



CHƯƠNG

IV

VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 1: Cho hai vector $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (-3; 4)$. Tích $\vec{u} \cdot \vec{v}$ là

A. 11.

B. -10.

C. 5.

D. -2.

Lời giải

$$\text{Với } \begin{cases} \vec{u} = (2; -1) \\ \vec{v} = (-3; 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10$$

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 5)$ và $\vec{b} = (-3; 1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

A. -5.

B. 1.

C. 13.

D. -1.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = -1.$$

Câu 3: Cho $A(0; 3)$; $B(4; 0)$; $C(-2; -5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. 16.

B. 9.

C. -10.

D. -9.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (4; -3); \overrightarrow{BC} = (-6; -5)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-5) = -9.$$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = 2\vec{j} - 2\vec{i}$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$.

B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$.

C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$.

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.

Lời giải

$$\text{Theo giả thiết ta có } \vec{u} = (1; 3) \text{ và } \vec{v} = (-2; 2).$$

$$\text{Khi đó } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 4.$$

Câu 5: Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v} = (2; -1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$.

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1; 3)$.

Vậy $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1.2 + 3.(-1) = -1$.

Câu 6: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

- A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a.4a \cdot \cos 60^\circ = 4a.4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$.

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp AD$ do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Câu 9: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
C. $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.

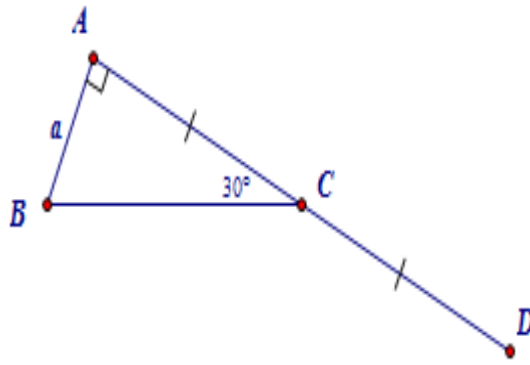
Lời giải

$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})]^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b})$ nên C sai.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

- A. $-2a^2$. B. $2a^2$. C. $3a^2$. D. $-3a^2$.

Lời giải



Gọi D là điểm đối xứng với A qua C .

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = CD \cdot CB \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

Câu 11: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-a^2}{2}$.

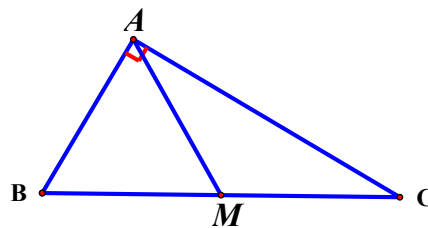
Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2 . **C.** $-a^2$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \frac{BC}{2}$.

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a.$$

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $MAB = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng



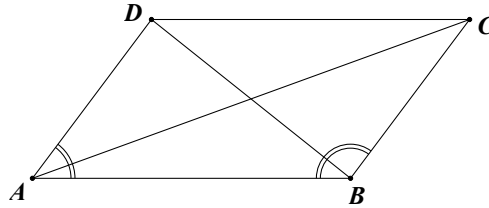
A. -1.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos BAD = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1.$$

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

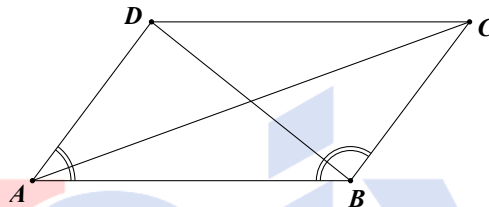
A. -1.

B. $\frac{1}{2}$

C. -1.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải



Theo giả thiết: $BAD = 60^\circ \Rightarrow ABC = 120^\circ$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos ABC = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1.$$

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

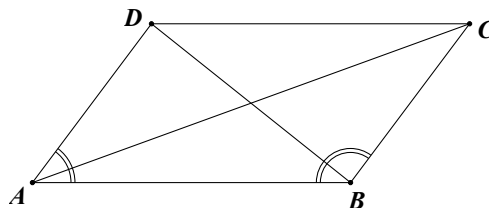
A. $\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{7}$.

C. 5.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải



Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow AC^2 = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow AC = \sqrt{7}.$$

Câu 16: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

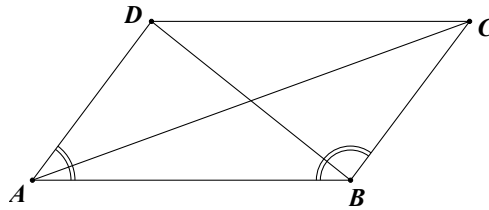
A. $\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 5.

D. 3.

Lời giải



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot (-1) \\ \Rightarrow BD = \sqrt{3}.$$

Câu 17: Cho các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = x$, $|\vec{b}| = y$ và $|\vec{c}| = z$ và $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$. Tính

$$A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}.$$

A. $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$. **B.** $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$. **C.** $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$. **D.** $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$.

Lời giải

$$\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -2\vec{c}.$$

$$\Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2A = 4\vec{c}^2.$$

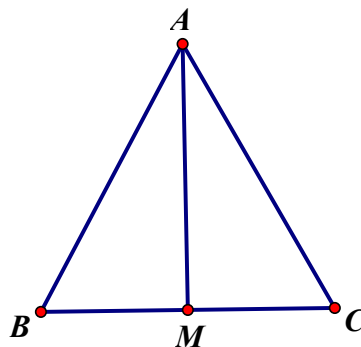
$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = (-2\vec{c})^2.$$

Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2A = 4z^2 \Rightarrow A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án } \mathbf{B}.$$

Câu 18: Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng
A. -18 . **B.** 27 . **C.** 18 . **D.** -27 .

Lời giải



$$\text{Ta có } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \angle BAM = 30^\circ.$$

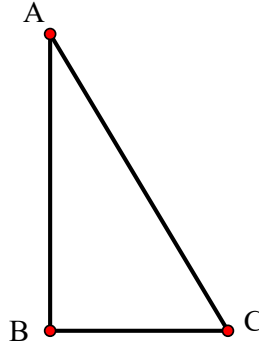
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.



- A. $3a^2$. B. $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-3a^2$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -AC \cdot CB \cdot \cos ACB = -AC \cdot CB \cdot \frac{CB}{AC} = -BC^2 = -3a^2$.

Câu 20: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

- A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Ta có: $(|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$,

$$\Rightarrow (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

Câu 21: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ bằng

- A. $-a^2$. B. 0 . C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $\frac{-a^2}{2}$.

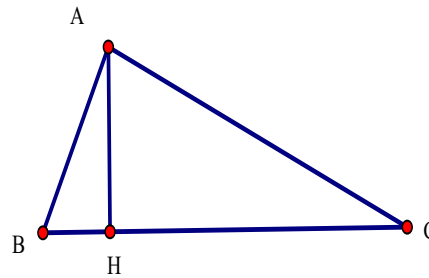
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - 2AB^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD^2 - 2AB^2 = -a^2$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a^2$. D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

$$\text{Có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \cdot BC = BA^2 = a^2.$$

- Câu 23:** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$. Kết quả $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng
A. 16. **B.** 0. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

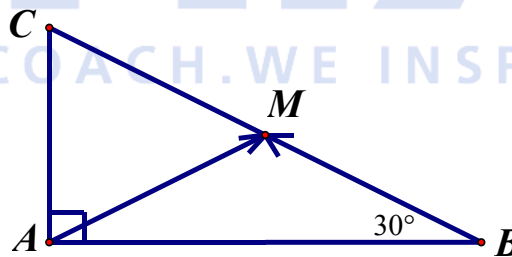
Lời giải

$$\text{Vì } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle ABC \text{ nên } \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{BC}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \frac{4}{BC} = 4 \cdot 4 = 16$$

- Câu 24:** Cho tam giác ABC vuông tại A có $B = 30^\circ, AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.
A. $P = -2$. **B.** $P = 2\sqrt{3}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = -2\sqrt{3}$.

Lời giải



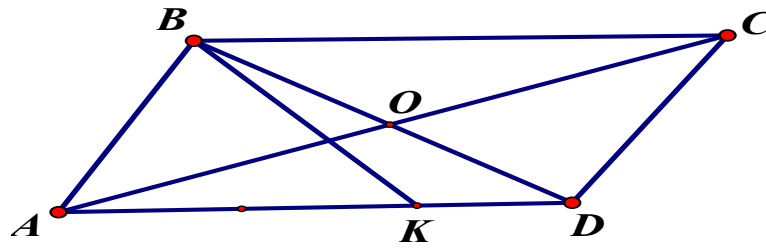
$$\text{Ta có: } P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow$$

- Câu 25:** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \angle BAD = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$
A. $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** 0. **D.** a^2 .

