a là độ dài đại số của vector $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $a = \overrightarrow{AB}$.

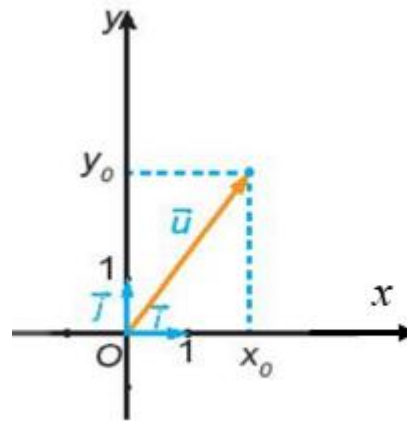
Nhận xét.

- Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ thì $\overrightarrow{AB} = AB$, còn nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{i}$ thì $\overrightarrow{AB} = -AB$.
- Nếu hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{i})$, có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overrightarrow{AB} = b - a$.

2. Hệ tọa độ

Định nghĩa. Trên mặt phẳng, xét hai trục Ox, Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Vector đơn vị của trục Ox là $\vec{i}$, Vector đơn vị của trục Oy là $\vec{j}$. Hệ gồm hai trục Ox, Oy như vậy được gọi là **hệ trục tọa độ** Oxy . Điểm O gọi là gốc tọa độ, trục Ox gọi là **trục hoành**, trục Oy gọi là **trục tung**.

Mặt phẳng chứa hệ trục Oxy gọi là **mặt phẳng tọa độ** Oxy hay mặt phẳng Oxy hoặc hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (Hình 4.34)



Hình 4.34

Với mỗi vector $\vec{u}$ trên mặt phẳng Oxy , có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Ta nói vector $\vec{u}$ có tọa độ $(x_0; y_0)$ và nếu $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số $x_0; y_0$ tương ứng được gọi là **hoành độ**, **tung độ** của $\vec{u}$.

Nhận xét. Hai vector bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tọa độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{u}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Như vậy, mỗi vector được hoàn toàn xác định khi biết tọa độ của nó.

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP TOÁN VECTOR

Cho hai vector $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$. Khi đó

$$\bullet \vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y') \quad \bullet \vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y') \quad \bullet k\vec{u} = (kx; ky) \text{ với } k \in \mathbb{R}$$

Nhận xét. Vector $\vec{v} = (x'; y')$ cùng phương với vector $\vec{u} = (x; y) \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $x' = kx, y' = ky$ (hay là $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ nếu $xy \neq 0$).

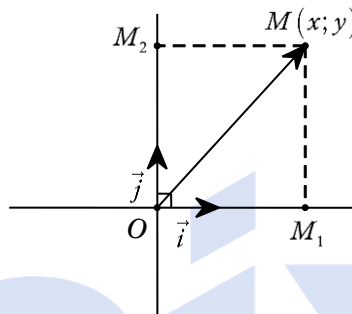


Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$ đối với hệ trục Oxy được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ trục đó.

Như vậy, cặp số $(x; y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x; y)$. Khi đó ta viết $M = (x; y)$ hoặc $M(x; y)$. Số x được gọi là hoành độ, còn số y được gọi là tung độ của điểm M . Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M , tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M .

$$M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{và độ dài của } \overrightarrow{OM} \text{ là } |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Chú ý rằng, nếu $MM_1 \perp Ox$, $MM_2 \perp Oy$ thì $x = \overline{OM_1}$, $y = \overline{OM_2}$.

Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vector trong mặt phẳng

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng

Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm $I(x_I; y_I)$ của đoạn thẳng AB là

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Tọa độ trọng tâm của tam giác

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Khi đó tọa độ của trọng tâm

$G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$



Luyện tập 2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;1)$, $B(3;3)$.

- Các điểm O , A , B có thẳng hàng không?
- Tìm điểm $M(x;y)$ để $OABM$ là một hình bình hành.

Giải

- Các điểm O , A , B có thẳng hàng không?

Do $\overrightarrow{OA} = (2;1)$, $\overrightarrow{OB} = (3;3)$ không cùng phương (Vì $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}$)

Do đó các điểm O , A , B không cùng nằm trên một đường thẳng.

Vậy chúng không thẳng hàng.

