



CHƯƠNG

IV

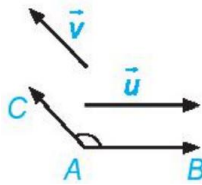
VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



LÝ THUYẾT.

1. GÓC GIỮA HAI VECTƠ



Cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm A tùy ý, vẽ các vector $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (H.4.40). Khi đó số đo của góc BAC được gọi là số đo của góc giữa hai vector $\vec{u}, \vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.

Chú ý

- Quy ước rằng góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$.

Đặc biệt vector $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi vector.

2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Tích vô hướng của hai vector khác vector-không $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$ được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Chú ý

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$.
- Tích $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là **bình phương vô hướng** của $\vec{u}$.

Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ \\ (\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ \end{cases}$$

Luyện tập 2.



Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c .

Giải:

Từ định lý cosin trong tam giác ABC suy ra

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos A = c.b.\cos A \\ &= c.b. \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.\end{aligned}$$

3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Tích vô hướng của hai vector $\vec{u}(x; y)$ và $\vec{v}(x'; y')$ được tính theo công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y'$$

Nhận xét

- Hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x.x' + y.y' = 0$.
- Bình phương vô hướng của vector $\vec{u}(x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.
- Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:



$$\begin{aligned} & \bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \\ & \bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \\ & \bullet (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2. \end{aligned}$$



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.21. Trong mặt phẳng Oxy, hãy tính góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (-3; 1), \vec{b} = (2; 6)$

b) $\vec{a} = (3; 1), \vec{b} = (2; 4)$

c) $\vec{a} = (-\sqrt{2}; 1), \vec{b} = (2; -\sqrt{2})$.

Lời giải

Vận dụng công thức tính góc giữa hai véc tơ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

a) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-3 \cdot 2 + 1 \cdot 6}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 6^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(-\sqrt{2}) \cdot 2 + 1 \cdot (-\sqrt{2})}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

4.22. Tìm điều kiện của $\vec{u}, \vec{v}$ để:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

Lời giải

a) Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ do đó để $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ hay $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$ nên $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.

b) Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ do đó để $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ hay $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$ nên $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng.

4.23. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1; 2), B(-4; 3)$. Gọi $M(t; 0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t.

b) Tìm t để $\angle AMB = 90^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AM} = (t-1; -2), \overrightarrow{BM} = (t+4; -3) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (t-1)(t+4) + 2 \cdot 3 = t^2 + 3t + 2$

b) Để $\angle AMB = 90^\circ$ thì $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$



Vậy với $\begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$ thì $AMB = 90^\circ$

4.24. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$.

- Giải tam giác ABC.
- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải

a) $AB = \sqrt{(2+4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$$AC = \sqrt{(2+4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45}$$

$$BC = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-4)^2} = 6$$

b) Giả sử $H(x; y)$ ta có $\overrightarrow{AH} = (x+4; y-1), \overrightarrow{BC} = (0; -6), \overrightarrow{BH} = (x-2; y-4), \overrightarrow{CA} = (-6; 3)$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4) \cdot 0 + (y-1) \cdot (-6) = 0 \\ -6(x-2) + 3(y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{2}; 1\right).$$

4.25. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Lời giải

Ta có $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 A)$

$$\text{Hay } S^2 = \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 \left[1 - \frac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{AB^2 \cdot AC^2} \right] = \frac{1}{4} [AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2]$$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

4.26. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Lời giải

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$





DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTO.

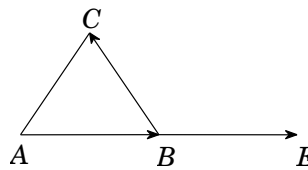
1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông...

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$

Lời giải

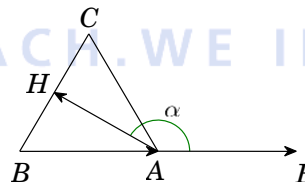


Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = CBE = 180^\circ - CBA = 120^\circ$

$$\longrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Câu 2: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

Lời giải



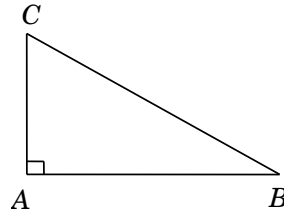
Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

Khi đó $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = HAE = \alpha$ (hình vẽ)

$$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = 180^\circ - BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Câu 3: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

Lời giải



Xác định được $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \angle ACB$

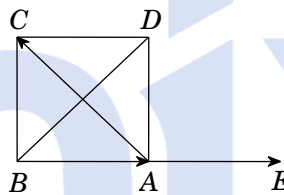
Ta có $\cos \angle ACB = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ$

$\longrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$

Vậy $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

Lời giải



Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

Khi đó $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \cos \angle CAE = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR.



PHƯƠNG PHÁP.

- ☐ Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- ☐ Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector



BÀI TẬP.