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

Câu 26: Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Câu 27: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=5$. Tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

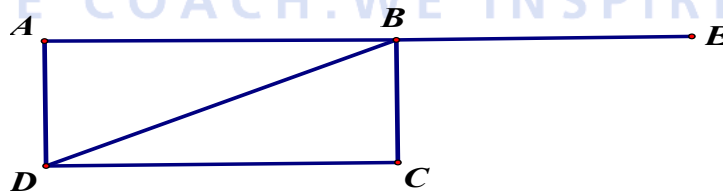
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$.

Lời giải



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

Xét $\triangle ABD$ có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$

Xét $\triangle ABD$ có $\cos ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = \cos DBE = -\cos ABD = -\frac{8}{\sqrt{89}}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 8 \cdot \sqrt{89} \cdot \left(\frac{-8}{\sqrt{89}}\right) = -64$$

Câu 28: Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 30^\circ$. $AB=5$, $BC=8$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. 20.

B. $20\sqrt{3}$.

C. $20\sqrt{2}$.

D. $40\sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 5 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}$.

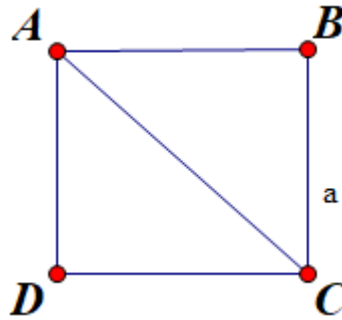
Vậy $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 20\sqrt{3}$.

Câu 29: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- A.** $4a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **D.** a^2 .

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 4a^2$.

Câu 30: Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$. Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

- A.** a^2 . **B.** $\frac{-a^2}{2}$. **C.** 0 . **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

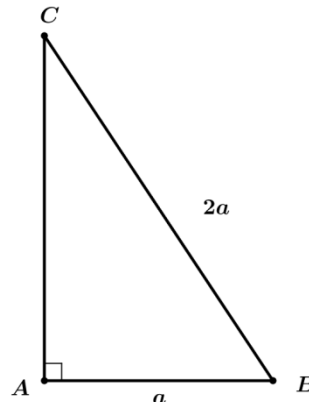
Tam giác ABC vuông cân tại A .

Vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Câu 31: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a, BC = 2a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- A.** $-a^2$. **B.** $\frac{1}{2}a^2$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** a^2 .

Lời giải



$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos B = a \cdot 2a \cdot \frac{a}{2a} = a^2.$$



Câu 32: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 10. Tính giá trị $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

A. 100.

B. 10.

C. 0.

D. -100.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ ngược hướng nên góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng 180°

$$\text{Nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos 180^\circ = -100$$

Câu 33: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

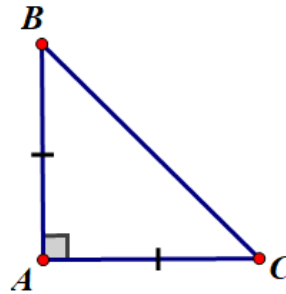
A. a^2 .

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. $-a^2$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2.$$

Câu 34: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , cạnh $AB = 5$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

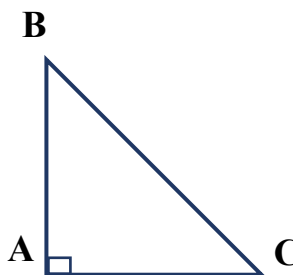
B. 25.

C. 20.

D. -20.

Lời giải

Chọn B



Xét $\triangle ABC$ vuông cân tại A , cạnh $AB = 5$ suy ra $BC = 5\sqrt{2}$ và $ABC = 45^\circ$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = BC \cdot BA \cdot \cos ABC = 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 25.$$

Câu 35: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $BC = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

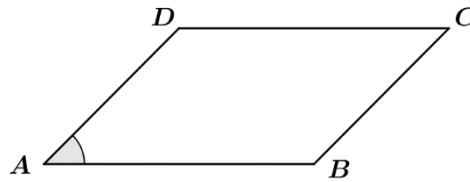
A. -1.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos BAD = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1.$$

Câu 36: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3, gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Giá trị $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

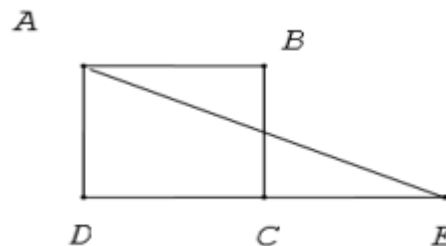
A. 18.

B. $-9\sqrt{3}$.

C. $9\sqrt{5}$.

D. -18.

Lời giải



Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2 \cdot 3 = 6$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= 0 + DE \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = 6 \cdot 3 \cdot (-1) = -18. \end{aligned}$$

Câu 37: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 5. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng?

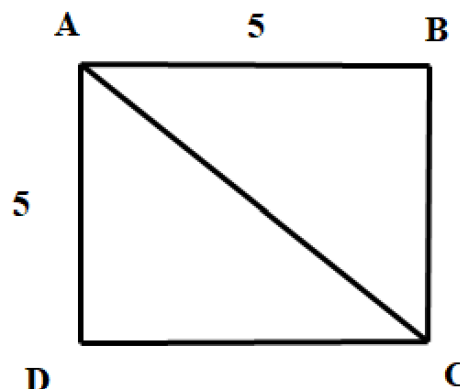
A. 25.

B. $25\sqrt{2}$.

C. $\frac{25\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{25}{2}$.

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $AC = 5\sqrt{2}$; góc $BAC = 45^\circ$;

$$\text{Tích vô hướng } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 25.$$



Câu 38: Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

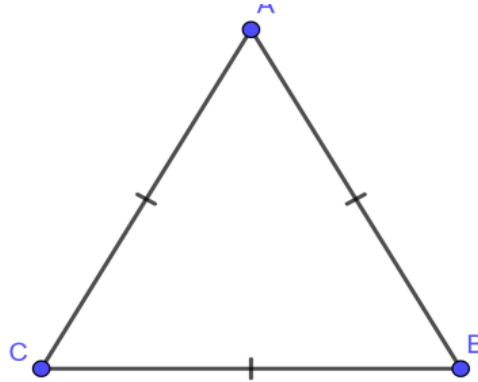
A. $-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. $\frac{-a^2}{2}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos C = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Câu 39: Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G và độ dài cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{3a^2}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AG}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$; với $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$; $|\overrightarrow{AG}| = AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 30^\circ$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Câu 40: Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 6. Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ bằng

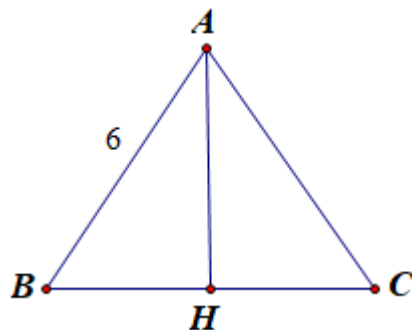
A. 9.

B. 27.

C. $9\sqrt{3}$.

D. $27\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow AH = 3\sqrt{3}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \cdot AH \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27$.



Câu 41: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3; AC = 4$. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$

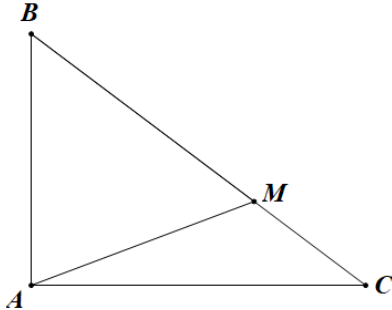
A. $\frac{23}{3}$.

B. $\frac{41}{3}$.

C. 8.

D. -23.

Lời giải



Xác định điểm M như hình vẽ

$$\text{Ta có: } BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow BM = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 3 \cdot 5 \cdot -\cos B = -9$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = BM \cdot BC \cdot \cos 0^\circ = \frac{10}{3} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{50}{3}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = -9 + \frac{50}{3} = \frac{23}{3}$$

Câu 42: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $\angle BAD = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

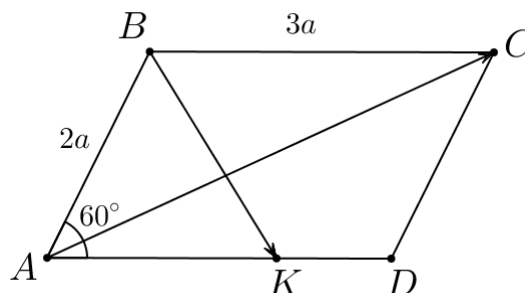
A. $3a^2$.