- Tìm điểm $M(x;y)$ để $OABM$ là một hình bình hành.

Các điểm O , A , B không thẳng hàng nên $OABM$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

Do $\overrightarrow{AB} = (1;2)$, $\overrightarrow{OM} = (x;y)$

$$\text{Nên } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy điểm cần tìm là $M(1;2)$.



VÍ DỤ MINH HỌA.

Câu 1: Trên trục $(O; \vec{i})$ cho các điểm A , B , C lần lượt có tọa độ 1 ; -2 ; 3 .

Tính độ dài đại số của các vector $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$. Từ đó suy ra hai vector $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = -2 - 1 = -3$, $\overrightarrow{BC} = 3 - (-2) = 5$. Do đó vector $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với vector $\vec{i}$ và vector $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với vector $\vec{i}$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = -3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

- Tìm tọa độ của các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

- Phân tích vector $\vec{c}$ theo hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Lời giải

- Ta có $\vec{a} = (2;0)$, $\vec{b} = (0;-3)$, $\vec{c} = (3;-4)$.

Khi đó $3\vec{a} = (6;0)$, $-2\vec{b} = (0;6)$ nên $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (6+0;0+6) = (6;6)$.



b) Ta có hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

Theo yêu cầu của đề bài ta cần tìm bộ số x, y thỏa mãn $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

$$\text{Suy ra } x(2;0) + y(0;-3) = (3;-4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+0=3 \\ 0-3y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Vậy ta viết được $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$.

- Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC .
- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

a) Gọi M là trung điểm AC thì $M\left(\frac{2-3}{2}; \frac{1+2}{2}\right)$ hay $M\left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

b) Tính được $\vec{AB} = (-3;-3)$, $\vec{AC} = (-5;1)$ dẫn đến hai vectơ đó không cùng phương. Nói cách khác ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì $G\left(\frac{2-1-3}{3}; \frac{1-2+2}{3}\right)$ hay $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$

- Tìm tọa độ điểm E sao cho C là trung điểm của đoạn thẳng EB .
- Xác định tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Do C là trung điểm của đoạn thẳng EB nên $\begin{cases} 2x_C = x_E + x_B \\ 2y_C = y_E + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -5 \\ y_E = 6 \end{cases}$.

Vậy $E(-5;6)$.

b) Gọi $D(x_D; y_D) \Rightarrow \vec{DC} = (-3-x_D; 2-y_D)$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x_D = -3 \\ 2-y_D = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$.

Ta thấy A, B, C, D không thẳng hàng. Vậy $D(0;5)$ là đáp án bài toán.



Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(1;3)$, $B(4;0)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$?

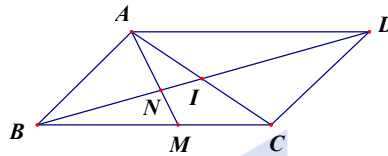
Lời giải

Giả sử $M(x_M; y_M)$ suy ra $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1; y_M - 3)$ và $\overrightarrow{AB} = (3; -3)$.

$$\text{Ta có: } 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_M - 1) + 3 = 0 \\ 3(y_M - 3) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 4 \end{cases} \Rightarrow M(0;4).$$

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(3;4)$, $C(8;1)$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , N là giao điểm của BD và AM . Xác định các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$, biết $N\left(\frac{13}{3}; 2\right)$.

Lời giải



Do I là tâm của hình bình hành $ABCD$, ta có I là trung điểm của đoạn thẳng AC nên

$$I\left(\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Xét tam giác ABC thì BI , AM là hai đường trung tuyến nên N là trọng tâm tam giác ABC .

$$\text{Do đó } \begin{cases} \frac{13}{3} = \frac{3 + x_B + 8}{3} \\ 2 = \frac{4 + y_B + 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 1 \end{cases}, \text{ vậy } B(2;1).$$

$$\text{Gọi } D(x_D; y_D). \text{ Do } I \text{ trung điểm của } BD \text{ nên } \begin{cases} 2 + x_D = 11 \\ 1 + y_D = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = 4 \end{cases} \text{ nên } D(9;4).$$

Vậy $B(2;1)$, $D(9;4)$.



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(1;3)$, $N(4;2)$.