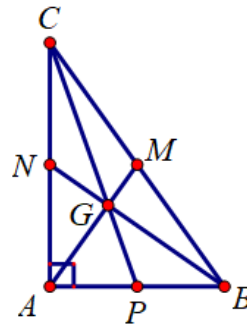
Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$
- b) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$



c) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

Lời giải



Hình 2.2

a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 2a^2 \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}).$$

$$\text{Mặt khác } \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos ABC = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$$

$$* \text{ Ta có } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos ACB$$

$$\text{Theo định lý Pitago ta có } CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$$

b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}) \text{ Ta có}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$$

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

$$\text{Để thấy tam giác } ABM \text{ đều nên } GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$$



Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

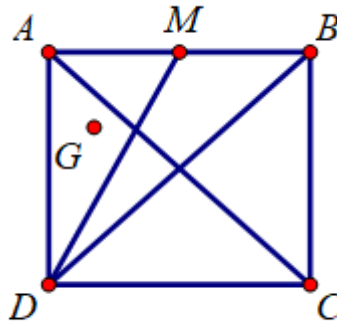
$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}.$$

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

Lời giải



Hình 2.3

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \angle ACB$$

$$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$$

Mặt khác $\angle ACB = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$$



$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

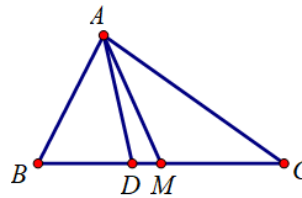
$$\text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) = \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}\right) = \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}.$$

Câu 7: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là trung điểm của BC , D là chân đường phân giác trong góc A .

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải



Hình 2.3

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 \right] = \frac{1}{2} \left[AB^2 + AC^2 - CB^2 \right] = \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos A = cb \cos A$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) = cb \cos A \text{ hay } \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{b) * Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

$$\text{Theo câu a) ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) \text{ nên}$$

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} \left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + b^2 \right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$\text{* Theo tính chất đường phân giác thì } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC} \overrightarrow{DC} = \frac{b}{c} \overrightarrow{DC} \text{ (*)}$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \text{ thay vào (*) ta được}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} &= \frac{b}{c}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 &= (b\overrightarrow{AB})^2 + 2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + (c\overrightarrow{AC})^2 \\ \Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 &= b^2c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + c^2b^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)\end{aligned}$$

$$\text{Hay } \overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$$

Nhận xét: Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC} = (4;-3)$.

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3;-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-4;-2)$. Suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow B = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$$

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- ☐ Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- ☐ Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vector
- ☐ Sử dụng hằng đẳng thức vector về tích vô hướng.

2 BÀI TẬP.

Câu 10: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Lời giải



Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được

$$\begin{aligned} VT &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = VP \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Câu 11: Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (*).
 Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \end{aligned}$$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A , **B.**

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (2)}$$

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ suy ra BH vuông góc với AC

Hay ba đường cao trong tam giác đồng qui (đpcm).

Câu 12: Cho nửa đường tròn đường kính AB . Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$

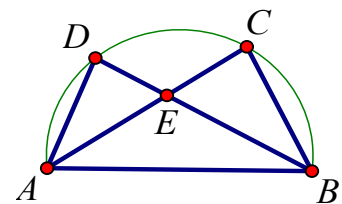
Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } VT &= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Vì AB là đường kính nên $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$

Suy ra $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Do đó $VT = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB}^2 = VP$ (đpcm).



Hình 2.4

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.



PHƯƠNG PHÁP.

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$



BÀI TẬP.

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vector $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right), \vec{v} = (k; -4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5)(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 4)$ và $B(8; 4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C .

Lời giải

Ta có $C \in Ox$ nên $C(c; 0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2-c; 4) \\ \overrightarrow{CB} = (8-c; 4) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (-2-c) \cdot (8-c) + 4 \cdot 4 = 0$

$$\Leftrightarrow c^2 - 6c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \rightarrow C(6; 0) \\ c = 0 \rightarrow C(0; 0) \end{cases}$$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 4), B(-3; 1), C(3; -1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

Lời giải

Gọi $A'(x; y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (x-2; y-4) \\ \overrightarrow{BC} = (6; -2) \\ \overrightarrow{BA'} = (x+3; y-1) \end{cases}$.

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ B, C, A' \text{ thẳng hàng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \cdot 6 + (y-4) \cdot (-2) = 0 \\ \frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .

Lời giải



Ta có $C \in Oy$ nên $C(0; c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; c-2) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4) \cdot (-1) + (-1)(c-2) = 0 \Leftrightarrow c = 6$.

Vậy $C(0; 6)$.

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4; 3)$, $B(2; 7)$ và $C(-3; -8)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

Lời giải

Gọi $A'(x; y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (x-4; y-3) \\ \overrightarrow{BC} = (-5; -15) \\ \overrightarrow{BA'} = (x-2; y-7) \end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} AA' \perp BC \\ B, A', C \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BA'} = k \overrightarrow{BC} & (2) \end{cases}$.