B. $6a^2$.

C. a^2 .

D. 0.

Lời giải



Từ $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$ suy ra $AK = \frac{2}{3} AD = 2a$ nên tam giác ABK đều.



Từ đó $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$ và $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BK} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ + 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$.

Câu 43: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ và $ABD = 60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI}$.

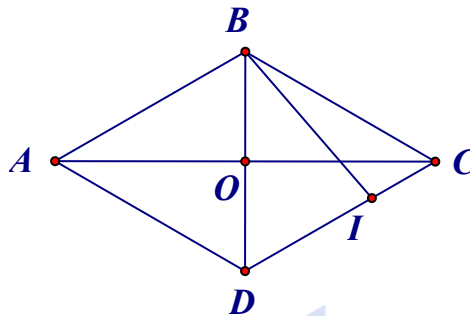
A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. $-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Do $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a và $ABD = 60^\circ$ nên ABD và BCD là các tam giác đều cạnh a .

Ta có: $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DI}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DI}$

$$= \overrightarrow{AO} \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy, } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 44: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$; $AC = 4$. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\frac{23}{3}$.

B. $\frac{41}{3}$.

C. 8.

D. -23.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$, do đó $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{3}(2 \cdot 4^2 - 3^2) = \frac{23}{3}.$$

Câu 45: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng với D qua C . Khi đó $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng

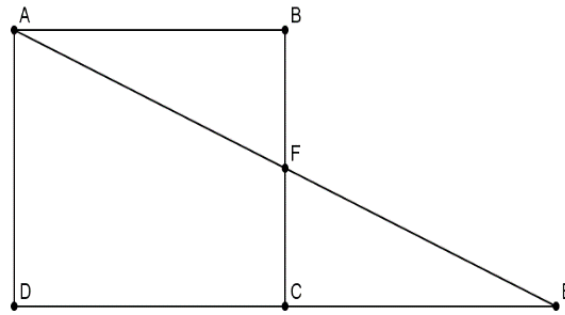
A. $5a^2$.

B. $2a^2$.

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $a^2\sqrt{5}$.

Lời giải



Vì E là điểm đối xứng với D qua C nên C là trung điểm của DE .

Gọi F là giao điểm của AE và BC .

Do $AD \parallel CF$ và C là trung điểm của DE nên F là trung điểm của AE .

Xét tam giác ADE vuông tại D , có $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = a\sqrt{5}$.

Xét tam giác ABF vuông tại B , có $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $\cos BAF = \frac{AB}{AF} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ta có $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AE \cdot AB \cdot \cos BAF = a\sqrt{5} \cdot a \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2a^2$.

Câu 46: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$.

Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng:

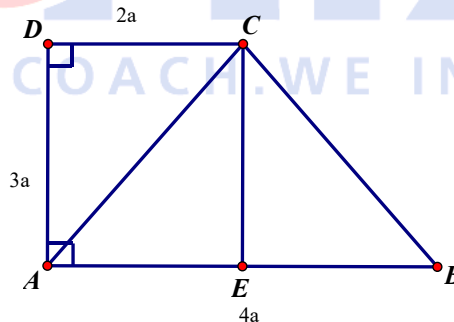
A. $3a^2$.

B. a^2 .

C. 0 .

D. $-9a^2$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của cạnh AB .

Suy ra: $ADCE$ là hình chữ nhật.

nên $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BC} = -EC \cdot BC \cdot \cos(\angle ECB)$

và $EC = AD = 3a$

Xét $\triangle ECB$ là tam giác vuông tại E , ta có:

$$CB = \sqrt{CE^2 + EB^2} = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{13}$$



$$\cos ECB = \frac{CE}{BC} = \frac{3a}{a\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3a \cdot a\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = -9a^2.$$

Câu 47: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a , ($0 < a \in \mathbb{R}$). Điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AC = 4AM$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$.

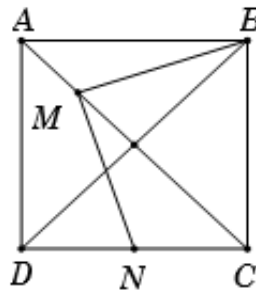
A. $\frac{3}{16}a^2$.

B. 0 .

C. $\frac{3}{8}a^2$.

D. a .

Lời giải



Ta có

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{16}(3\overrightarrow{AB}^2 + 9\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}^2)$$

$$= \frac{1}{16}(3a^2 + 0 - 0 - 3a^2) = 0.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$

Câu 48: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = a, AB = a\sqrt{3}$. Điểm N thuộc cạnh CD sao cho $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{2}$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN}$.

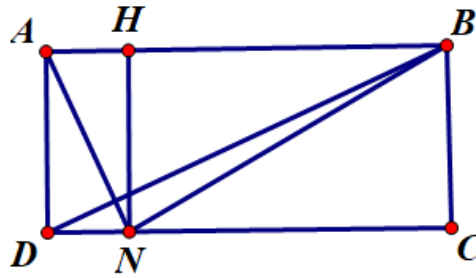
A. $\frac{3a^2}{2}$.

B. $-\frac{9}{4}a^2$.

C. $-\frac{5}{2}a^2$.

D. $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải



Gọi k là số thực thỏa: $\overrightarrow{DN} = k \cdot \overrightarrow{DC}$ và H là hình chiếu vuông góc của N lên cạnh AB

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{a^2}{2}$$

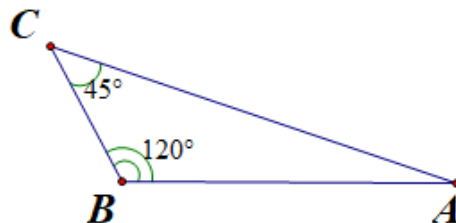
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 - k \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 - k \cdot AB^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow k \cdot AB^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow k = \frac{a^2}{2 \cdot 3a^2} = \frac{1}{6} \text{ nên } \overrightarrow{DN} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$\text{Khi đó ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{BA} \cdot \frac{5}{6} \overrightarrow{BA} = -\frac{5}{6} BA^2 = -\frac{5}{6} 3a^2 = -\frac{5}{2} a^2.$$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

Câu 49: Cho tam giác ABC như hình vẽ.



Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

A. 45° .

B. 120° .

C. 15° .

D. 165° .

Lời giải

$$\text{Ta có: } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$$

Câu 50: Cho tam giác ABC cân tại A , góc $BAC = 100^\circ$. Số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

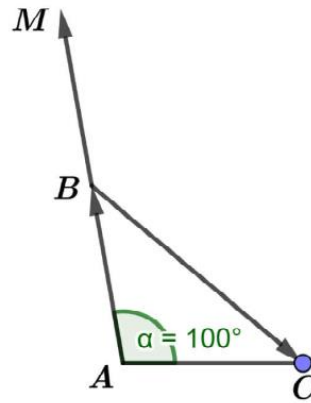
A. 140° .

B. 80° .

C. 40° .

D. 100° .

Lời giải



Xét tam giác ABC cân tại A , góc $BAC = 100^\circ$ suy ra $ABC = ACB = 40^\circ$.

Dựng $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$, khi đó, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = MBC = 180^\circ - ABC = 140^\circ$.

Câu 51: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector-không. Xác định α là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết rằng $2\vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 120^\circ$.

B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 150^\circ$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = -\sqrt{3}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150^\circ$.

Câu 52: Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại B , góc A bằng 60° . Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$ là

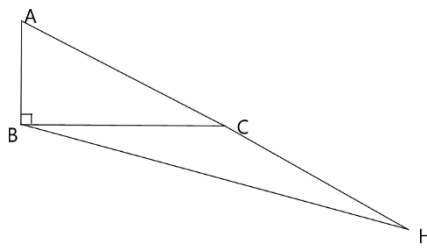
A. 150° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải



Vũ Thị Vui

Tam giác $\triangle ABC$ vuông tại B có: $BAC = 60^\circ \Rightarrow BCA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Gọi H là điểm đối xứng với A qua C . Khi đó $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$.

