



CHƯƠNG

IV

VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, góc giữa véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 60° .

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.
- b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$.
- c) $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$.
- d) Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ lớn hơn 90° .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

b) Sai: Ta có $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 19 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$.

c) Đúng: Ta có $(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$.

d) Sai: $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow 7 = 2 \cdot \sqrt{19} \cdot \cos(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})$

$\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{7\sqrt{19}} > 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) < 90^\circ$

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$
- b) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = 1$
- c) $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b}) = 16$
- d) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 3$.

b) Đúng. Ta có: $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$.

c) Sai. Ta có: $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\vec{a}^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot (\sqrt{3})^2 = -16$.



d) Sai. Ta có: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$,
 $\Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$.

Câu 3: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$
 b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 7$.
 c) $(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + 30\sqrt{3}$
 d) $(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 5 + 30\sqrt{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = -6\sqrt{3}$.

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3^2 - 4^2 = -7$.

$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 3|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2$
 $= 3 \cdot 3^2 - 5(-6\sqrt{3}) - 2 \cdot 4^2 = -5 + 30\sqrt{3}$.

Câu 4: Cho $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 13$.

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 21$.
 b) $\vec{a} \perp \vec{b}$
 c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 11$.
 d) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

Lời giải:

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 13 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 169$
 $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = \frac{400 - \vec{a}^2 - 4\vec{b}^2}{4} = \frac{169 - 25 - 4 \cdot 36}{4} = 0$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

c) Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 25 + 2 \cdot 0 + 36 = 61$.
 $\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{61}$

d) Xét $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 25 - 2 \cdot 0 + 36 = 61$.
 $\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{61}$
 $\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$

Câu 5: Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}$.

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$.
 b) Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .
 c) $|\vec{a} - \vec{b}| = 13$.



d) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{97}$.

Lời giải:

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Ta có: $\vec{x}^2 = |\vec{x}|^2$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37} \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 37 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 37 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 6 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

c) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 9 - 2 \cdot 6 + 16 = 13 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$

d) $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 16 = 97 \Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{97}$

Câu 6: Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} - \vec{b}| = 2$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 21$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 46$.

c) $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3\sqrt{6}$.

d) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{7}{8}$.

Lời giải:

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) $|\vec{a} - \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 4}{2} = \frac{21}{2}$.

b) Xét $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2 \cdot \frac{21}{2} + 16 = 46$.

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{46}$$

c) Xét $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 4 \cdot 9 - 12 \cdot \frac{21}{2} + 9 \cdot 16 = 54$.

$$\Rightarrow |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3\sqrt{6}$$

d) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\frac{21}{2}}{3 \cdot 4} = \frac{7}{8}$.

Câu 7: Cho $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 30$

c) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{61}$

d) $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 124$

Lời giải



a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b}) = 10$
 b) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 25 + 10 = 35$
 c) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 61 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{61}$
 d) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 124 \Rightarrow |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 2\sqrt{31}$

Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = \sqrt{3}, BC = 2$.

- a) Số đo góc $ACB = 60^\circ$.
 b) Tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.
 c) Tích vô hướng $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2\sqrt{3}$.
 d) Tích vô hướng $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\sin ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ACB = 60^\circ$ (vì ACB là góc nhọn)

b) Đúng.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.

c) Sai.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $ABC = 90^\circ - ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos ABC = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 3$.

d) Sai.

Ta có $|\vec{CA}| = CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} = 1$.

Và $(\vec{BC}, \vec{CA}) = 120^\circ$

$\Rightarrow \vec{BC} \cdot \vec{CA} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{CA}| \cdot \cos(\vec{BC}, \vec{CA}) = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1$.

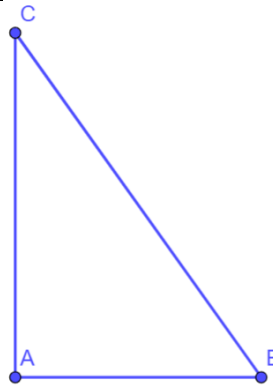
Câu 9: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12, BC = 20$.

- a) $ACB = 30^\circ$.
 b) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 144$.
 c) $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = 256$.
 d) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = 400$

Lời giải



a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------



a) Sai.

$$\sin ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow ACB \approx 36,87^\circ$$

b) Đúng.

$$\text{Ta có: } \cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 12 \cdot 20 \cdot \frac{3}{5} = 144$$

c) Sai.

$$\text{Ta có: } AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AC = 16 \Rightarrow \cos ACB = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -20 \cdot 16 \cdot \frac{4}{5} = -256$$

d) Sai.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -144 - 256 - 0 = -400$$

Câu 10: Cho tam giác ABC đều có cạnh a , M là trung điểm của BC . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

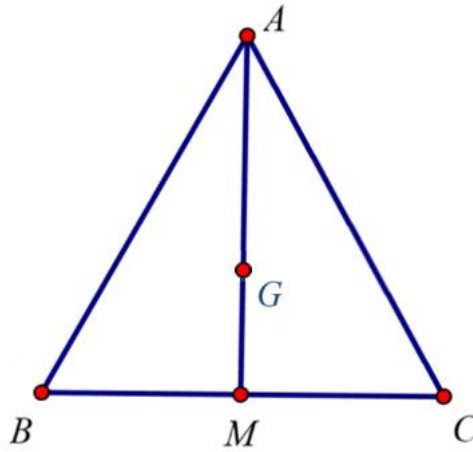
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) Đúng

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Sai

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

c) Sai

Vì AM là đường trung tuyến của tam giác đều ABC nên $AM \perp BC$.

Tam giác ABM vuông tại M , do đó $AM = AB \cdot \sin ABM = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = a\sqrt{3}$.

d) Đúng

Ta có $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (Vì $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$).

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

a) $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

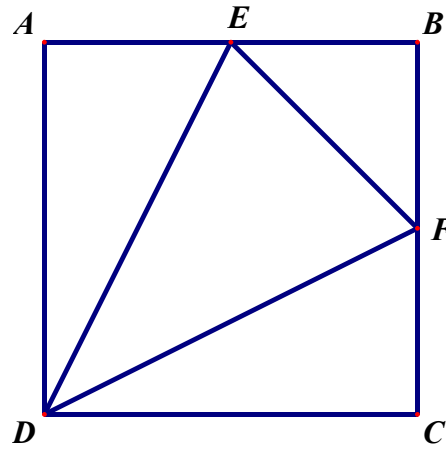
b) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

c) $|\overrightarrow{DE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

d) $\cos EDF = \frac{4}{5}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------



a) Sai, vì $\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AE = \frac{1}{2} AB$ nên $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

b) Sai, vì $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$.

c) Sai. Xét tam giác ADE vuông tại A có $DE = \sqrt{DA^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $|\overrightarrow{DE}| = DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

d) Đúng. Xét tam giác BEF vuông tại B có $EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác DEF có $DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $DF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Áp dụng định lý cosin ta có:

$$\cos EDF = \frac{DE^2 + DF^2 - EF^2}{2.DE.DF} = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Gọi O là tâm hình vuông và M là trung điểm cạnh BC . Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$.

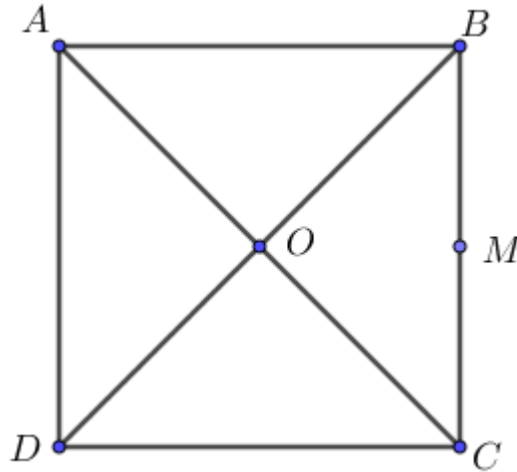
c) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{3a^2}{4}$.

