



CHƯƠNG

IV

VECTƠ

BÀI 10: VECTO TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;2), B(1;-3), C(-3;0)$. Biết rằng tọa độ điểm $E(a;b)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. Tính $a+b$

Lời giải

Trả lời: -5

Giả sử $E(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AE} = (x-2; y-2), \overrightarrow{AB} = (-1;-5), \overrightarrow{AC} = (-5;-2)$. Suy ra

$$-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = (-13;4). \text{ Do đó } \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -13 \\ y-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 6 \end{cases}$$

Vậy $E(-11;6)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (2;-1)$ và $\vec{d} = (2m+2; 1-m^2)$. Tìm m dương biết rằng $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{a}$ khi và chỉ khi $\frac{2m+2}{2} = \frac{1-m^2}{-1}$

$$\Leftrightarrow -2m-2 = 2-2m^2 \Leftrightarrow 2m^2-2m-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

Vì m dương nên $m=2$ thỏa mãn.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(2,4), B(-1,3), C(2,5)$. Biết tọa độ điểm $E(a;b)$ thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AE} - 3\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Tính $a+2b$.

Lời giải

Trả lời: 18

$E(x;y) \cdot \overrightarrow{AE} = (x-2, y-4), \overrightarrow{EC} = (2-x, 5-y), \overrightarrow{EB} = (-1-x, 3-y)$

$$\overrightarrow{AE} - 3\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0} \begin{cases} (x-2) - 3(2-x) + 2(-1-x) = 0 \\ (y-4) - 3(5-y) + 2(3-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10=0 \\ 2y-13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=\frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow E\left(5; \frac{13}{2}\right) \Rightarrow a+2b = 5 + 2 \cdot \frac{13}{2} = 18$$

Câu 4: Cho $\vec{a} = (x;2), \vec{b} = (-5;1), \vec{c} = (x;7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

Lời giải

Ta có $2\vec{a} = (2x;4), 3\vec{b} = (-15;3)$ suy ra $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = (2x-15;7)$.



Mặt khác $\vec{c} = (x; 7)$ nên $2x - 15 = x \Leftrightarrow x = 15$

Câu 5: Cho $\vec{u} = (2x - 1; 3), \vec{v} = (1; x + 2)$. Có hai giá trị của x để $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$. Tính tích hai giá trị đó.

Lời giải

Trả lời: -2,5

Với $x = -2$: Ta có $\vec{u} = (-5; 3); \vec{v} = (1; 0)$

Vì $\frac{1}{-5} \neq \frac{0}{3}$ nên hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ không cùng phương

Với $x \neq -2$: Ta có $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi $\Leftrightarrow \frac{2x-1}{1} = \frac{3}{x+2}$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+2) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy tích của chúng là $1 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2}$.

Câu 6: Cho $A(2; -4), B(6; 0), C(m; 4)$. Tìm m để A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Trả lời: 10

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 4); \overrightarrow{AC} = (m-2; 8)$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{m-2}{4} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow m = 10$.

Vậy $m = 10$ thì A, B, C thẳng hàng.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1; 3), B(4; 0), C(2; -5)$. Biết tọa độ điểm $M(a; b)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính $a + b$.

A. $M(1; 18)$. **B.** $M(-1; 18)$. **C.** $M(-18; 1)$. **D.** $M(1; -18)$.

Lời giải

Trả lời: -17

Gọi điểm $M(x_M; y_M)$.

$$\text{Theo bài ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x_M) + (4-x_M) - 3(2-x_M) = 0 \\ (3-y_M) + (0-y_M) - 3(-5-y_M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = -18 \end{cases}$$

Suy ra $M(1; -18)$.

Vậy $a + b = 1 + (-18) = -17$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(4; 2), B(-2; 1), C(0; 3), M(-3; 7)$. Giả sử $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC} (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó, tính $10x + 100y$.

Lời giải

Trả lời: 357

$\overrightarrow{AM}(-7; 5), \overrightarrow{AB}(-6; -1), \overrightarrow{AC}(-4; 1)$.

Giả sử $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC} (x, y \in \mathbb{R})$.



Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -6x - 4y = -7 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{10} \\ y = \frac{37}{10} \end{cases}.$$

Vậy $10x + 100y = 10 \cdot \left(-\frac{13}{10}\right) + 100 \cdot \frac{37}{10} = 357.$

Câu 9: Cho $A(0;2), B(2;4)$. Biết tọa độ điểm $M(a;b)$ trên Ox thỏa $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ ngắn nhất. Tính $a+b$.