$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CB}) = BCH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Câu 53: Cho $A(0;3); B(4;0); C(-2;-5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. -9 .

B. -10 .

C. 16 .

D. 9 .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-3); \overrightarrow{BC} = (-6;-5)$

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-5) = -9$.



Câu 54: Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3; -4)$, $\overrightarrow{BC} = (11; 2) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 11 + (-4) \cdot 2 = 33 - 8 = 25$.

Câu 55: Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\frac{15}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{15}{2}$

D. $-\frac{15}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ = \frac{15}{\sqrt{2}}$.

Câu 56: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $M(3;4)$, $N(2;1)$, $P(-2;-3)$. Tìm điểm I trên đường thẳng NP sao cho góc $MIN = 135^\circ$.

A. $I(3;2)$

B. $I(2;3)$

C. $I(5;4)$

D. $I(4;5)$

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $\overrightarrow{NP} = (-4; -4)$;

Gọi $I(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (2-x; 1-y)$.

Vì $I \in NP \Rightarrow \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{NP}$ là hai vector cùng phương $\Rightarrow \frac{2-x}{-4} = \frac{1-y}{-4} \Leftrightarrow y = x-1 \Rightarrow I(x; x-1)$.

+) Ta có $|\cos MIN| = \left| \cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{NP}) \right| = \frac{|\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{NP}|}{|\overrightarrow{IM}| \cdot |\overrightarrow{NP}|}$ (1).

Vì $MIN = 135^\circ$ và $\overrightarrow{IM} = (3-x; 5-x)$; $\overrightarrow{NP} = (-4; -4)$ nên từ (1) ta có:

$$\frac{|-2x+8|}{\sqrt{2x^2-16x+34} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |-2x+8| = \sqrt{2x^2-16x+34} \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \Rightarrow I(5;4) \\ x=3 \Rightarrow I(3;2) \end{cases}$$

+) **Trường hợp 1:**

$$I(5;4) \Rightarrow \overrightarrow{IM}(-2;0); \overrightarrow{IN}(-3;-3) \Rightarrow \cos MIN = \cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}) = \frac{\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN}}{|\overrightarrow{IM}| \cdot |\overrightarrow{IN}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow MIN = 45^\circ$.

+) **Trường hợp 2:**

$$I(3;2) \Rightarrow \overrightarrow{IM}(0;2); \overrightarrow{IN}(-1;-1) \Rightarrow \cos MIN = \cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}) = \frac{\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN}}{|\overrightarrow{IM}| \cdot |\overrightarrow{IN}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$



$$\Rightarrow MIN = 135^\circ.$$

Vậy điểm cần tìm là $I(3;2)$.

Câu 57: Cho hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$. Khi đó cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

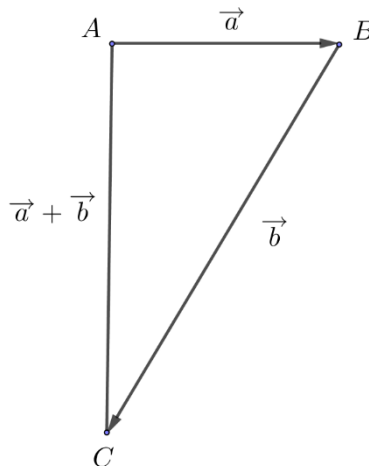
A. $-\frac{1}{18}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{15}$.

D. $-\frac{1}{15}$.

Lời giải



Dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Ta được tam giác ABC có $AB = 6$, $BC = 12$, $AC = 10$ và $(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} = \frac{10^2 + 6^2 - 12^2}{2} = -4.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-4}{6 \cdot 10} = -\frac{1}{15}.$$

Câu 58: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Vì hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Câu 59: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 0^\circ$.

C. $\alpha = 45^\circ$.

D. $\alpha = 180^\circ$.



Lời giải

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$. Mà $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ nên $\cos \alpha = -1$. Suy ra, $\alpha = 180^\circ$.

Câu 60: Tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;4)$, $C(3;1)$. Góc BAC của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

- A. 90° . B. $36^\circ 52'$. C. $143^\circ 7'$. D. $53^\circ 7'$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2)$; $\overrightarrow{AC} = (2; -1)$.

$$\cos BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow BAC = 143^\circ 7'.$$

Câu 61: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng:

- A. $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$. B. $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$. C. $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$. D. $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ.$$

Câu 62: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}| = 4 &\Leftrightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Câu 63: Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ nên } \alpha = 45^\circ.$$

Câu 64: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (3; -7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 120^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 135^\circ$.



Lời giải

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4+25} \cdot \sqrt{9+49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ.$$

- Câu 65:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (3; -6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
- A. 0° . B. 90° . C. 180° . D. 60° .

Lời giải

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

- Câu 66:** Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ là
- A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .

Lời giải

$$\text{Ta có } |\vec{a}| = |-\vec{a}|.$$

$$\text{Vậy } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ.$$

- Câu 67:** Cho véc tơ $\vec{a}(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b} = (3; y)$ tạo với véc tơ $\vec{a}$ một góc 45°
- A. $y = -9$. B. $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$. D. $y = -1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}}.$$

$$\text{Góc giữa hai véc tơ } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ bằng } 45^\circ \text{ suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90 + 10y^2} = 6 - 4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4y \geq 0 \\ 90 + 10y^2 = (6 - 4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1.$$

- Câu 68:** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Lời giải



Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 69: Tìm x để hai vector $\vec{a} = (x; 2)$ và $\vec{b} = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau.

- A.** 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Vector $\vec{a} = (x; 2)$ và $\vec{b} = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$.

Câu 70: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào đúng?

- A.** $\vec{u} = -\vec{v}$. **B.** $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **C.** $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. **D.** $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$. Do đó, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Câu 71: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .

- A.** $C(6; 0)$. **B.** $C(0; 6)$. **C.** $C(-6; 0)$. **D.** $C(0; -6)$.

Lời giải

$$C \in Oy \Leftrightarrow C(0; y)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-4; -1), \overrightarrow{AC} = (-1; y - 2).$$

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ tạo thành một tam giác vuông tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

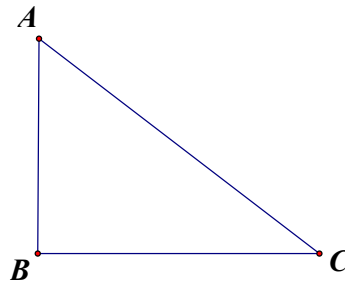
$$\Leftrightarrow y = 6.$$

Vậy $C(0; 6)$.

Câu 72: Cho tam giác ABC có $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .

- A.** $(0; 3)$. **B.** $(0; -3)$. **C.** $(3; 0)$. **D.** $(-3; 0)$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1); \overrightarrow{AC} = (6; -4); \overrightarrow{BC} = (5; -5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-5) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0; 3)$.

Câu 73: Cho tam giác ABC có $A(-1; 0), B(4; 0), C(0; m), m \neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Xác định m để tam giác GAB vuông tại G .

- A. $m = -\sqrt{6}$. B. $m = \pm 3\sqrt{6}$. C. $m = 3\sqrt{6}$. D. $m = \pm\sqrt{6}$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , suy ra $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right); \overrightarrow{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right)$.

Để tam giác GAB vuông tại G thì $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$.

Câu 74: Cho tam giác ABC có $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$. Diện tích $DABC$ là

- A. 6. B. $6\sqrt{2}$. C. 12. D. 9.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2), \overrightarrow{BC} = (3; 3)$

Ta thấy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$

Câu 75: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1; 3)$ và $C(3; 1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

- A. $A(0; 0)$ hoặc $A(2; -4)$. B. $A(0; 0)$ hoặc $A(2; 4)$.
C. $A(0; 0)$ hoặc $A(-2; -4)$. D. $A(0; 0)$ hoặc $A(-2; 4)$.

Lời giải

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .



$$\begin{aligned} \text{Gọi } A(x; y). \text{ Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } A &\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

Câu 76: Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Tính được $AB=3, BC=4$ và $AC=5$. Suy ra $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B . Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$.

Câu 77: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0); B(-1;1); C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

A. $H(-1;-9)$.

B. $H(-8;-27)$.

C. $H(-2;5)$.

D. $H(3;14)$.

Lời giải

$$\text{Gọi } H(x; y) \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} (1).$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AH} = (x-1; y); \overrightarrow{BC} = (6; -2); \overrightarrow{BH} = (x+1; y-1); \overrightarrow{AC} = (4; -1).$$

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2y = 0 \\ 4(x+1) - 1(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 6 \\ 4x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -27 \end{cases}.$$

Vậy $H(-8; -27)$.