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng OM , ON , MN .

b) Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.

Lời giải

$$\text{a) } OM = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad ON = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$



b) $MN = \sqrt{(4-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$.

Vì $OM^2 + MN^2 = 20 = ON^2$ nên tam giác OMN vuông tại M , mà $OM = MN$ nên tam giác OMN vuông cân tại M

4.17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = (4; -1)$ và các điểm $M(-3; 6), N(3; -3)$

- Tìm mối liên hệ giữa các vectơ $\vec{MN}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.
- Các điểm O, M, N có thẳng hàng hay không?
- Tìm điểm $P(x; y)$ để $OMNP$ là một hình bình hành.

Lời giải

a) $\vec{MN} = (6; -9); \vec{a} = (3; -2) \Rightarrow 2\vec{a} = (6; -4); 2\vec{a} - \vec{b} = (2; -3)$.

Suy ra $\vec{MN} = 3(2\vec{a} - \vec{b})$.

b) Ta có: $\vec{OM} = (-3; 6), \vec{ON} = (3; -3)$.

Vì $\frac{-3}{3} \neq \frac{6}{-3}$ nên $\vec{OM}, \vec{ON}$ không cùng phương, suy ra O, M, N không thẳng hàng.

c) Ta có: $\vec{OM} = (-3; 6), \vec{PN} = (3-x; -3-y)$.

Do đó: $OMNP$ là một hình bình hành khi và chỉ khi

$$\vec{OM} = \vec{PN} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3-x \\ 6 = -3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -9 \end{cases} \Rightarrow P(6; -9).$$

4.18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1; 3), B(2; 4), C(-3; 2)$.

- Hãy chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm điểm $D(x; y)$ để $O(0; 0)$ là trọng tâm của tam giác ABD .

Lời giải

a) Ta có: $\vec{AB} = (1; 1); \vec{AC} = (-4; -1)$

Vì $\frac{1}{-4} \neq \frac{1}{-1}$ nên $\vec{AB}, \vec{AC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b)
$$\begin{cases} x_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right).$$



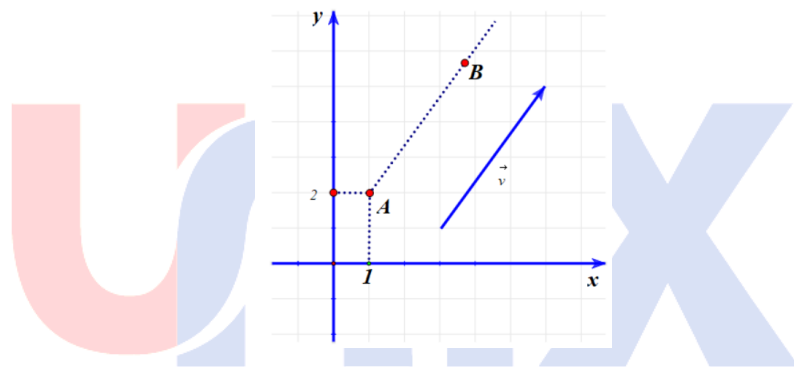
$$c) \begin{cases} x_G = \frac{1+2+(-3)}{3} = 0 \\ y_G = \frac{3+4+2}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0;3)$$

d) Gọi $D(x_D; y_D)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 0 = \frac{1+2+x_D}{3} \\ 0 = \frac{3+4+y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = -7 \end{cases} \Rightarrow D(-3; -7).$$

4.19. Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(1;2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vector $\vec{v} = (3;4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

Lời giải



Gọi $B(x; y), (y > 0)$; $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\overrightarrow{AB} = (x-1; y-2)$

Quãng đường tàu thủy chạy được sau 1,5 giờ là: $1,5 \cdot 5 = 7,5$.