Lời giải



a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Ta có

a) Đúng. Vì $AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

b) Sai. Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

c) Sai. Vì $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

d) Đúng. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}) \\ &= \frac{1}{2} \left(AB \cdot AO \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + AC \cdot AO \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3a^2}{4}. \end{aligned}$$

Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

a) $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

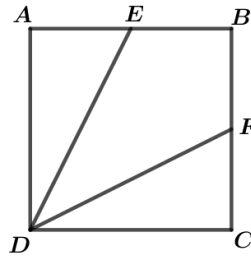
b) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

c) $|\overrightarrow{DE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

d) $\cos EDF = \frac{4}{5}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------



a) Sai. Ta có $AE = \frac{1}{2} AB$ (E là trung điểm AB). Hai vectơ $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng

$$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

b) Sai. Ta có F là trung điểm BC

$$\Rightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DF} \Leftrightarrow \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

c) Sai. Xét $\triangle DAE$ vuông tại A :

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 \Rightarrow DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

$$|\overrightarrow{DE}| = DE = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \text{ không phải } |\overrightarrow{DE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

d) Đúng. Ta có $\cos EDF = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DF}|}$.

$$\text{Ta có } DE = DF \text{ } (\triangle DAE = \triangle DCF) \Rightarrow |\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{DF}| = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} &= \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}}{2} = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}^2}{4} = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DB}^2}{4} \\ &= \frac{0 + \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DB}^2}{4} = \frac{2\overrightarrow{DB}^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{DB}^2 = |\overrightarrow{DB}|^2 = DB^2 = DC^2 + BC^2 = 2a^2.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = a^2. \text{ Vậy } \cos EDF = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DF}|} = \frac{a^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Câu 14: Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có $AB = 4$, $BC = 3$.

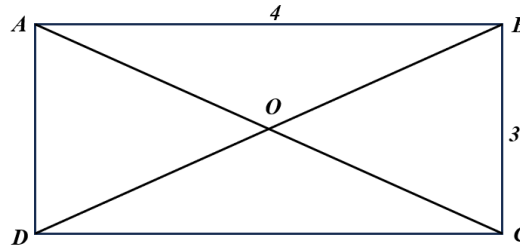
a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 7$.



- b) $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = 5$.
- c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$, với M là điểm bất kỳ.
- d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



a) SAI

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

b) ĐÚNG

Ta có $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = AC = 5$.

c) ĐÚNG

Ta có O là trung điểm của AC và BD nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} \\ &= 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{MO}\end{aligned}$$

d) ĐÚNG

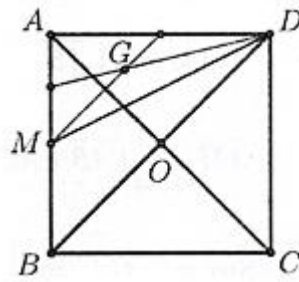
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos BAC = AB \cdot AC \cdot \frac{AB}{AC} = AB^2 = 16$.

Câu 15: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh a . Biết M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM .

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$
- b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$
- c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$
- d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------



a) Sai.

Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh a là $AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$= -AB \cdot AC \cdot \cos BAC = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$$

b) Sai.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$$

$$= AM \cdot AC \cdot \cos CAM = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

c) Đúng.

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= DA \cdot DB \cdot \cos ADB - \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \cos CAD$$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2.$$

d) Đúng.

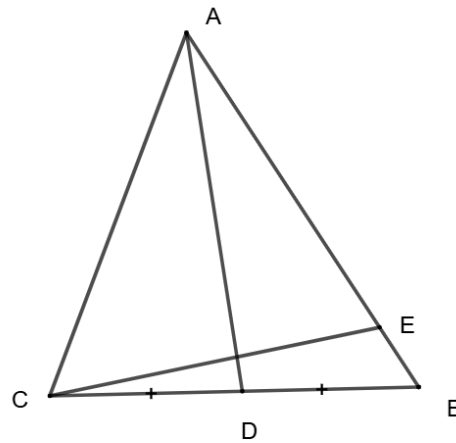
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Do đó: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}_0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos ACB = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

(Trong đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$).

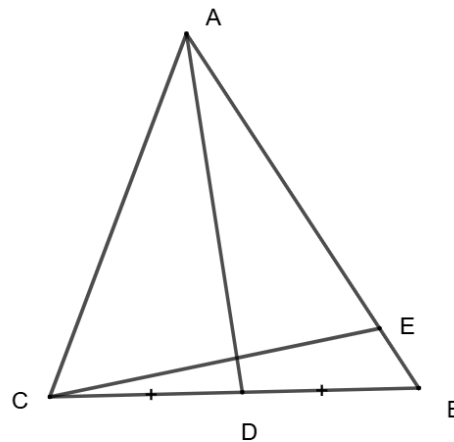
Câu 16: Cho tam giác ABC có $AC = 4\sqrt{2}$, $AB = 6$, $BAC = 45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \in \mathbb{R}$) (Hình vẽ).



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$.
- b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- c) $BC = 3\sqrt{5}$.
- d) $AD \perp CE$ khi $k = \frac{14}{15}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------



a) Sai

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 6.4\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 24.$$

b) Đúng

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

c) Sai

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 24 + 6^2 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$



d) Đúng

Ta có: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Từ đó, ta có: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (k\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

$$= \frac{1}{2} \left(k\overrightarrow{AB}^2 + k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}^2 \right) = \frac{1}{2} \left[6^2 \cdot k + 24k - 24 - (4\sqrt{2})^2 \right] = 30k - 28.$$

Khi đó: $AD \perp CE \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$.

Câu 17: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Gọi M là trung điểm AB , G là trọng tâm tam giác ADM .

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$.

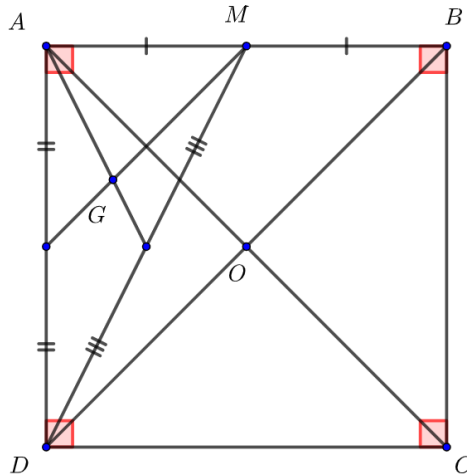
b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$.

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------



Xét tam giác ABC vuông tại B có: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (định lý Pythagore).

Suy ra $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$ và $AC \perp BD$.

a) Sai.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2$.

b) Sai.

Ta có: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.



c) Đúng.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}) + |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

d) Đúng.

Ta có:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \\ &= a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2 \quad (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ vì } AC \perp BD).\end{aligned}$$

Câu 18: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$.

a) $ACB = 60^\circ$

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai

Xét tam giác vuông ABC : $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$,

$$\cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow ABC = 60^\circ \Rightarrow ACB = 30^\circ.$$

b) Đúng

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos ABC = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$$

c) Sai

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} &= -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos ACB \\ &= -CB \cdot CA \cdot \cos 30^\circ = -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2.\end{aligned}$$

d) Đúng

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2.$$



Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

Câu 19: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD, AB .

a) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$.

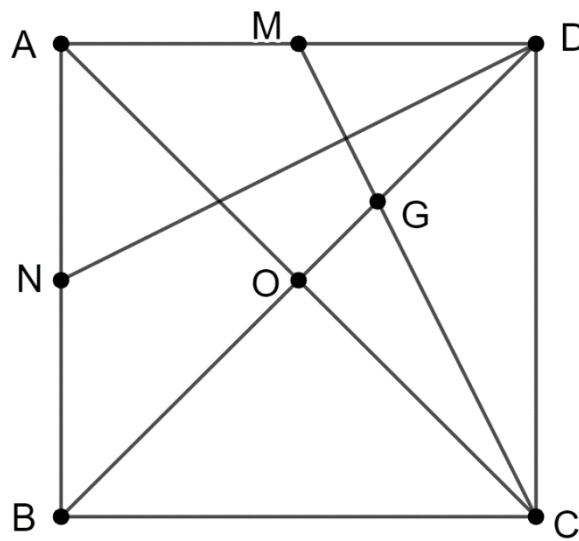
b) $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{a^2}{2}$.

c) $CM \perp DN$.

d) Tập hợp điểm K thỏa mãn $KA^2 + KD^2 + KC^2 = 10a^2$ là một đường tròn.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



a) Sai

Ta có $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = -AO \cdot AC \cdot \cos 0^\circ = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} = -a^2.$$

b) Đúng

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AM \cdot AD \cdot \cos 0^\circ - AC \cdot AD \cdot \cos 45^\circ$$

$$= \frac{a}{2} \cdot a - a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2} - a^2 = -\frac{a^2}{2}.$$

c) Đúng

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DN} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD}) = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \right) = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} AD^2 - \frac{1}{2} AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$



$$= -\frac{1}{4}AD \cdot AB \cdot \cos 90^\circ + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + AB \cdot AD \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Do đó $CM \perp DN$.

d) Đúng

Gọi G là trọng tâm tam giác ADC . Ta có

$$GA = GC = \sqrt{OG^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}a}{3};$$

$$GD = \frac{2}{3}OD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } KA^2 + KD^2 + KC^2 = 10a^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GD})^2 + (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GC})^2 = 10a^2.$$

$$\Leftrightarrow 3KG^2 + GA^2 + GD^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{KG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC}) = 10a^2$$

$$\Leftrightarrow 3KG^2 + \frac{5a^2}{9} + \frac{2a^2}{9} + \frac{5a^2}{9} + 0 = 10a^2 \Leftrightarrow KG = \frac{\sqrt{26}}{3}a.$$

Suy ra tập hợp điểm K thỏa mãn $KA^2 + KD^2 + KC^2 = 10a^2$ là đường tròn tâm G bán kính bằng $\frac{\sqrt{26}}{3}$.