Câu 78: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy ; cho tam giác ABC có $A(-1;1), B(1;3)$ và trọng tâm là $G(-2; \frac{2}{3})$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M .

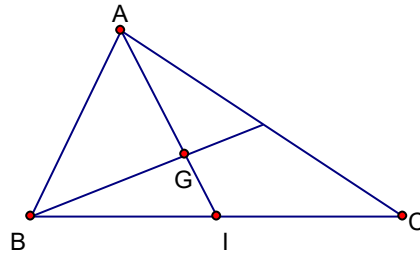
A. $M(0;-3)$.

B. $M(0;3)$.

C. $M(0;4)$.

D. $M(0;-4)$.

Lời giải



Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3(-2) - (-1) - 1 = -6 \\ y_C = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(-6; -2)$$

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; m)$

Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{5}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Ta có

$$\overrightarrow{BM} = (-1; m-3); \overrightarrow{CM} = (6; m+2); \overrightarrow{CB} = (7; 5); \overrightarrow{IM} = \left(\frac{5}{2}; m - \frac{1}{2}\right)$$

$$\triangle MBC \text{ vuông cân tại } M \text{ khi: } \begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m+2) - 6 = 0 \\ 5\left(m - \frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 = 0 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \Rightarrow M(0; -3).$$

Câu 79: Trên hệ trục tọa độ xOy , cho tam giác ABC có $A(4; 3)$, $B(2; 7)$, $C(-3; -8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là

- A. $(1; -4)$. B. $(-1; 4)$. C. $(1; 4)$. D. $(4; 1)$.

Lời giải

Gọi $D(x; y)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC ta có $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và D, B, C thẳng hàng

Mà $\overrightarrow{AD} = (x-4; y-3)$; $\overrightarrow{BC} = (-5; -15)$; $\overrightarrow{BD} = (x-2; y-7)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} x-4+3(y-3)=0 \\ 3(x-2)-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$



Câu 80: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

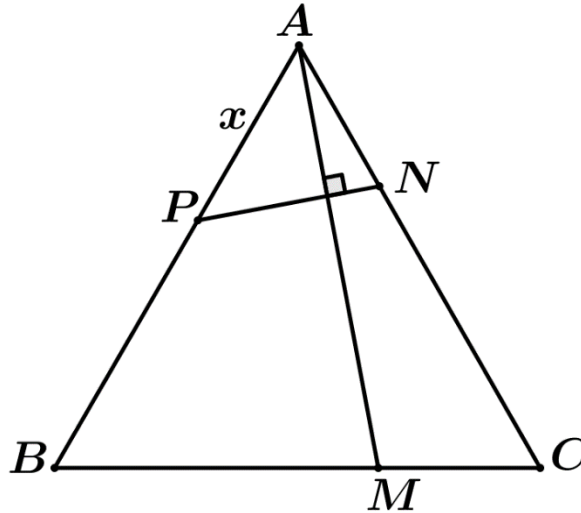
A. $x = \frac{5a}{12}$.

B. $x = \frac{a}{2}$.

C. $x = \frac{4a}{5}$.

D. $x = \frac{7a}{12}$.

Lời giải



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$, ta có $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3a}(-3x\vec{b} + a\vec{c})$

Theo yêu cầu bài toán ta có $AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$

$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}$.

Câu 81: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Biết $A(3; -1), B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$ là trọng tâm tam giác ABC . Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a; b)$. Tính $a + 3b$.

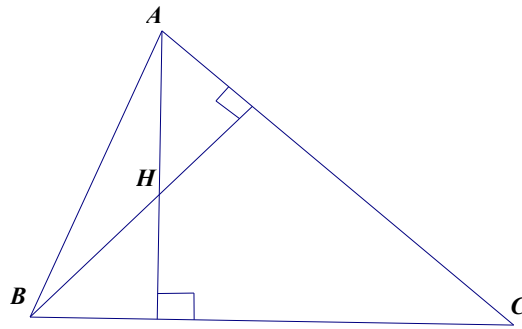
A. $a + 3b = \frac{2}{3}$.

B. $a + 3b = -\frac{4}{3}$.

C. $a + 3b = 1$.

D. $a + 3b = -2$.

Lời giải



Giả sử $C(x_C; y_C)$ và $H(x_H; y_H)$. Có I là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1; -4)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2; -6)$

$\overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

Câu 82: Cho hình thang vuông ABCD có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$.

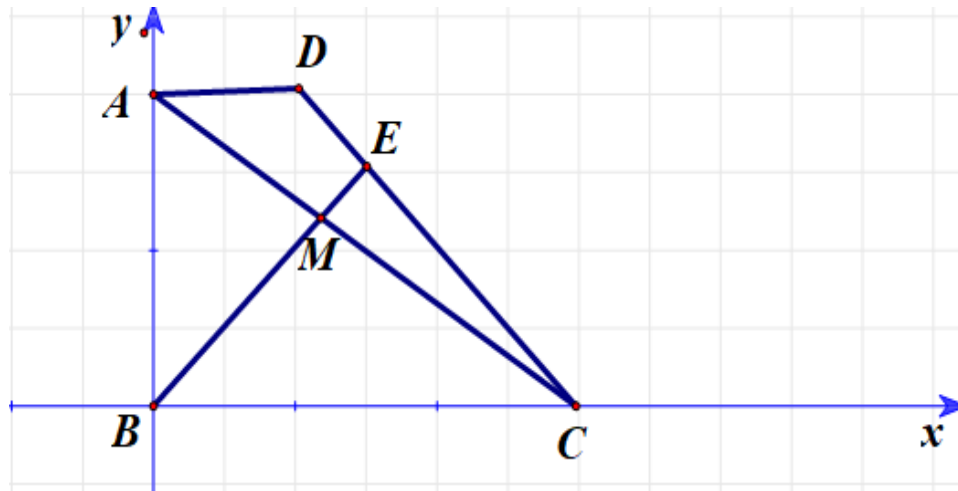
B. $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B, điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox.



Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (3t; 2 - 2t)$ và $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.

Câu 83: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

A. $a + 6b = 5$.

B. $a + 6b = 6$.

C. $a + 6b = 7$.

D. $a + 6b = 8$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AH} = (a + 3; b)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 6)$, $\overrightarrow{BH} = (a - 3; b)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 6)$.

Vì H là trực tâm $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$.

$\Rightarrow a + 6b = 7$.

Câu 84: Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC .

B. Đường tròn $(B; BC)$.

C. Đường tròn $(C; CB)$. **D.** Một đường khác.

Lời giải

$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 85: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :



- A. Đường tròn đường kính AB .
- B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
- C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
- D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

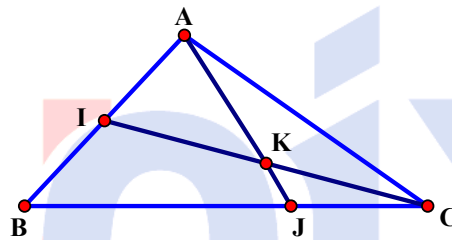
Câu 86: Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính IJ .
- B. Đường tròn đường kính IK .
- C. Đường tròn đường kính JK .
- D. Đường trung trực đoạn JK .

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Ta có } 3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}.$$

$$\text{Như vậy } (3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VECTO



Câu 87: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$. Tính $|\overrightarrow{AB}|$?

- A. $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = 20$. C. $AB = 4\sqrt{10}$. D. $\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{10}$.

Lời giải

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Câu 88: Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(-3; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = \sqrt{13}$. B. $AB = 3\sqrt{2}$. C. $AB = 4$. D. $AB = 5$.

Lời giải

$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

Câu 89: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$; $B(-1; 1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M . Khi đó độ dài đoạn OM bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Điểm M thuộc trục $Oy \Rightarrow M(0; y)$.

Ta có tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1-y)^2}$
 $\Leftrightarrow 4 - 4y = 1 - 2y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$. Vậy $OM = \frac{3}{2}$.

Câu 90: Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -3)$, $D(-2; -1)$. Xét ba mệnh đề:

(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0; -1)$.

Chọn khẳng định đúng

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.
C. Chỉ (II) và (III) đúng. D. Cả, đều đúng.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2)$; $\overrightarrow{DC} = (0; -2)$; $\overrightarrow{AC} = (-4; -4)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Nên $ABCD$ là hình bình hành. Vậy mệnh đề đúng.