• $(1) \Leftrightarrow -5(x-4) - 15(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 13$.

• $(2) \Leftrightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y-7}{-15} \Leftrightarrow 3x - y = -1$.

Giải hệ $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow A'(1; 4)$.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.



PHƯƠNG PHÁP.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- ☐ Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- ☐ Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- ☐ Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vector $\vec{a}$



BÀI TẬP.

Câu 18: Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$



Lời giải

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \text{ (Do } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA})$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI = a$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

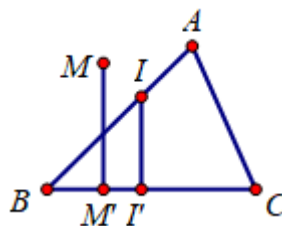
$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A .

Câu 19: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải



Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Khi đó $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow [(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})] \cdot \overrightarrow{BC} = 3BC^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2$$

Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC Theo công thức hình chiếu ta có

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} \text{ do đó } \overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2$$

Vì $BC^2 > 0$ nên $\overrightarrow{M'I'}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

$$\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'I' \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC$$

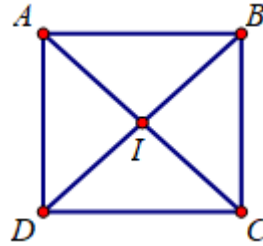
Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC .

Câu 20: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$



Lời giải



Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = k$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + a^2$$

$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

$$\text{Nếu } k > -a^2 \text{ thì } MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

Lời giải

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI} \quad (*)$$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI .

Câu 22: Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam



giác.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG .

DẠNG 6: CỰC TRỊ.



PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.



BÀI TẬP.

Câu 23: Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

- Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- Xác định tọa độ điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}(8;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3.8 + 4.6 = 0$

Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A .

b) AH khi H là hình chiếu của A lên BC

Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu của A lên BC .

Ta có $\overrightarrow{AH}(x-1; y-2)$, $\overrightarrow{BH}(x+2; y-6)$, $\overrightarrow{BC}(11;2)$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0$

Hay $11x + 2y - 15 = 0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\frac{x+2}{11} = \frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\frac{1}{5}; \frac{32}{5}\right)$.



Câu 24: Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tìm tọa độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với $b \geq 0$, $c > 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}(-2;c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2) - 1 \cdot (c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b + 5$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + (c-1)^2}$$

$$= (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5$$

$$\text{Vì } c > 0 \text{ nên } -2b + 5 > 0 \Rightarrow 0 \leq b < \frac{5}{2}$$

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	2	$\frac{5}{2}$
y	5	1	$\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$ là $y = 5$ khi $x = 0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b = 0$, suy ra $c = 5$.

Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ là điểm cần tìm.

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $M \in Oy$ nên $M(0;m)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1; -1-m) \\ \overrightarrow{MB} = (3; 2-m) \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } MA^2 + MB^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 1^2 + (-1-m)^2 + 3^2 + (2-m)^2 = 2m^2 - 2m + 15.$$



$$= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \geq \frac{29}{2}; \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } \{MA^2 + MB^2\}_{\min} = \frac{29}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } m = \frac{1}{2} \longrightarrow M\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Câu 26: Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(3; -4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1: Do M trên trục hoành $\Rightarrow M(x; 0)$, $\overline{AB} = (1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

$$\overline{AM} = (x-2; 3), \overline{BM} = (x-3; 4)$$

Ta có chu vi tam giác AMB : $P_{ABM} = \sqrt{2} + \sqrt{(x-2)^2 + 3^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 4^2}$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{(x-2)^2 + 3^2} + \sqrt{(3-x)^2 + 4^2} \geq \sqrt{2} + \sqrt{(x-2+3-x)^2 + (3+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow P_{ABM} \geq 6\sqrt{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } \frac{x-2}{3-x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{17}{7} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7}; 0\right).$$

Cách 2: Lấy đối xứng A qua Ox ta được $A'(2; 3)$. Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Dấu bằng xảy ra khi M trùng với giao điểm của $A'B$ với Ox .

Câu 27: Cho $M(-1; -2)$, $N(3; 2)$, $P(4; -1)$. Tìm E trên Ox sao cho $|\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}|$ nhỏ nhất.

Lời giải

Do $E \in Ox \Rightarrow E(a; 0)$.

$$\text{Ta có: } \overline{EM} = (-1-a; -2); \overline{EN} = (3-a; 2); \overline{EP} = (4-a; -1)$$

$$\text{Suy ra } \overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP} = (6-3a; -1).$$

$$\text{Do đó: } |\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}| = \sqrt{(6-3a)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(6-3a)^2 + 1} \geq 1.$$

Giá trị nhỏ nhất của $|\overline{EM} + \overline{EN} + \overline{EP}|$ bằng 1.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $6-3a=0 \Leftrightarrow a=2$.

Vậy $E(2; 0)$.