Câu 20: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $AD = AB = a, DC = 2a$.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$

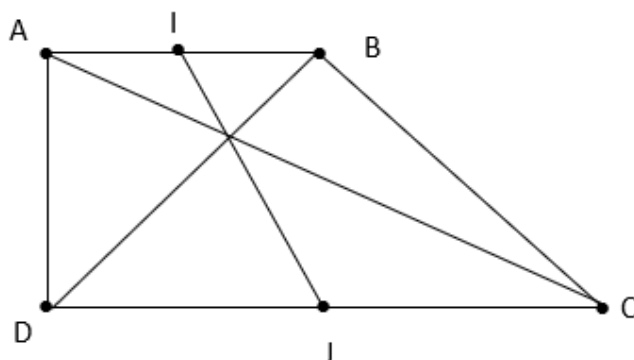
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3a^2$

d) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2a^2$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------



a) Sai.

Tam giác ABD vuông cân tại A nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

b) Đúng.



Vì tam giác ABD vuông cân tại A nên $BD = a\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -a \cdot a\sqrt{2} \cos(45^\circ) = -a^2$$

c) Sai.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= AD^2 - 0 + 0 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AD^2 - 2AB^2 = -a^2\end{aligned}$$

d) Đúng.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DJ} \\ &= 0 + a^2 + 0 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{DC} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = 0 + a^2 + 0 - a^2 + 0 + 2a^2 = 2a^2\end{aligned}$$

Câu 21: Cho tam giác đều ABC có cạnh a , G là trọng tâm.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{4}$.

c) $\angle AGB = 120^\circ$.

d) $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$$

b) Sai.

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) = AG \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}a^2$$

c) Đúng.

Tam giác AGB có $\angle GAB = \angle GBA = 30^\circ \Rightarrow \angle AGB = 120^\circ$.

d) Sai.

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos \angle AGB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$$

Câu 22: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Biết $AD = a$, $BC = 3a$, $AB = 2a$. Khi đó các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



- b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 4a^2$.
- c) $\left| \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \right|^2 = AC^2 + BD^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- d) Tập hợp điểm M thỏa mãn $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$ là đường tròn bán kính PI , với P, I lần lượt là trung điểm của AB, CD

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

$$AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

b) Sai.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \cdot AC \cdot \cos BAC = -2a \cdot AC \cdot \frac{AB}{AC} = -4a^2$$

c) Đúng.

$$\left| \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \right|^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \right)^2 = AC^2 + BD^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

d) Sai.

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MP} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

Nếu M không trùng với P và I thì $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MP \perp MI$ nên M thuộc đường tròn đường kính PI .

Nếu M trùng với P hoặc I thì hiển nhiên M thuộc đường tròn đường kính PI .

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$ là đường tròn đường kính PI .

Câu 23: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , G là trọng tâm tam giác ABC . Xét tính đúng-sai của mỗi mệnh đề sau:

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

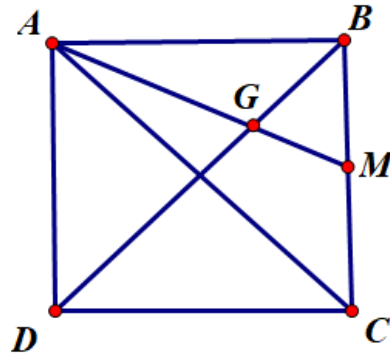
b) $\overrightarrow{AC}^2 = a^2$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = -a^2$

d) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) Đúng.

$$AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

b) Sai.

$$\overrightarrow{AC}^2 = AC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

c) Sai.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos 45^\circ = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$

d) Đúng.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})$$

$$= 0 + \frac{1}{3} \cdot AC \cdot AD \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{3}$$

Câu 24: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , $AB = 4$.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

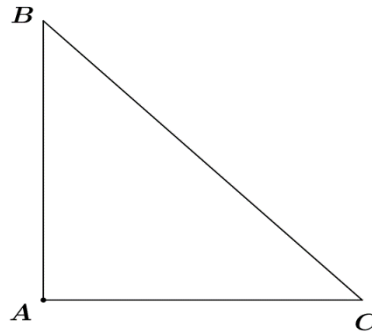
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 16\sqrt{2}$.

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 16$.

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) Đúng: vì $\triangle ABC$ vuông tại A .

b) Sai: Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -4.4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -16$.

c) Đúng. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 4.4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$.

d) Đúng. Từ câu b,c suy ra.

Câu 25: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , tâm O .

a) $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{OC}$.

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Góc giữa hai véc tơ $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = 120^\circ$.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai: Ta có $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{OC}$, mà $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$ là 2 véc tơ ngược hướng nên $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{OC}$.

b) Đúng: Vì $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Sai: Dựng $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{BD} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 135^\circ$.

d) Đúng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = -a^2$.

Câu 26: Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Gọi E trung điểm của BC

a) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 60° .

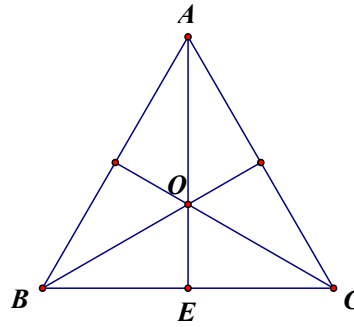
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CO}$ và $\overrightarrow{CA}$ bằng 150° .

c) Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $\frac{a^2}{2}$.

d) Tích vô hướng của $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ bằng a^2 .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------



- a) Đúng: Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là góc $BAC = 60^\circ$.
b) Sai: Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CO}$ và $\overrightarrow{CA}$ là góc $COA = 30^\circ$ (do CO là phân giác của góc BCA)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

- c) Sai: Ta có

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB};$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) &= 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CB} = 2|\overrightarrow{OE}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{CB}) \\ &= 2 \cdot OE \cdot CB \cos 90^\circ = 0. \end{aligned}$$

Câu 27: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$.

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
b) Góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 30° .
c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

- a) Đúng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (vì $AB \perp AC$).

- b) Đúng: Ta có $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos ABC = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$. Do đó $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$.

- c) Sai: Ta có $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$

$$\text{Theo định lý Pitago ta có } CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = ACB = 90 - 60 = 30$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = -3a^2.$$

- d) Đúng: ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$$

Câu 28: Cho tam giác ABC vuông tại A có $B = 30^\circ, AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC .

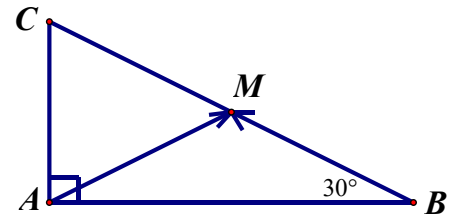
- a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 12$
c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$



d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) **Đúng**. Ta có: Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

b) **Đúng**. Ta có: $BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4$; $AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}$

Vậy $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BC \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$

c) **Sai**. Ta có: $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = ACB = 60^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Vậy $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 4 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -4$

d) **Đúng**.

Ta có: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$

$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4$; $AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}$; $BM = 2 \Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6$. Vậy $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2 = -6 + 4 = -2$

Câu 29: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 3 và góc B bằng 60° .

a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$

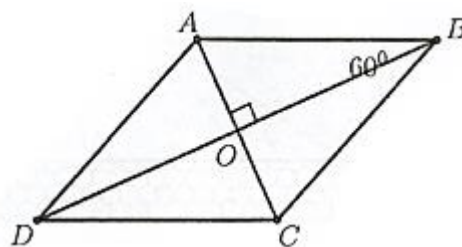
b) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 3$

c) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) = 30^\circ$

d) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{27}{8}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) **Đúng**. $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \hat{ABC} = 60^\circ$

b) **Sai**. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = DA \cdot DC \cdot \cos ADC = 3 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$.