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1;3)$.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MI}| = 2MI$.

Ycbt $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của điểm I xuống trục $Ox \Rightarrow M(1;0)$.

Câu 10: Cho hai điểm $M(-2;2); N(1;1)$. Biết tọa độ điểm $P(a;b)$ trên Ox sao cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng. Tính $a+b$.

Lời giải

Trả lời: 4

Vì $P \in Ox \Rightarrow P(a;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{NP} = (a-1; -1); \overrightarrow{MP} = (a+2; -2)$.

Ba điểm M, N, P thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{MP}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{NP} = k \cdot \overrightarrow{MP}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a-1 = k(a+2) \\ -1 = k \cdot (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $P(4;0)$.

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;3), B(-3;1)$. Biết tọa độ điểm $E(e;0)$ trên Ox sao cho $EA+EB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm e .

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có: A, B nằm cùng phía với Ox .

Gọi $B'(-3;-1)$ là điểm đối xứng của B qua Ox .

Khi đó: $EA+EB = EA+EB'$ đạt giá trị nhỏ nhất khi A, E, B' thẳng hàng.

Suy ra $\frac{AE}{EB} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EB'} \Leftrightarrow \begin{cases} e-1 = -9-3e \\ 3 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow e = -2 \Rightarrow E(-2;0)$

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;3), B(-3;1), C(5;-6)$.

Biết tọa độ điểm $F(0;b)$ trên Oy sao cho $|\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm b

Lời giải

Trả lời: 9

Gọi J là điểm sao cho $\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow J(-9;9)$.



Suy ra $\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FJ} \Rightarrow |\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}| = 2FJ$.

Nên $|\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi FJ nhỏ nhất.

Khi đó F là hình chiếu của J trên Oy .

Vậy $F(0;9)$.

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(5;4)$, $B(-1;1)$, $C(3;-2)$, điểm $M(x;y)$ sao cho A, B, M thẳng hàng và $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = x + y$.

Lời giải

Trả lời: 6

Gọi $M(x;y)$, $\overrightarrow{AB} = (-6;-3)$, $\overrightarrow{AM} = (x-5;y-4)$.

$M \in AB \Rightarrow$ Ba điểm A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương.

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{-6} = \frac{y-4}{-3} \Rightarrow x = 2y - 3 \quad (1).$$

$$* \overrightarrow{MA} = (5-x; 4-y), \overrightarrow{MC} = (3-x; -2-y) \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = (8-2x; 2-2y).$$

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = \sqrt{(8-2x)^2 + (2-2y)^2} \quad (2).$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = \sqrt{(14-4y)^2 + (2-2y)^2} = \sqrt{20y^2 - 120y + 200} = \sqrt{20[(y-3)^2 + 1]} \geq \sqrt{20}.$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|_{\min} = \sqrt{20} \Leftrightarrow y-3=0 \Leftrightarrow y=3 \Rightarrow x=3.$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|_{\min} = \sqrt{20} \text{ khi và chỉ khi } M(3;3).$$

Câu 14: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;-4)$, $B(4;5)$, $C(0;-7)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox . Đặt $Q = 2|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| + 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của Q . (làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 19

Do $M \in Ox$ nên $M(x;0)$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = (1-x;-4), \overrightarrow{MB} = (4-x;5), \overrightarrow{MC} = (-x;-7)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (1-x+8-2x;-4+10) = (9-3x;6)$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (4-x-x;5-7) = (4-2x;-2)$$

$$\text{Ta có: } Q = 2|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| + 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 2\sqrt{(9-3x)^2 + 6^2} + 3\sqrt{(4-2x)^2 + (-2)^2}$$

$$= 6\left(\sqrt{(3-x)^2 + 2^2} + \sqrt{(2-x)^2 + (-1)^2}\right) = 6(ME + MF)$$

$$\text{Trong đó } E(3;2), F(2;-1) \text{ nên } \overrightarrow{EF} = (-1;-3) \Rightarrow |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{10}$$

$$\text{Mà } ME + MF \geq EF = \sqrt{10} \Rightarrow Q \geq 6\sqrt{10}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } M \text{ là giao điểm của đoạn } EF \text{ và } Ox \Leftrightarrow M\left(\frac{7}{3};0\right)$$



Vậy Q đạt giá trị nhỏ nhất là $6\sqrt{10} \approx 19$