Suy ra AC cắt BD tại trung điểm mỗi đường và điểm đó có tọa độ $M(0; -1)$, suy ra đúng.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2)$, suy ra $AB = |-2| = 2$; $\overrightarrow{AD} = (-4; -2)$, suy ra $AD = \sqrt{20}$, nên $AB \neq AD$, suy ra $ABCD$ không là hình thoi. Mệnh đề sai.

Câu 91: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(-1;4), B(2;5), C(-2;7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là cặp số nào?

- A.** $(-2;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(0;12)$. **D.** $(2;6)$.

Lời giải

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (3;1) \Rightarrow AB = \sqrt{10}.$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1;3) \Rightarrow AC = \sqrt{10}.$$

$$\overrightarrow{BC} = (-4;2) \Rightarrow BC = \sqrt{20}.$$

Nhận thấy $AB^2 + AC^2 = BC^2$ và $AB = AC$ nên $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A , suy ra tâm I là trung điểm cạnh huyền BC . Vậy $I(0;6)$.

Câu 92: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1;-17); B(-11;-25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC = \sqrt{13}$.

- A.** $C(-14;-27)$. **B.** $C(-8;-23)$.
C. $C(-14;-27)$ và $C(-8;-23)$. **D.** $C(14;27)$ và $C(8;23)$.

Lời giải

Giả sử $C(x_C; y_C)$. Theo bài ra ta có C thuộc tia BA nên $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

$$\text{Với } \overrightarrow{BC} = (x_C + 11; y_C + 25); \overrightarrow{BA} = (12; 8) \text{ ta có: } \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA} \ (k > 0) \Leftrightarrow \frac{x_C + 11}{12} = \frac{y_C + 25}{8} = k$$

$$\Leftrightarrow 8x_C - 12y_C - 212 = 0 \Leftrightarrow y_C = \frac{8x_C - 212}{12} \Leftrightarrow y_C = \frac{2x_C - 53}{3} \quad (1)$$

$$+) \ BC = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x_C + 11)^2 + (y_C + 25)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x_C + 11)^2 + (y_C + 25)^2 = 13 \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$(x_C + 11)^2 + \left(\frac{2x_C - 53}{3} + 25\right)^2 = 13 \Leftrightarrow (x_C + 11)^2 + \left(\frac{2x_C + 22}{3}\right)^2 = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{9}(x_C + 11)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (x_C + 11)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -14 \\ x_C = -8 \end{cases}$$

$$\text{Với } x_C = -14 \text{ thế vào (1) ta được: } y_C = \frac{2 \cdot (-14) - 53}{3} = -27.$$

$$\text{Khi đó } k = \frac{-14 + 11}{12} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4} < 0.$$



Với $x_c = -8$ thế vào (1) ta được: $y_c = \frac{2 \cdot (-8) - 53}{3} = -23$.

Khi đó $k = \frac{-8+11}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} > 0$.

Vậy $C(-8; -23)$.

- Câu 93:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(3;1)$. Giả sử $A(a;0)$ và $B(0;b)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$.
- A.** $T = 10$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = 5$. **D.** $T = 17$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a-3; -1)$, $\overrightarrow{MB} = (-3; b-1)$. MAB là tam giác vuông tại M khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -3(a-3) - (b-1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a \quad (*)$$

Với $a \geq 0, b \geq 0$ suy ra $0 \leq a \leq \frac{10}{3}$ (**)

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB = \frac{1}{2} \sqrt{(a-3)^2 + 1} \cdot \sqrt{9 + (b-1)^2} = \frac{3}{2} (a^2 - 6a + 10) = \frac{3}{2} (a-3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Do đó $\min S_{MAB} = \frac{3}{2}$ đạt được khi $a = 3$, khi đó $b = 1$.

Vậy $T = a^2 + b^2 = 10$.

DẠNG 5: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

- Câu 94:** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$ là
- A.** Đường tròn tâm G bán kính bằng GB . **B.** Đường tròn tâm G bán kính bằng GA .
C. Đường tròn tâm G bán kính bằng GC . **D.** Đường tròn tâm G bán kính bằng $4GA$.

Lời giải

Ta có G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$$



$$\Leftrightarrow 3MG^2 = 3GA^2 \Leftrightarrow MG = GA$$

Do điểm G cố định và độ dài GA không đổi nên điểm M thuộc đường tròn tâm G bán kính bằng GA .

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn đề bài là đường tròn tâm G bán kính bằng GA .

Câu 95: Cho ΔABC đều, cạnh bằng $a > 0$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{7a^2}{4}.$$

A. Quỹ tích điểm M là đường trung trực của AB .

B. Quỹ tích điểm M là đường thẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với BC .

C. Quỹ tích điểm M là đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{6}a}{2}$.

D. Quỹ tích điểm M là đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải

Gọi O là trọng tâm của ΔABC , ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9(\overrightarrow{MO})^2$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9MO^2$$

$$\begin{aligned} \text{Mà: } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{MO} = 3MO^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó, ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{9MO^2 - (MA^2 + MB^2 + MC^2)}{2} = \frac{6MO^2 - a^2}{2} = \frac{7a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MO = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm O , bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 96: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 2a$, $AD = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Gọi

N là điểm thuộc cạnh DC sao cho $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$.

c) Tìm tập hợp điểm I sao cho $IA^2 + IB^2 + ID^2 - 3IC^2 = 10a^2$.

Lời giải

Tìm tập hợp điểm I sao cho $IA^2 + IB^2 + ID^2 - 3IC^2 = 10a^2$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABD ta có



$$IA^2 + IB^2 + ID^2 = 3IG^2 + \frac{2}{3}(AB^2 + AD^2) = 3IG^2 + \frac{10a^2}{3}$$

$$\text{Vậy } IA^2 + IB^2 + ID^2 - 3IC^2 = 10a^2 \Leftrightarrow 3IG^2 + \frac{10a^2}{3} - 3IC^2 = 10a^2 \Leftrightarrow IG^2 - IC^2 = \frac{20a^2}{9}$$

$$\text{Mà } GC^2 = \frac{4}{9}AC^2 = \frac{20a^2}{9}.$$

$$\text{Suy ra } IG^2 - IC^2 = GC^2 \Rightarrow IG^2 = GC^2 + IC^2.$$

Vậy tập hợp điểm I là đường thẳng qua C và vuông góc với CG .

Câu 97: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Điểm M là một điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{a^2}{6}$. Biết tập hợp điểm M là một đường tròn. Bán kính đường tròn đó là

A. $R = 2$.

B. $R = \frac{a}{3}$.

C. $R = \frac{a}{4}$.

D. $R = \frac{a}{2}$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , I là trung điểm BC . Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9\overrightarrow{MG}^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9\overrightarrow{MG}^2$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 - \frac{a^2}{3} = 9\overrightarrow{MG}^2$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 - \frac{a^2}{3} = 9\overrightarrow{MG}^2$$

$$\Rightarrow 6\overrightarrow{MG}^2 = 3\overrightarrow{GA}^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow 6\overrightarrow{MG}^2 = 3 \cdot \frac{4}{9}AI^2 - \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow 6\overrightarrow{MG}^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{a}{3}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính $R = \frac{a}{3}$.

Câu 98: Cho tam giác ABC đều cạnh $3\sqrt{2}$. Biết tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 3$ là một đường tròn. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. 3.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .



Khi đó $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Vì tam giác ABC đều cạnh $3\sqrt{2}$ nên $GA = GB = GC = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.

Ta có: $(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC})^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 + 2(\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GC} \cdot \vec{GB} + \vec{GA} \cdot \vec{GC}) = 0$.

Suy ra $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GC} \cdot \vec{GB} + \vec{GA} \cdot \vec{GC} = \frac{-3GA^2}{2} = -9$.

Ta có $\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = 3$

$$\Leftrightarrow (\vec{MG} + \vec{GA}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GC}) + (\vec{MG} + \vec{GC}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GA}) = 3$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + 2\vec{MG} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + (\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GC} \cdot \vec{GB} + \vec{GA} \cdot \vec{GC}) = 3$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 - 9 = 3 \Leftrightarrow MG = 2$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 2.

DẠNG 6: BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Câu 99: Trên mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(8;0)$, $B(5;-4)$, $C(1;7)$. Tìm tọa độ của điểm D thuộc trục tung sao cho $DA^2 + DB^2 + DC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $D(0;y)$ thuộc trục tung.