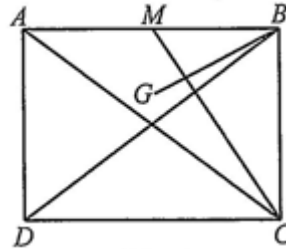


c) Sai. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BCD} = 120^\circ$.

d) Đúng. $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DC}) = 150^\circ$.

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} = OD \cdot AB \cdot \cos 150^\circ = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{27}{8}.$$

Câu 30: Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 4a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ACM (Hình).



a) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

b) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = -a^2$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ACM nên

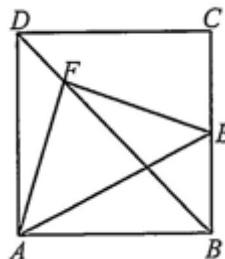
$$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC = AD = 3a$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2$$

$$= \frac{1}{4}(4a)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 3a - \frac{1}{3}(3a)^2 = -3a^2.$$

Câu 31: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Lấy E là trung điểm của BC , điểm F thỏa mãn $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$



a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$



b) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{EF} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

d) Tam giác AEF vuông cân.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Ta có: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$

$= \frac{-3}{16}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AD}^2 = 0 \Rightarrow AF \perp EF$.

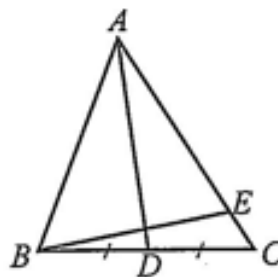
Ta có: $\overrightarrow{AF}^2 = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

$\overrightarrow{EF}^2 = \left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

$\Rightarrow AF^2 = EF^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2 \Rightarrow AF = EF$. Vậy tam giác AEF vuông cân tại F .

Chú ý: Ta có thể chứng minh tam giác AEF vuông bằng định lý Pythagore.

Câu 32: Cho tam giác ABC có $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 6$, $BAC = 45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$ ($k \in \mathbb{R}$) (Hình).



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $BC = 3\sqrt{5}$

d) $AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24$.



b) Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 6^2 - 2 \cdot 24 + (4\sqrt{2})^2 = 20$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$

$$\overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

$$= \frac{1}{4}[(4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 24 + 6^2] = 29 \Rightarrow AD = \sqrt{29}.$$

c) Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Từ đó, ta có:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}[24k + 6^2 \cdot k - (4\sqrt{2})^2 - 24]$$

$$= 30k - 28.$$

Khi đó $AD \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$.

Câu 33: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc B bằng 60° .

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

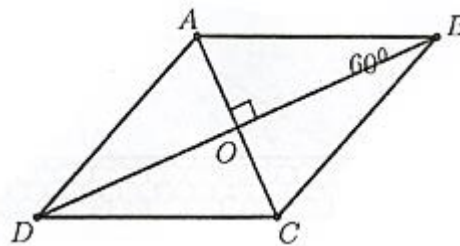
b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 30^\circ$

c) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 3$

d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -3$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Xét hình thoi $ABCD$ có $ABC = 60^\circ \Rightarrow BAD = 120^\circ$; tam giác ABC có

$$AB = BC = 2, ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều cạnh } 2 \Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 60^\circ, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 180^\circ - BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = DA \cdot DC \cdot \cos ADC = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2$;

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = -|\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos ABO = -BO \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = -\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3.$$

Câu 34: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$.

a) $ACB = 60^\circ$

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$.



b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Xét tam giác vuông ABC : $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$, $\cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow ABC = 60^\circ \Rightarrow ACB = 30^\circ$.

Ta có: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos ABC = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$.

Ta có: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos ACB$
 $= -CB \cdot CA \cdot \cos 30^\circ = -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2$.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

Câu 35: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh a . Biết M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM .

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$

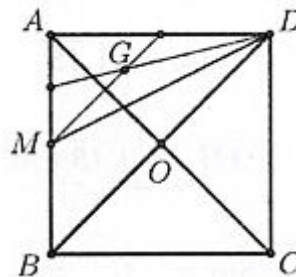
b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------



Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh a là $AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= -AB \cdot AC \cdot \cos BAC = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$

$= AM \cdot AC \cdot \cos CAM = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$



$$= DA \cdot DB \cdot \cos ADB - \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \cos CAD$$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2.$$

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Do đó: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}_0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos ACB = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

(trong đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$).

Câu 36: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng a .

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$;
- b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$;
- c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$;
- d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Do $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$.

b) Hai vector $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$ cùng hướng, do đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = BAO = 45^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = AB \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Hai vector $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng, do đó $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = CA \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180^\circ = -a^2$.

d) Ta có: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ (trong đó $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$).

Ta có: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = CA \cdot CB \cdot \cos ACB = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$.

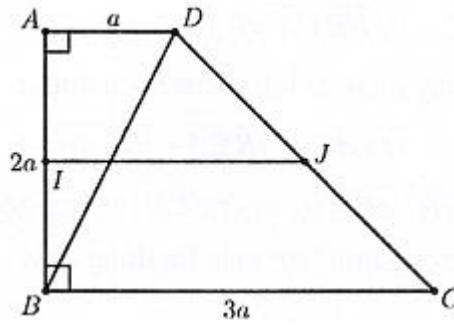
Vậy $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$.

Câu 37: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , biết $AD = a, BC = 3a$ và cạnh $AB = 2a$.

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$
- b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$
- c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$
- d) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_0$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -4a^2.$$

b) Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = BC \cdot BD \cdot \cos DBC$

$$= BC \cdot BD \cdot \cos BDA = BC \cdot BD \cdot \frac{AD}{BD} = BC \cdot AD = 3a^3.$$

(trong đó $DBC = BDA$ vì là hai góc so le trong).

c) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= -\overrightarrow{AB}^2 + 0 + 0 + BC \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = -AB^2 + 3a \cdot a \cdot 1 = -(2a)^2 + 3a^2 = -a^2.$$

d) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$. Ta có:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}}_0 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ} = BC \cdot IJ \cdot \cos 0^\circ = 3a \cdot 2a \cdot 1 = 6a^2.$$

Câu 38: Cho tam giác ABC đều có cạnh a , có trọng tâm G .

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{4}$

c) $\angle AGB = 120^\circ$

d) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{a^2}{6}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$

b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) = AG \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}a^2$

c) Tam giác AGB có $GAB = GBA = 30^\circ \Rightarrow \angle AGB = 120^\circ$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos \angle AGB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$$

Câu 39: Cho tam giác ABC có $AB = 2a, AC = 3a, \angle BAC = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng BC . Điểm J thuộc đoạn AC thỏa mãn: $12AJ = 7AC$.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4a^2$



- b) $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
 c) $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$
 d) $AI \perp BJ$

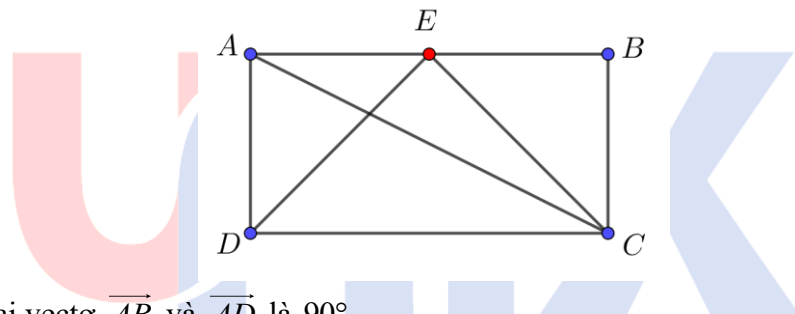
Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos BAC = 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = 3a^2$
 b) Do I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
 c) $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$
 c) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} \left(-\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2 \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(-4a^2 + \frac{7}{12} \cdot 3a^2 - 3a^2 + \frac{7}{12} \cdot 9a^2 \right) = 0$

Vậy $AI \perp BJ$

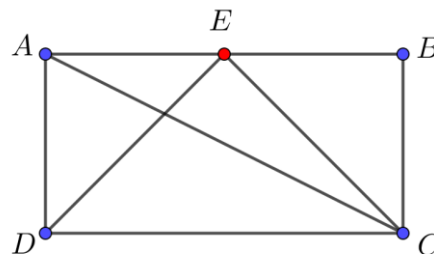
Câu 40: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD = 2a$. Gọi E là trung điểm cạnh AB .