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 7,5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 7,5^2 \quad (1)$$

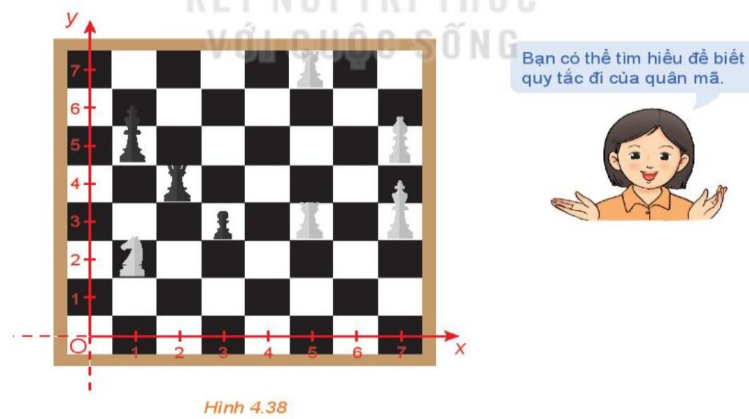
$$\overrightarrow{AB} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng phương nên } \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y - \frac{1}{2} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$\left(\frac{3}{4}y - \frac{1}{2} - 1\right)^2 + (y-2)^2 = 7,5^2 \Leftrightarrow 25y^2 - 100y - 800 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \Rightarrow x = \frac{11}{2} \\ y = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $B\left(8; \frac{11}{2}\right)$.

4.20. Trong Hình 4.38, quân mã đang ở vị trí có tọa độ $(1;2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?

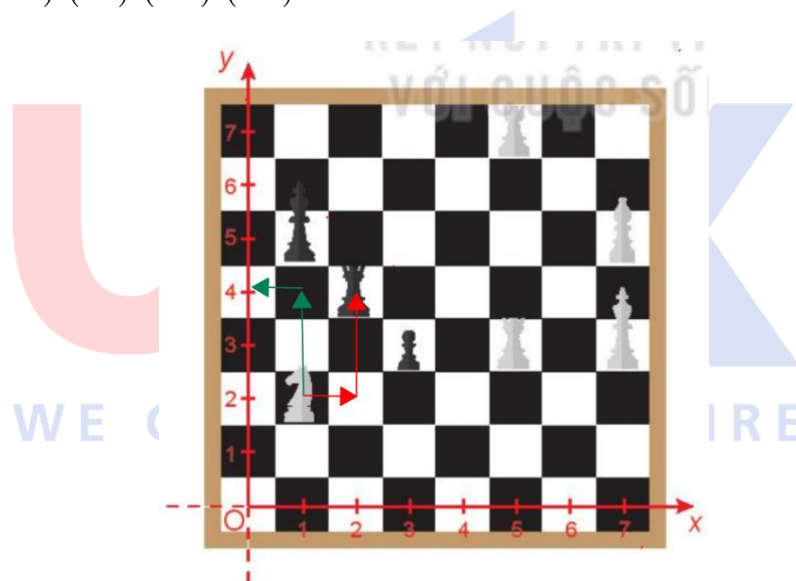


Lời giải

Quân mã di chuyển theo hình chữ L, mỗi nước **đi** gồm tổng cộng 3 ô: tiến 1 ô rồi quẹo trái hoặc quẹo phải 2 ô và ngược lại; tiến 2 ô rồi quẹo trái hoặc quẹo phải 1 ô và ngược lại. Khác với toàn bộ **quân cờ trong bàn cờ vua**, **mã** không bị cản bởi bất cứ **quân** nào và có thể nhảy qua tất cả các **quân** khác trên **đường đi** của mình.

Theo cách đi như trên thì Quân mã có thể ở các vị trí sau:

$(2;4), (2;0), (3;3), (3;1), (0;4), (0;0)$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTƠ TRÊN MẶT PHẪNG Oxy

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho điểm $M(x; y)$. Tìm tọa độ của các điểm M_1 đối xứng với M qua trục hoành?

Lời giải

M_1 đối xứng với M qua trục hoành suy ra $M_1(x; -y)$.

Câu 8: Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

Lời giải



Ta có $\vec{AB} = (-2-1; 3-2) = (-3; 1)$.

Câu 9: Vector $\vec{a} = (-4; 0)$ được phân tích theo hai vector đơn vị $(\vec{i}; \vec{j})$ như thế nào?

Lời giải

Ta có: $\vec{a} = (-4; 0) \Rightarrow \vec{a} = -4\vec{i} + 0\vec{j} = -4\vec{i}$.

Câu 10: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1; 3)$. Biết điểm B thuộc trục Ox và $\vec{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vector $\vec{AC}$?