Ta có :

$$\begin{aligned} DA^2 + DB^2 + DC^2 &= (0-8)^2 + (y-0)^2 + (0-5)^2 + (y+4)^2 + (0-1)^2 + (y-7)^2 \\ &= 3y^2 - 6y + 155 = 3(y-1)^2 + 152 \geq 152 \end{aligned}$$

Suy ra: $DA^2 + DB^2 + DC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 152 khi $y = 1$.

Vậy $D(0;1)$.

Câu 100: Trong mặt phẳng Oxy , cho ABC có $A(0;-2)$, $B(5;0)$, $C(3;5)$.

b. Tìm M trên trục Ox sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

b. Do $M \in Ox$ nên $M(m;0)$. Khi đó:

$$MA^2 + MB^2 = (0-m)^2 + (-2-0)^2 + (5-m)^2 + (0-0)^2 = 2m^2 - 10m + 29$$

$$= 2\left(m^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}m + \frac{25}{4}\right) + \frac{33}{2} = 2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{33}{2} \geq \frac{33}{2}; \forall m$$

Suy ra $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất bằng $\frac{33}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $m = \frac{5}{2}$.



Vậy $M\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Câu 101: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(2;1)$, $B(m;0)$, $C(0;c)$. Tìm giá trị của m sao cho tam giác ABC vuông tại A và diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (m-2; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-2; c-1)$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m-2)(-2) - 1(c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2m + 5$.

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(m-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + (c-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(m-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + (-2m+4)^2}$$

$$= (m-2)^2 + 1 = m^2 - 4m + 5 = m^2 - 4m + 4 + 1 = (m-2)^2 + 1 \geq 1.$$

Diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $m = 2$.

Câu 102: Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(0;-2)$, $B(5;0)$, $C(3;5)$. Tìm M trên trục Ox sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

Tìm M trên trục Ox sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Vì $M \in Ox \Rightarrow M(x;0)$

$$\text{Xét } MA^2 + MB^2 = x^2 + 4 + (x-5)^2 = 2x^2 - 10x + 29.$$

$$\text{Min}(MA^2 + MB^2) = \frac{33}{2}, \text{ khi } x = \frac{5}{2}.$$

Vậy $M\left(\frac{5}{2}; 0\right)$.

Câu 103: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ΔABC có $A(-4;0)$, $B(1;0)$. Gọi M là điểm nằm trên tia Oy . Khi $|2MA - MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tung độ của M là một số chia hết cho.

A. 3.

B. 7.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Ta có vì M nằm trên tia Oy nên $M(0; y_M)$, $y_M \geq 0$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = (-4; -y_M), \overrightarrow{MB} = (1; -y_M).$$

$$\text{Suy ra } MA = \sqrt{16 + y_M^2}, MB = \sqrt{1 + y_M^2}.$$

$$\text{Ta có } (2MA - MB)^2 - (MA - 2MB)^2 = 3(MA^2 - MB^2) = 3 \cdot 15 = 45.$$

$$\text{Suy ra } (2MA - MB)^2 \geq 45. \text{ Dẫn đến } |2MA - MB| \geq 3\sqrt{5}.$$



Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MA = 2MB$.

$$\text{Ta có } MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow 16 + y_M^2 = 4(1 + y_M^2) \Leftrightarrow 12 = 3y_M^2 \Leftrightarrow y_M^2 = 4 \Leftrightarrow y_M = 2.$$

Vậy $M(0;2)$.

Vậy tung độ của M là một số chia hết cho 2.

Câu 104: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;3)$. Giả sử $A(a;0)$ và $B(0;b)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 - 2b^2$.

A. $T = -17$.

B. $T = 10$.

C. $T = -10$.

D. $T = 17$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a-1; -3)$, $\overrightarrow{MB} = (-1; b-3)$. MAB là tam giác vuông tại M khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -1(a-1) - 3(b-3) = 0 \Leftrightarrow a = 10 - 3b \quad (*)$$

Với $a \geq 0, b \geq 0$ suy ra $0 \leq b \leq \frac{10}{3}$ (**)

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB = \frac{1}{2} \sqrt{(a-1)^2 + 9} \cdot \sqrt{1 + (b-3)^2} = \frac{3}{2} (b^2 - 6b + 10) = \frac{3}{2} (b-3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Do đó $\min S_{MAB} = \frac{3}{2}$ đạt được khi $b = 3$, khi đó $a = 1$.

Vậy $T = a^2 - 2b^2 = -17$.

Câu 105: Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 6$. O là trung điểm của AB . Điểm M di động trên đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$. Khi đó $T = MA^2 - 3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. -22 .

B. 22 .

C. -74 .

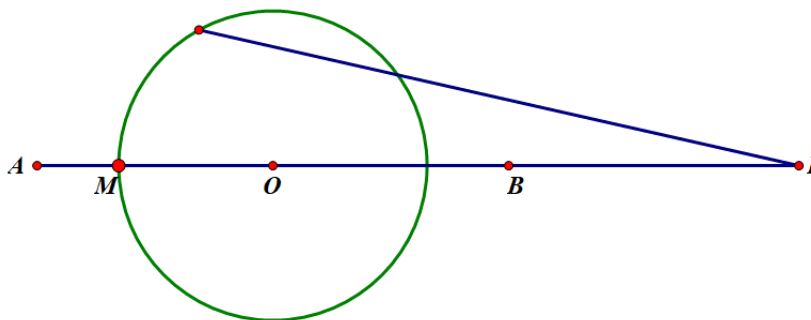
D. 74 .

Lời giải

Giả sử I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Do đó I cố định.

$$\Rightarrow IA = 9; IB = 3$$



$$\text{Ta có: } T = MA^2 - 3MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$



$$= -2MI^2 + 2\overline{MI}(\overline{IA} - 3\overline{IB}) + IA^2 - 3IB^2 = -2MI^2 + IA^2 - 3IB^2.$$

Do đó T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của tia OA với đường tròn (O) .

Khi đó $IM = IO + R = 6 + 2 = 8$.

Vậy T nhỏ nhất bằng $T_{\min} = -2.8^2 + 9^2 - 3.3^2 = -74$ khi M là giao điểm của tia OA với đường tròn (O) .

DẠNG 7: CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP KHÁC

Câu 106: Trong hệ toạ độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -1)$ và $B(-2; -2)$. Toạ độ điểm $C(a; b)$ thuộc trục Ox sao cho tam giác ABC cân tại A là

A. $C(-2; 0)$.

B. $C(0; -2)$.

C. $C(4; 0)$.

D. $C(2; 0)$.

Lời giải

Ta có $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{10}$

Do điểm $C(a; b)$ thuộc trục Ox nên $C(a; 0)$ suy ra $AC = \sqrt{(a-1)^2 + (0+1)^2}$

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10} = \sqrt{(a-1)^2 + (0+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -2 \end{cases} \text{ Với } C(4; 0), \text{ ta có } \overline{AB}(-3; -1), \overline{AC}(3; 1) \text{ suy ra 3 điểm}$$

A, B, C thẳng hàng, loại trường hợp này.

Với $C(-2; 0)$, kiểm tra tương tự thấy thỏa mãn. Vậy $C(-2; 0)$.

Câu 107: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $BAD = 60^\circ$. Quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = a^2$ là đường tròn có bán kính bằng

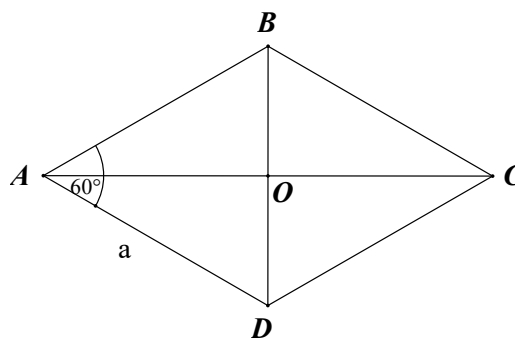
A. $\sqrt{2}a$.

B. $\frac{\sqrt{7}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

D. a .

Lời giải



Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = MO^2 - \frac{3a^2}{4}$$



$$\text{Do đó } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = a^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{7a^2}{4} \Leftrightarrow MO = \frac{\sqrt{7}a}{2}.$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn tâm O bán kính bằng $\frac{\sqrt{7}a}{2}$.