- a) Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ là 90° .
 b) Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{EC}$ là 135° .
 c) Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{DC}$ là $2a^2$.
 d) Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{EC}$ là $5a^2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



- a) **Đúng.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ có giá vuông góc nên góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ là 90° .
 b) **Sai.** Ta có $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} \Rightarrow (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}) = BEC$.
 $\triangle BEC$ vuông cân tại B có góc $BEC = 45^\circ$. Do đó góc giữa hai vector $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{EC}$ bằng 45°
 c) **Đúng.** Các $\triangle ADE$ và $\triangle BEC$ đều là các tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a nên $DE = a\sqrt{2}$, $EC = a\sqrt{2}$. Mặt khác: $DC^2 = (2a)^2 = DE^2 + EC^2$.



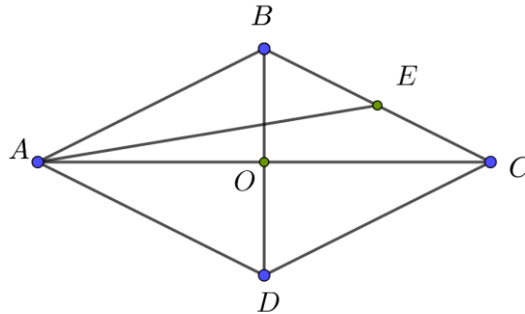
Suy ra $\triangle CDE$ vuông cân tại E có $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = DE \cdot DC \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = a\sqrt{2} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2a^2$.

d) Sai. Ta có: $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EC})^2 = AC^2 + EC^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}^2 = AC^2 + EC^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC} = \frac{AC^2 + EC^2 - AE^2}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC} = \frac{(a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{2})^2 - a^2}{2} = 3a^2.$$

Câu 41: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $AB = a$, $BAD = 60^\circ$. Gọi E là trung điểm cạnh BC .



a) Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ là 60° .

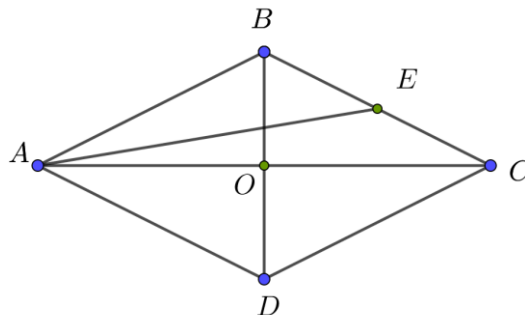
b) Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{CA}$ là $-\frac{3a^2}{2}$.

c) Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{DC}$ là $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

d) Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{EC}$ là $\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) **Đúng.** $\triangle ABD$ đều nên góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ là $BAD = 60^\circ$.

b) **Đúng.** Hai vector $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{CA}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CA} = -AO \cdot CA = -2AO^2$

$\triangle ABD$ đều cạnh a có đường cao $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CA} = -2AO^2 = -2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3a^2}{2}$

c) **Sai.** Ta có: $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = -\frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{4}$

d) **Đúng.** Ta có: $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC})^2 = AE^2 + EC^2 + 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow AC^2 = AE^2 + EC^2 + 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC}$



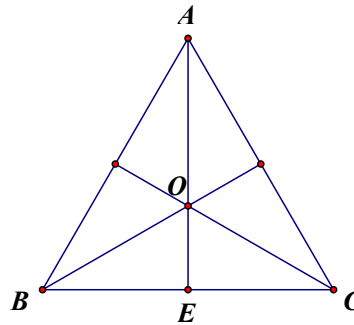
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} = \frac{AC^2 - AE^2 - EC^2}{2}$$

$$\text{Ta có } AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos 120^\circ = a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 120^\circ = \frac{7a^2}{4},$$

$$AC^2 = 3a^2, EC^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EC} = \frac{AC^2 - AE^2 - EC^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 42: Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Gọi E trung điểm của BC .



- a) Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là 60° .
 b) Góc giữa hai vector $\overrightarrow{CO}$ và $\overrightarrow{CA}$ là 150° .
 c) Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là $\frac{a^2}{2}$.
 d) Tích vô hướng của $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ bằng 0.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

- a) **Đúng.** Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là góc $BAC = 60^\circ$.
 b) **Sai.** Góc giữa hai vector $\overrightarrow{CO}$ và $\overrightarrow{CA}$ là góc $COA = 30^\circ$. Do CO là phân giác của góc BCA .

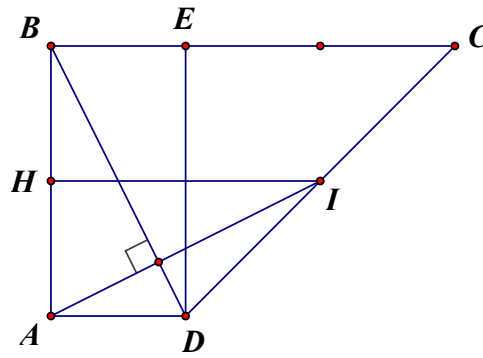
c) **Sai.** Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$

d) **Đúng.** Ta có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$;

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CB} = 2|\overrightarrow{OE}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{CB})$$

$$= 2 \cdot OE \cdot CB \cos 90^\circ = 0.$$

Câu 43: Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của CD, AB và E là chân đường vuông góc của D trên cạnh BC .



- a) Góc giữa hai vector $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{CB}$ là 0° .
b) Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ là 45° .
c) Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ là a^2 .
d) Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{BD}$ là 90° .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) **Đúng.** $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{CB}$ là hai vector cùng hướng nên góc giữa $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{CB}$ là 0° .

b) **Đúng.** Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$, do vậy góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ là góc giữa hai vector $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{DC}$

là góc $EDC = 45^\circ$. Do tam giác EDC vuông cân tại E .

c) **Sai.** Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2 \\ &\quad (\text{Vì } \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0; \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0).\end{aligned}$$

d) **Đúng.** Ta có: HI là đường trung bình của hình thang $ABCD$, do đó $HI = \frac{AD + BC}{2} = 2a$

$$\text{Có } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA}) (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

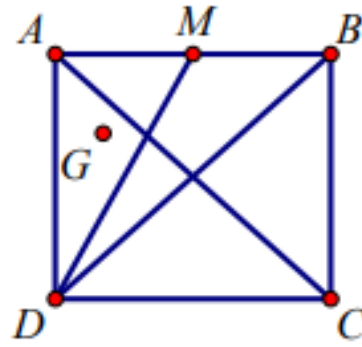
$$\text{Mà } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \left(\text{do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB} \right); \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \left(\text{do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD} \right).$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \text{góc giữa } AI \text{ và } BD \text{ bằng } 90^\circ.$$

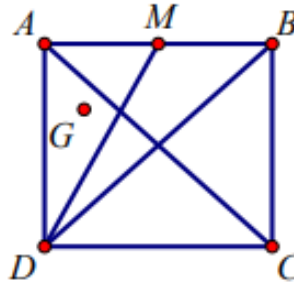
Câu 44: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM như hình vẽ sau



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.
- b) Góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$ bằng 45° .
- c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$.
- d) $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) = \frac{21a^2}{4}$.

Lời giải:

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ (vì $AB \perp AD$).
- b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 180^\circ - \angle ABD = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.
- c) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \angle ACB$
($\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$)

Mặt khác $\angle ACB = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2.$$

d) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right).$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right).$$



$$\text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) = \left(\frac{5}{2} \overrightarrow{AB} + 2 \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + 2 \overrightarrow{AD} \right) = \frac{5}{4} AB^2 + 4 AD^2 = \frac{21a^2}{4}.$$

Câu 45: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$.

- a) Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
 b) Góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 30° .
 c) Tích vô hướng $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$.
 d) Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$.

Lời giải:

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (vì $AB \perp AC$).

b) Ta có $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos ABC = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

Do đó $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$.

c) Ta có $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$

Theo định lý Pitago ta có $CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = ACB = 90 - 60 = 30$

Suy ra $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = -3a^2$.

d) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

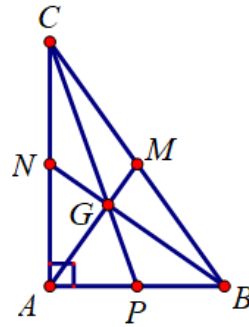
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2.$$

Câu 46: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- a) Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ có giá trị là a^2
 b) Góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ là 30°
 b) Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ là $-4a^2$
 c) Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$ là $\frac{4a^2}{3}$

Lời giải:

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



Hình 2.2

a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 2a^2 \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}).$$

$$\text{Mặt khác } \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos ABC = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$$

$$\text{b) } \cos ABC = \frac{1}{2} \Rightarrow ABC = 60^\circ \Rightarrow ACB = 30^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - ACB = 150^\circ$$

c) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2. \text{ Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}) \text{ Ta có}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$$

d) Tương tự cách 2 của câu c) vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

$$\text{Có } GA^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = \frac{4}{9}m_a^2; GB^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 = \frac{4}{9}m_b^2; GC^2 = \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{4}{9}m_c^2$$

$$\begin{aligned} +) \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \\ &= -\frac{2}{9} \left(\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \right) \\ &= -\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2) = -\frac{1}{6} (a^2 + 3a^2 + 4a^2) = \frac{-4a^2}{3} \end{aligned}$$

Câu 47: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a.