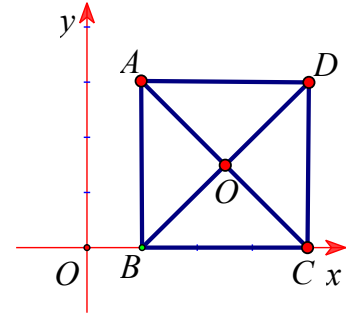
Lời giải

Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ bên.

Vì điểm $A(1; 3)$ suy ra $AB = 3, OB = 1$

Do đó $B(1; 0), C(4; 0), D(4; 3)$

Vậy $\vec{AC} = (3; -3)$.



Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $BAD = 60^\circ$. Biết A trùng với gốc tọa độ O ; C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của hình thoi $ABCD$.

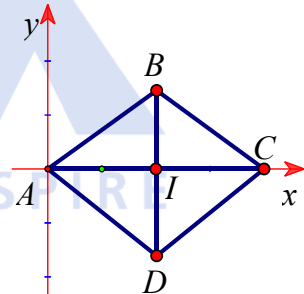
Lời giải

Từ giả thiết ta xác định được hình thoi trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Gọi I là tâm hình thoi ta có $BI = AB \sin BAI = a \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $A(0; 0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right), C(a\sqrt{3}; 0), D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.



DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM, VECTƠ LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC DẠNG $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$

Câu 12: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a}(1; 3), \vec{b}(3; -4)$. Tìm tọa độ vector $\vec{a} - \vec{b}$?

Lời giải

Ta có $\vec{a} - \vec{b} = (1-3; 3-(-4)) = (-2; 7)$.

Câu 13: Cho $\vec{a} = (x; 2), \vec{b} = (-5; 1), \vec{c} = (x; 7)$. Tìm x để Vec tơ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Lời giải



Ta có $x = 2.x + 3.(-5) \Leftrightarrow x = 15$.

Câu 14: Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(0;-2)$. Tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$ là:

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_D - 1 = -3(0 - 1) \\ y_D - 0 = -3(-2 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 6 \end{cases} \Rightarrow D(4;6).$$

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(1;3), B(4;0)$. Tọa độ điểm M thỏa $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ là

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_M - 1) + (4 - 1) = 0 \\ 3(y_M - 3) + (0 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 4 \end{cases} \Rightarrow M(0;4).$$

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ là:

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3 - x_M) - (2 - 1) = 4(x_M - 2) \\ 2(3 - y_M) - (-5 - 4) = 4(y_M + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{6} \\ y_M = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right).$$

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CÁC ĐIỂM CỦA MỘT HÌNH

Câu 17: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3;5), B(1;2), C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC ?

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_G = \frac{3+1+5}{3} = 3 \\ y_G = \frac{5+2+2}{3} = 3 \end{cases} \rightarrow G(3;3).$$

Câu 18: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2;2), B(3;5)$ và trọng tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

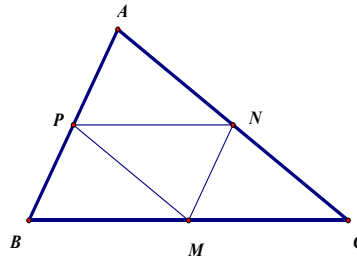
Lời giải

Gọi $C(x;y)$.

$$\text{Vì } O \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} \frac{-2+3+x}{3} = 0 \\ \frac{2+5+y}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \end{cases}.$$

Câu 19: Cho $M(2;0), N(2;2), P(-1;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$. Tọa độ B là:

Lời giải



Ta có: $BPNM$ là hình bình hành nên $\begin{cases} x_B + x_N = x_P + x_M \\ y_B + y_N = y_P + y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + 2 = 2 + (-1) \\ y_B + 2 = 0 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 1 \end{cases}$.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác MNP có $M(1; -1)$, $N(5; -3)$ và P thuộc trục Oy , trọng tâm G của tam giác nằm trên trục Ox . Tọa độ của điểm P là

Lời giải

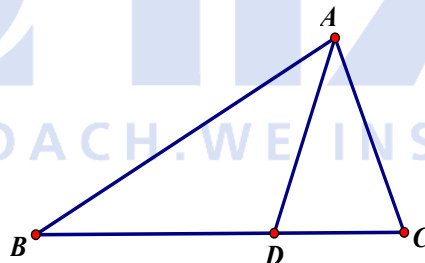
Ta có: P thuộc trục $Oy \Rightarrow P(0; y)$, G nằm trên trục $Ox \Rightarrow G(x; 0)$

G là trọng tâm tam giác MNP nên ta có: $\begin{cases} x = \frac{1+5+0}{3} \\ 0 = \frac{(-1)+(-3)+y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy $P(0; 4)$.