Câu 108: Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C . Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thỏa mãn điều kiện $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là:

- A. $\triangle ABC$ đều. B. $\triangle ABC$ cân tại C .
C. $\triangle ABC$ vuông tại C . D. $\triangle ABC$ vuông cân tại C .

Lời giải

Gọi M là trung điểm của AB

Ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM}$.

Nên $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow CM \perp AB$.

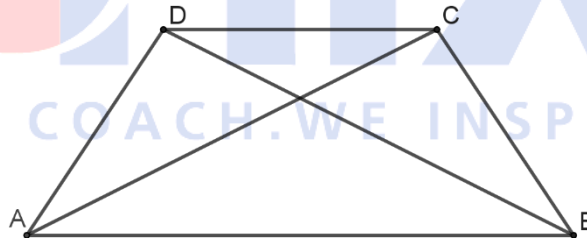
Vậy $\triangle ABC$ cân tại C .

Câu 109: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ với các đáy là AB và CD . Biết $A(1; 2)$, $B(2; -3)$, điểm C nằm trên trục tung, điểm D nằm trên trục hoành. Tính $OC + OD$.

- A. $\frac{4}{3}$. B. 2. C. 6. D. $\frac{\sqrt{26}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân có các đáy là AB và $CD \Rightarrow \overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB}$ với $t < 0$.

Vì $C \in Oy$ nên $C(0; c)$, $D \in Ox$ nên $D(d; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -5)$; $\overrightarrow{CD} = (d; -c)$.

$$\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} d = t \\ -c = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = t \\ c = 5t \end{cases}.$$

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AC = BD \Leftrightarrow AC^2 = BD^2$

$$\Leftrightarrow (0-1)^2 + (c-2)^2 = (d-2)^2 + (0+3)^2 \quad (*).$$



Thay $\begin{cases} c = 5t \\ d = t \end{cases}$ vào (*) ta được: $1 + (5t - 2)^2 = (t - 2)^2 + 9 \Leftrightarrow 24t^2 - 16t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (ktm) \\ t = -\frac{1}{3} & (tm) \end{cases}$

Với $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow C\left(0; -\frac{5}{3}\right)$ và $D\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Vậy $OC + OD = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$.

Câu 110: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác đều ABC . Các điểm M, N thỏa mãn:

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN . Biết điểm $N(-2; -1)$, điểm $I \in$

tia Oy và đường thẳng BI đi qua điểm $E(4; -3)$. Điểm C có tung độ là.

A. 25.

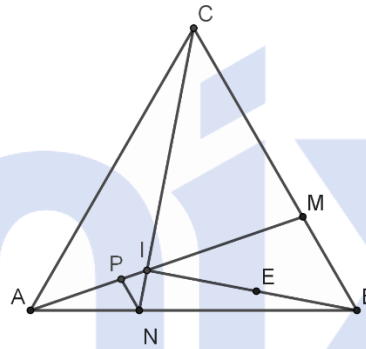
B. 13.

C. 37.

D. 41.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $NP \parallel BC$, ($P \in AM$). Áp dụng định lý Ta lét ta có:

+) $\frac{NP}{BM} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$.

+) $\frac{IN}{IC} = \frac{NP}{MC} = \frac{NP}{2BM} = \frac{1}{6}$.

Suy ra $\overrightarrow{IC} = -6\overrightarrow{IN} \Rightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BI} = -6(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BI}) \Rightarrow 7\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + 6\overrightarrow{BN} \Rightarrow 7\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BA}$.

Ta có $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Xét $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{NC} = \left(\frac{1}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{8}{21}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{10}{21}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{7}BC^2 - \frac{8}{21}BC^2 + \frac{10}{21}BC \cdot BA \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{7}BC^2 - \frac{8}{21}BC^2 + \frac{5}{21}BC^2 = 0$.

$\Rightarrow BI \perp CN$ hay $EI \perp NI$.

Điểm I thuộc tia Oy nên $I(0; m)$ với $m \geq 0$.



$$\overrightarrow{NI} = (2; m+1); \overrightarrow{EI} = (-4; m+3) \Rightarrow \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{EI} = -8 + (m+3)(m+1) = m^2 + 4m - 5.$$

$$EI \perp NI \Leftrightarrow \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{NI} = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (tm) \\ m = -5 & (ktm) \end{cases} \Rightarrow I(0; 1).$$

$$\text{Gọi } C(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{IC} = (x; y-1); \overrightarrow{IN} = (-2; -2).$$

$$\overrightarrow{IC} = -6\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y-1 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 13 \end{cases} \Rightarrow C(12; 13).$$

Vậy tung độ của C là 13.

Câu 111: Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, M là điểm trên đoạn BC sao cho $MB = 2MC$. Biết rằng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$. Độ dài cạnh AC là:

A. $AC = \frac{a\sqrt{33}}{3}$. **B.** $AC = a\sqrt{3}$. **C.** $AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $AC = a\sqrt{5}$

Lời giải

Từ giả thiết M là điểm trên đoạn BC sao cho $MB = 2MC$ nên ta có $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Đặt $AB = x$; $AC = y$ ta có $x^2 + y^2 = 4a^2$

$$\text{Mặt khác từ } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Nên có } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3}x^2 = a^2$$

Từ và ta có $y = \frac{a\sqrt{33}}{3}$ Chọn đáp án A

Câu 112: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Gọi M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$, và N là điểm sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. Diện tích của tam giác

IBC là

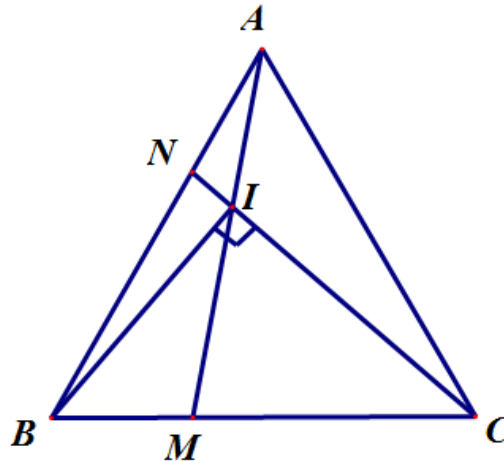
A. $S_{IBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{7}$. **B.** $S_{IBC} = \frac{a^2\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{IBC} = \frac{2a^2\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{IBC} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

$$\bullet I \in CN \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : \overrightarrow{BI} = x\overrightarrow{BN} + y\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BA} + 3y\overrightarrow{BM}, x + y = 1$$



và do $I \in AM$ nên từ $\overrightarrow{BI} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BA} + 3y\overrightarrow{BM}$ ta cũng có $\frac{2x}{3} + 3y = 1$.



$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{2x}{3} + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{6}{7}, y = \frac{1}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}.$$

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$$\bullet \overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BI} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \right) \cdot \left(\frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC} \right) = \frac{8}{21}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{4}{21}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{2}{21}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{21}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$\Rightarrow \Delta BIC$ vuông tại I .

$$\bullet \overrightarrow{BI} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC} \Rightarrow BI^2 = \left(\frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC} \right)^2 = \frac{21}{49}a^2.$$

$$\bullet IC^2 = BC^2 - BI^2 = a^2 - \frac{21}{49}a^2 = \frac{28}{49}a^2 \Rightarrow IC = \frac{2\sqrt{7}}{7}a.$$

$$\text{Vậy } S_{IBC} = \frac{1}{2}BI \cdot IC = \frac{a^2\sqrt{3}}{7}.$$

Câu 113: Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 5$. Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC , M là trung điểm BC . Biết $OH \perp AM$. Tính độ dài BC

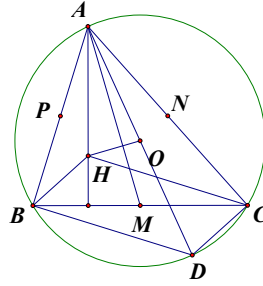
A. $BC = \sqrt{17}$.

B. $BC = 4$.

C. $BC = 2\sqrt{3}$.

D. $BC = 3\sqrt{2}$.

Lời giải



Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Chứng minh được tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Nên $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$

Ta có O là trung điểm của đoạn AD nên $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$

Suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

Ta có: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$; tương tự $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CH}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA và AB .

$$OH \perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3AB \cdot AP - 3AC \cdot AN + AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3c^2}{2} - \frac{3b^2}{2} + c^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + b^2 = 0$$

$$\text{Lại có: } a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\text{Suy ra: } 2a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} = \sqrt{17}.$$