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2.$$

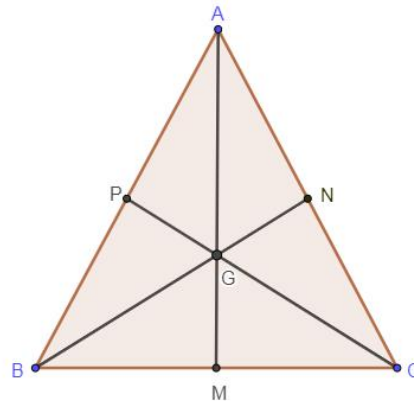
$$\text{c) } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}.$$



d) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

Ta có: $AM = BN = CP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $GA = GB = GC = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

a) Đúng.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

b) Sai.

Vì G là trọng tâm tam giác đều ABC nên $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BC}$. Suy ra $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

c) Sai.

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}.$$

d) Sai.

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} = AG \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}) = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 48: Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh bằng a.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{a^2}{2}$.

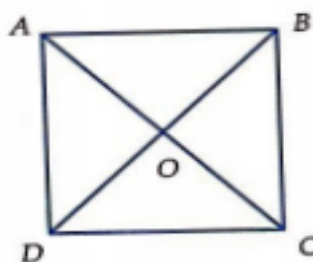
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC}$.

c) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$.

d) $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------





a) **Mệnh đề a) đúng**

Hai vector $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$ cùng hướng, do đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = 45^\circ$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = AB \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$.

b) **Mệnh đề b) sai**

Do $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.

Do đó: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = a^2$.

Hai vector $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng, do đó $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = CA \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) = -a^2$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC}$ là sai.

c) **Mệnh đề c) sai.** Ta có

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) &= 2\overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= 2AO \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}) \quad (\text{do } \overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}) \\ &= 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Và } (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= a^2 + a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2}{2} \end{aligned}$$

Vậy $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$ là sai.

d) Ta có

$$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = 4\overrightarrow{AO} \cdot 4\overrightarrow{DO} = 0.$$

Vậy $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = 0$ là đúng.

Mệnh đề d) đúng.

Câu 49: Cho hình vuông ABCD. Xét các mệnh đề sau.

a) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

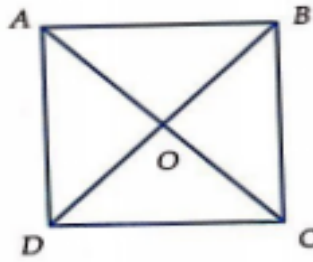
b) $\sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 0$.

c) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -1$.

d) $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}) = 0^\circ, (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------



a) Ta có: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Vậy $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \cos 135^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. **Mệnh đề a) sai.**

b) Vì $AC \perp BD$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ$.

Vậy $\sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \sin 90^\circ = 1$. **Mệnh đề b) sai.**

c) Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \cos 180^\circ = -1$. **Mệnh đề c) đúng.**

d) Hai vector $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$ cùng hướng, do đó $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}) = 0^\circ$

và hai vector $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng, do đó $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$. **Mệnh đề d) đúng.**

Câu 50: Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh bằng 3.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

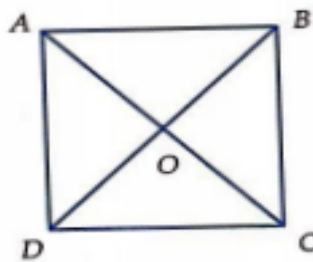
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = 9$.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



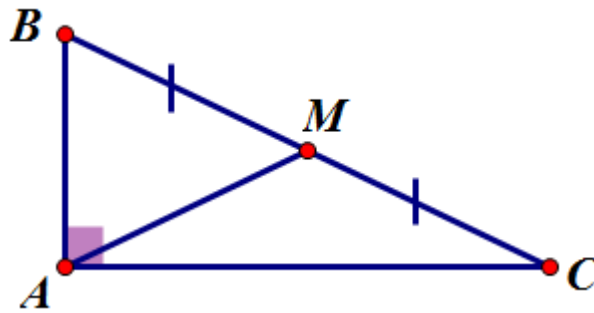
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ (do hai vecto này vuông góc với nhau)

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 9$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = AD \cdot OB \cdot \cos 135^\circ = 3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{9}{2}$.

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = 3 \cdot 3 \cdot (-1) = -9$.

Câu 51: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến.



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.
c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = a^2$.
d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

- a) Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AB \perp AC$. Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
b) Ta có $\tan B = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$. Do đó $B = 60^\circ$. Và $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.
Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ = a^2$.
c) Vì AM là trung tuyến nên $AM = \frac{1}{2}BC = a$;
Do đó $AB = AM = BM = a \Leftrightarrow \triangle ABM$ đều.
Vậy $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos \angle AMB = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.
d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -AB \cdot AM \cdot \cos \angle BAM = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 52: Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH .

- a) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.
c) $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} = -\frac{3a^2}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

- a, Vì AH là đường cao của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$
suy ra $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên **a) đúng**
b, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ nên **b) sai**.
c, $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BC} = CH \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{CH}; \overrightarrow{BC}) = \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos 180^\circ = -\frac{a^2}{2}$ nên **c) sai**.



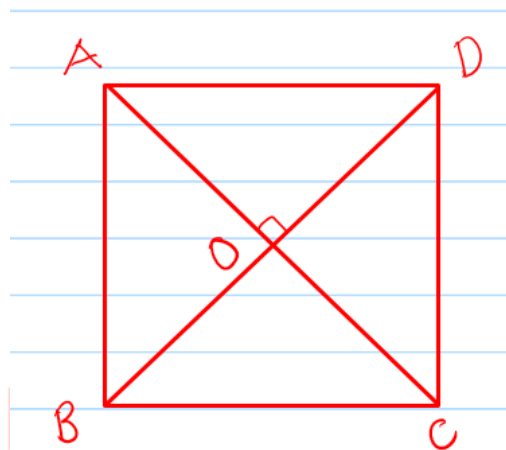
d, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} = AB \cdot HA \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{HA}) = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}$ nên **d) đúng**.

Câu 53: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , đường cao AH . Gọi O là giao điểm của AC và BD

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2$.
c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} = -a^2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



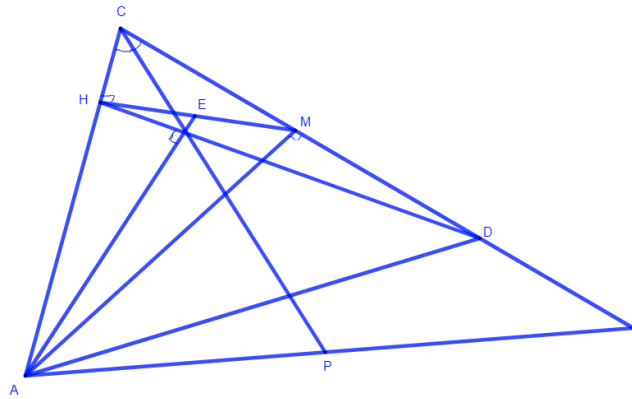
- a, Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên **a) đúng**
b, Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ suy ra $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ nên **b) sai**.
c, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2$ nên **c) đúng**.
d, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -AB \cdot AO \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = -a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(45^\circ) = -\frac{a^2}{2}$ nên **d) sai**.

Câu 54: Cho tam giác ABC có $AB = 7, AC = 5, BC = 8$. D là điểm thuộc đoạn BC sao cho tam giác ACD cân tại C . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DC và H là chân đường cao kẻ từ M tới cạnh AC . E là trung điểm của MH . P là chân đường phân giác trong của góc C .