Câu 21: Cho tam giác ABC với $AB=5$ và $AC=1$. Tính tọa độ điểm D là của chân đường phân giác trong góc A , biết $B(7; -2)$, $C(1; 4)$.

Lời giải



Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = 5 \Rightarrow DB = 5DC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -5\overrightarrow{DC}$.

Gọi $D(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{DB} = (7-x; -2-y)$; $\overrightarrow{DC} = (1-x; 4-y)$.

Suy ra: $\begin{cases} 7-x = -5(1-x) \\ -2-y = -5(4-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy $D(2; 3)$.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3; -1)$, $B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$. Xác định tọa độ các điểm C , D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa độ tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên



$$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 3x_I - x_A - x_B = 1$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 3y_I - y_A - y_B = -4$$

Suy ra $C(1; -4)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-3=1-x_D \\ 2+1=-4-y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=5 \\ y_D=-7 \end{cases} \Rightarrow D(5; -7)$$

Điểm O của hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm AC do đó

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = 2, y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow O\left(2; -\frac{5}{2}\right)$$

DẠNG 4: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỰ CÙNG PHƯƠNG CỦA HAI VECTƠ. PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ QUA HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

Câu 23: Cho $A(1; 2), B(-2; 6)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Oy sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: M trên trục $Oy \Rightarrow M(0; y)$

Ba điểm A, B, M thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AM}$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 4), \overrightarrow{AM} = (-1; y-2)$. Do đó, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \frac{-1}{-3} = \frac{y-2}{4} \Rightarrow y=10$. Vậy $M(0; 10)$.

Câu 24: Cho các vectơ $\vec{a} = (4; -2), \vec{b} = (-1; -1), \vec{c} = (2; 5)$. Phân tích vectơ $\vec{b}$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

Lời giải

$$\text{Giả sử } \vec{b} = m\vec{a} + n\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4m + 2n \\ -1 = -2m + 5n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{8} \\ n = -\frac{1}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } \vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}.$$

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(m-1; -1), B(2; 2-2m), C(m+3; 3)$. Tìm giá trị m để A, B, C là ba điểm thẳng hàng?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3-m; 3-2m), \overrightarrow{AC} = (4; 4)$

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{3-m}{4} = \frac{3-2m}{4} \Leftrightarrow m=0.$$

Câu 26: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(6; 3), B(-3; 6), C(1; -2)$. Xác định điểm E trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, E thẳng hàng.

Lời giải

Vì E thuộc đoạn BC và $BE = 2EC$ suy ra $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$



Gọi $E(x; y)$ khi đó $\overrightarrow{BE}(x+3; y-6), \overrightarrow{EC}(1-x; -2-y)$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x+3=2(1-x) \\ y-6=2(-2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $E\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A(0;1), B(1;3), C(2;7)$ và $D(0;3)$. Tìm giao điểm của 2 đường thẳng AC và BD .

Lời giải

Gọi $I(x; y)$ là giao điểm AC và BD suy ra $\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AC}$ cùng phương và $\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BD}$ cùng phương

Mặt khác

$$\overrightarrow{AI}=(x; y-1), \overrightarrow{AC}=(2; 6) \text{ suy ra } \frac{x}{2}=\frac{y-1}{6} \Leftrightarrow 6x-2y=-2 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BI}=(x-1; y-3), \overrightarrow{BD}=(-1; 0) \text{ suy ra } y=3 \text{ thế vào (1) ta có } x=\frac{2}{3}$$

Vậy $I\left(\frac{2}{3}; 3\right)$ là điểm cần tìm.

WE COACH.WE INSPIRE