- a) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 20$.
b) $\angle ACD = 30^\circ$
c) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$
d) $CP = \frac{40\sqrt{3}}{13}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



$$a) \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})^2] = \frac{1}{2} [\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - (\overrightarrow{BA})^2] = \frac{1}{2} [5^2 + 8^2 - 7^2] = 20.$$

$$b) \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos C = 5 \cdot 8 \cdot \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle C = 60^\circ$$

c) Ta có: Tam giác ACD cân tại C và $\angle C = 60^\circ$ nên Tam giác ACD đều.
Suy ra $AM \perp DM$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DH} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MH}) \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH}) \cdot \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= \overrightarrow{MH} (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AM}) \\ &= \overrightarrow{MH} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{aligned}$$

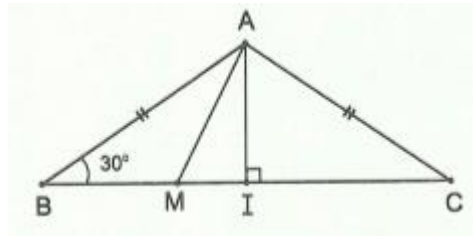
$$\begin{aligned} d) \text{ Ta có: } \frac{PA}{PB} &= \frac{CA}{CB} = \frac{5}{8} \Rightarrow 8\overrightarrow{PA} = 5\overrightarrow{BP} \\ \Rightarrow 8(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CP}) &= 5(\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CB}) \Rightarrow 13\overrightarrow{CP} = 8\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB} \\ \Rightarrow 169 \cdot CP^2 &= 64 \cdot CA^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + 25 \cdot CB^2 \\ \Rightarrow 169 \cdot CP^2 &= 64 \cdot 25 + 80 \cdot 20 + 25 \cdot 64 \\ \Rightarrow CP^2 &= \frac{4800}{169} \\ \Rightarrow CP &= \frac{40\sqrt{3}}{13}. \end{aligned}$$

Câu 55: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , có $B = 30^\circ$ và $BC = 12$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Lấy M là điểm thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$.

- a) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
- b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} = 12$.
- c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 72$.
- d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 4$.

Lời giải:

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



a) Ta có tam giác ABC cân tại đỉnh A nên $AI \perp BC$ do đó $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = -AB \cdot AI \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = -AB \cdot AI \cdot \frac{AI}{AB} = -AI^2$.

Tam giác ABI có $\tan 30^\circ = \frac{AI}{BI} = \frac{AI}{6} \Rightarrow AI = 2\sqrt{3}$. Vậy $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} = -12$.

c) Tam giác ABI có $AI = 2\sqrt{3}, BI = 6$ nên $AB = 4\sqrt{3}$.

Vậy $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$.

d) $MC = 2MB \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}) \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{2}{9}\overrightarrow{BC}^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 72 - \frac{2}{9} \cdot 12^2 = 16 \end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 16$.

Câu 56: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $A = 60^\circ$.

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2 \sqrt{3}$.

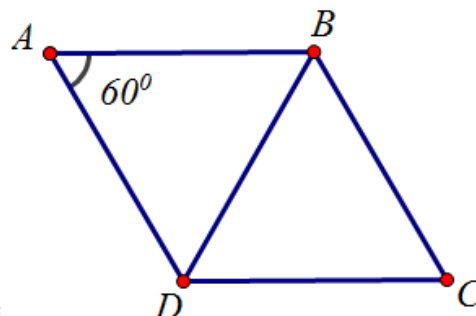
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$.

d) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = a$.

Lời giải:

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------



giải

Do $ABCD$ là hình thoi nên $AB = AD = a \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A .

Mà $A = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều cạnh a . Suy ra $AB = AD = BD = a$.



a) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot CB \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

d) Ta có $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = a$.

Câu 57: Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AB=3a$, $AC=4a$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC .

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12a^2$.

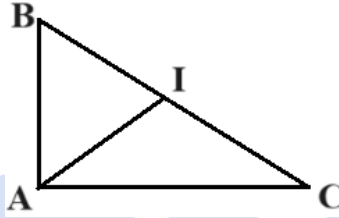
b) Góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ lớn hơn 90° .

c) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}) = -9a^2$.

d) Côsin của góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $\frac{7}{25}$.

Lời giải:

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



Có $AB=3a$, $AC=4a$ $AB=3a$, $AC=4a \Rightarrow BC=5a$, $AI = \frac{5a}{2}$.

a) $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \angle ABC$. Góc $\angle ABC < 90^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) > 90^\circ$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \angle ABC$
 $= -3a \cdot 5a \cdot \frac{3}{5} = -9a^2$.

d) Có $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{7a^2}{2}$.

$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AI}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\frac{7a^2}{2}}{\frac{5a}{2} \cdot 5a} = \frac{7}{25}$

Câu 58: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=a$. Trên cạnh BC lấy điểm I sao cho $BI = \frac{2}{3}BC$

a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{2}a^2$.

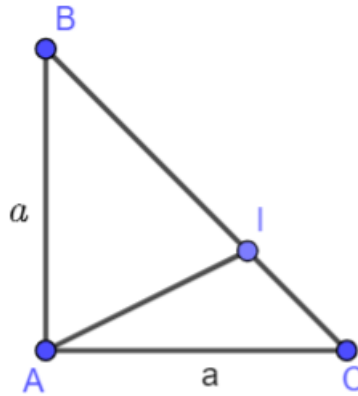
c) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 5a$

d) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}a^2$

Lời giải



a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------



- a) Vì $AB \perp AC$ nên $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$
- b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \angle ABC = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.
- c) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 5a^2 \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}a$.
- d) Ta có $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
- $$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{3}a^2$$

Câu 59: Một công viên ven sông được thiết kế theo hình thang ABCD với $AB \parallel CD$. Ban quản lý muốn lắp đặt hai hệ thống vòi phun nước tại điểm A và B để phun nước ra các vị trí C và D dọc bờ sông sao cho tia nước từ mỗi vòi phun sẽ tạo thành một góc đặc biệt, giúp tạo cảnh quan đẹp nhất và tránh giao thoa tia nước. Ban quản lý cần biết:



- Góc phun nước tối ưu để hai vòi phun không giao thoa ở giữa hình thang.
 - Điều kiện để hai tia nước từ A đến C và từ B đến D vuông góc khi giao nhau tại điểm O, giúp tạo hiệu ứng độc đáo.
- a) Góc phun nước từ vòi A đến C và từ vòi B đến D sẽ nhỏ hơn 90° để hai tia nước không giao nhau quá gần.
- b) Độ mạnh của hai tia nước từ vòi phun tại A và B cần được tính bằng tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ để đạt khoảng cách tối ưu.
- c) Nếu $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, hai tia nước sẽ vuông góc khi giao nhau tại O, tạo nên một hiệu ứng đẹp mắt tại giao điểm
- d) Để đảm bảo hai tia nước tạo thành một đẳng thức đẹp mắt giữa các vector từ các đỉnh của hình thang, ta có: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.



Hai tia nước từ A và B nếu tạo góc nhỏ hơn 90° thì sẽ đảm bảo không giao nhau ở điểm O quá gần, giúp duy trì khoảng cách đẹp giữa các tia phun nước. Khi góc giữa các vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ nhỏ hơn 90° , hai tia phun nước hướng về phía nhau mà không gặp nhau quá sớm.

b) Sai.

Tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cho biết mức độ tương đồng và góc giữa hai hướng phun. Tuy nhiên, độ mạnh của tia nước (áp lực nước) không phụ thuộc vào tích vô hướng này mà chủ yếu dựa trên tốc độ bơm và kích thước vòi phun. Tích vô hướng chỉ xác định độ dài và góc chứ không điều chỉnh được "độ mạnh" hay áp lực của nước

c) Đúng.

Tích vô hướng bằng 0 có nghĩa là hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ vuông góc. Điều này đảm bảo rằng tia nước từ A đến C và từ B đến D sẽ giao nhau tại điểm O và tạo thành góc vuông, giúp tạo ra một hình ảnh đối xứng và đẹp mắt

d) Đúng.

Dạng thức $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ là một dạng điều kiện vuông góc trong hệ vector khi các vector từ điểm O đến các đỉnh có tổng tích vô hướng bằng 0. Điều này có thể xảy ra khi các tia nước tại O tạo nên hình ảnh cân bằng về mặt hình học.





Câu 60: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (1; -2), \vec{b} = (-2; -6)$.

- a) Kết quả của biểu thức $3\vec{a} + 2\vec{b}$ là một véc tơ.
b) Tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$.
c) Góc giữa hai véc tơ $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$.
d) Ta có $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = 2$ vậy $\vec{d} = (10; 3)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng: Ta có $3\vec{a} + 2\vec{b} = 3(1; -2) + 2(-2; -6) = (3; -6) + (-4; -12) = (-1; -18)$.

b) Sai: Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-6) = 10$.

c) Đúng: Ta có $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$.

d) Sai: Gọi $\vec{d} = (x; y)$. Từ $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = 2$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x - 6y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -3 \end{cases}$

Vậy $\vec{d} = (10; -3)$.

Câu 61: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A = (-1; -1), B = (3; 1), C = (6; 0)$.

- a) Tọa độ các véc tơ $\vec{AB} = (4; 2), \vec{AC} = (7; 1)$.
b) 3 điểm A, B, C thẳng hàng.
c) Góc giữa hai véc tơ $(\vec{BA}; \vec{BC}) = 135^\circ$.
d) $S_{ABC} = 4$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng: Ta có

$$\vec{AB} = (3 - (-1); 1 - (-1)) = (4; 2)$$

$$\vec{AC} = (6 - (-1); 0 - (-1)) = (7; 1)$$

b) Sai: Vì $\vec{AB} = (4; 2), \vec{AC} = (7; 1) \Rightarrow \frac{4}{7} \neq \frac{2}{1}$ nên 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

c) Đúng: Ta có $\vec{BA} = (-4; -2), \vec{BC} = (3; -1)$ do đó

$$\cos B = \cos(\vec{BA}; \vec{BC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{-4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{-10}{\sqrt{200}} \Rightarrow B = (\vec{BA}; \vec{BC}) = 135^\circ.$$

d) Sai: Hạ đường cao AH, ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$.

Câu 62: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai véc tơ $\vec{a} = (-2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 1)$.

- a) $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 14$.
b) Nếu $\vec{c} = (0; 7)$ thì $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.
c) Vector $\vec{d} = m\vec{i} + 2\vec{j}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi $m = 3$.



d) Cho $\vec{e} = x\vec{i} + \vec{j}$ và $x \in \mathbb{Z}$. Khi đó cosin góc tạo bởi vector $\vec{e}$ và vector $\vec{a}$ bằng $\frac{1}{\sqrt{65}}$ thì $x^2 - 4 \geq 0$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai. $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 13 - (-5) = 18$

b) Đúng. $2\vec{a} + \vec{b} = (0; 7)$.

c) Đúng.

$$\vec{d} = m\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{d} = (m; 2)$$

$\vec{d}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi và chỉ khi $-2m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

d) Đúng.

$$\vec{e} = x\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{e} = (x; 1)$$

Ta có $\cos(\vec{e}; \vec{a}) = \frac{-2x+3}{\sqrt{13}\sqrt{x^2+1}}$ mà $\cos(\vec{e}; \vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{65}}$ nên ta có phương trình $\frac{-2x+3}{\sqrt{13}\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$.

$$\text{Suy ra } (-2x+3)\sqrt{65} = \sqrt{13}\sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (-2x+3)\sqrt{5} = \sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 5(4x^2 - 12x + 9) = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 19x^2 - 60x + 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{22}{19} \end{cases}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 2$. Do đó $x^2 - 4 \geq 0$.

Câu 63: Cho tam giác MNP có $M(1;1), N(4;0), P(3,7)$

a) $MN = \sqrt{10}$.

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP có tọa độ $\left(-\frac{7}{2}; -\frac{7}{2}\right)$.

c) Hình chiếu vuông góc của điểm M lên cạnh NP là điểm $H\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

d) Gọi PK là phân giác trong của góc MPN , ($K \in MN$). Tọa độ điểm K là $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng: $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(4-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$.

b) Sai: Ta có: $\overrightarrow{MN} = (4-1; 0-1) = (3; -1)$, $\overrightarrow{MP} = (3-1; 7-1) = (2; 6)$,

Suy ra: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MP} \Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại M .

Do đó, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP là trung điểm của cạnh NP , có tọa độ:



$$\begin{cases} x = \frac{4+3}{2} \\ y = \frac{0+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

c) Đúng: Gọi $H(x, y)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M lên cạnh NP .

$$\overrightarrow{MH} = (x-1; y-1), \overrightarrow{NP} = (-1; 7), \overrightarrow{NH} = (x-4; y).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (-1) + (y-1) \cdot 7 = 0 \Leftrightarrow -x + 7y = 6 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{NP} \text{ và } \overrightarrow{NH} \text{ cùng phương, nên: } (-1) \cdot y - 7 \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow 7x + y = 28 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -x + 7y = 6 \\ 7x + y = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 7y = 6 \\ 7x + y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{5} \\ y = \frac{7}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy điểm } H \text{ có tọa độ: } \left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5} \right).$$

$$\text{d) Sai: Ta có: } PM = \sqrt{(1-3)^2 + (1-7)^2} = 2\sqrt{10}; PN = \sqrt{(4-3)^2 + (0-7)^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Theo tính chất đường phân giác: } \frac{KM}{KN} = \frac{PM}{PN} = \frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Suy ra: } KM = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot KN \Rightarrow MN = KM + KN = \frac{5+2\sqrt{5}}{5} KN \quad (*)$$

Gọi tọa độ điểm K là $(x_K; y_K)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{KN} = (4-x_K; 0-y_K) = (4-x_K; -y_K); \overrightarrow{MN} = (4-1; 0-1) = (3; -1) \quad (**)$$

$$\text{Từ (*), (**), suy ra: } \begin{cases} 3 = \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \cdot (4-x_K) \\ -1 = \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \cdot (-y_K) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -11+6\sqrt{5} \\ y_K = 5-2\sqrt{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } K = (-11+6\sqrt{5}; 5-2\sqrt{5}).$$

Câu 64: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (4; 1)$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$

b) $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

c) Vector $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi $m = \frac{3}{2}$

d) Tọa độ vector $\vec{d}$ sao cho $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = -2$ bằng $\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7} \right)$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = -5$

b) Sai: Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (-6; 2) \Rightarrow \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = -2(-6) + 3 \cdot 2 = 18$

c) Đúng: Ta có: $\vec{c} = (m; 1)$. Vì $\vec{c} \perp \vec{a}$ nên $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow -2m + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$.



d) Đúng: Gọi $\vec{d} = (x; y)$. Ta có:
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{d} = 4 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases} \text{ Vậy } \vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right).$$

Câu 65: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (3; -7)$, $\vec{c} = (1; 1)$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -29$

b) $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$

c) $(\vec{a}, \vec{c}) = 30^\circ$

d) Để $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$ tạo với vector $\vec{c}$ một góc 45° thì $x = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7) = -29$

b) Đúng: Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-7)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

c) Sai: $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{58}}{58} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$.

d) Đúng: Ta có: $\vec{d} = (4x+1; x+4)$ tạo với $\vec{c}$ một góc 45° nên:

$$\cos(\vec{d}, \vec{c}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{4x+1+x+4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4x+1)^2 + (x+4)^2}} = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17x^2 + 16x + 17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 5x+5 = \sqrt{17x^2 + 16x + 17}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 17x^2 + 16x + 17 = 25x^2 + 50x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2 + 34x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Câu 66: Cho hai vector $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 25$.

b) $\vec{a}^2 = 5$

c) Góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 30° .

d) $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 25$

b) Sai vì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

nên góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° .

c) Sai vì $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.



d) Đúng vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 25 - 2 \cdot 25 + 50 = 25$
 $\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 5.$

Câu 67: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (4; 1).$

a) $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

b) $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4$

c) Vector $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi $m = \frac{3}{2}$

d) Tọa độ vector $\vec{d}$ sao cho $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = -2$ bằng $\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (-6; 2) \Rightarrow \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = -2(-6) + 3 \cdot 2 = 18;$

$\vec{a} + \vec{b} = (2; 4), 2\vec{a} - \vec{b} = (-8; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2(-8) + 4 \cdot 5 = 4.$

b) Ta có: $\vec{c} = (m; 1).$ Vì $\vec{c} \perp \vec{a}$ nên $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow -2m + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$

c) Gọi $\vec{d} = (x; y).$ Ta có:
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{d} = 4 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases} \text{ Vậy } \vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right).$$

Câu 68: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = (2; 5), \vec{b} = (3; -7), \vec{c} = (1; 1).$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 29$

b) $(\vec{a}, \vec{b}) = 15^\circ$

c) $(\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$

d) Để $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$ tạo với vector $\vec{c}$ một góc 45° thì $x = -\frac{1}{4}.$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-7)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ;$

$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{58}}{58} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ.$

b) Ta có: $\vec{d} = (4x+1; x+4)$ tạo với $\vec{c}$ một góc 45° nên:

$\cos(\vec{d}, \vec{c}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{4x+1+x+4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4x+1)^2 + (x+4)^2}} = \cos 45^\circ$

$\Leftrightarrow \frac{5x+5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17x^2 + 16x + 17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 5x+5 = \sqrt{17x^2 + 16x + 17}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 17x^2 + 16x + 17 = 25x^2 + 50x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2 + 34x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$

