



CHƯƠNG

IV

VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ biết $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ và $|2\vec{a}+\vec{b}|=2$. Tính giá trị cos của góc giữa 2 vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ và $\vec{a}-\vec{b}$.

Lời giải

Trả lời: -0,8

Ta có:

$$\bullet |2\vec{a}+\vec{b}|=2 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2+4\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=4 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=-1.$$

$$\bullet (\vec{a}+2\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2+\vec{a}.\vec{b}-2\vec{b}^2=-4.$$

$$\bullet (\vec{a}+2\vec{b})^2=\vec{a}^2+4\vec{a}.\vec{b}+4\vec{b}^2=5 \Rightarrow |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{5}.$$

$$\bullet (\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=5 \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{a}+2\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = \frac{(\vec{a}+2\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+2\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{-4}{5} = -0,8.$$

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Trả lời: 180

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)(\vec{a}+\vec{b})=0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2-\frac{13}{5}\vec{a}.\vec{b}-3\vec{b}^2=0$$

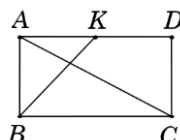
$$\text{mà } |\vec{a}|=|\vec{b}|=1 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=-1$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

Câu 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3$ và $AD=3\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$?

Lời giải

Trả lời: 0





Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3}$.

Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -3^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 = 0.$$

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$, biết $\cos \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} = -\frac{\sqrt{a}}{b}$. Tính $T = a + b$.

Lời giải

Trả lời: 4

Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} = 180^\circ - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Suy ra $\cos \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó, ta có $a = 2, b = 2$ nên $T = 4$.

Câu 5: Cho $AB = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải

Trả lời: 1,5

Lấy I là trung điểm của AB .

Khi đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \end{aligned}$$

Khi đó, $2 = MI^2 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{9}{4}$.

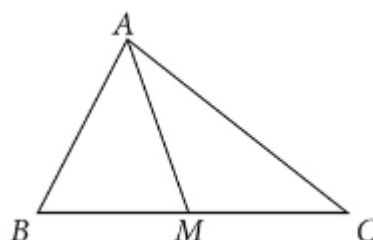
Suy ra M thuộc đường tròn tâm I bán kính $\frac{3}{2}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - k BC^2$. Tìm k ?

Lời giải

Trả lời: 0,25

Ta có:





$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{AC})^2 - (\overline{AB} - \overline{AC})^2}{4} \\ &= \frac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2.\end{aligned}$$

Câu 7: Cho tam giác ABC có $AB = 2$; $AC = 3$; $A = 60^\circ$. M là trung điểm của AB ; K là điểm thuộc cạnh AC sao cho $\overline{AK} = k \cdot \overline{AC}$. Tìm k để $\overline{CM} \perp \overline{BK}$. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,13

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overline{CM} &= \overline{AM} - \overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AC} \\ \overline{BK} &= \overline{AK} - \overline{AB} = k\overline{AC} - \overline{AB} \\ \Rightarrow \overline{CM} \cdot \overline{BK} &= \left(\frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AC}\right) \cdot (k\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}k\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}(\overline{AB})^2 - k(\overline{AC})^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2}k \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - k \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{-15}{2}k + 1\end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \overline{CM} \perp \overline{BK} \Leftrightarrow \overline{CM} \cdot \overline{BK} = 0 \Leftrightarrow \frac{-15}{2}k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{15} \approx 0,13.$$

Câu 8: Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$, $BC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, $AC = a$ ($a > 0$). Tính $\overline{AB} \cdot (\overline{AC} - 2\overline{BC})$ với $a = \sqrt{3}$

Lời giải

Trả lời: 2

Tam giác ABC vuông tại A nên

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{3} - a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\overline{AB} \cdot (\overline{AC} - 2\overline{BC}) = \overline{AB} \cdot (\overline{AC} + \overline{CB} - \overline{BC}) = \overline{AB}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{BC} = AB^2 - AB \cdot BC \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{BC})$$

$$= AB^2 - AB \cdot BC \cdot [-\cos(\overline{BA}, \overline{BC})] = \frac{a^2}{3} + \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \cos ABC$$

$$= \frac{a^2}{3} + \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{a^2}{3} + \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2a^2}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}^2}{3} = 2.$$

Câu 9: Cho tam giác ABC cân tại A ; M là trung điểm của BC , H là hình chiếu của M trên AC ; E là một điểm trên đoạn MH . Tính giá trị $k = \frac{ME}{EH}$ để $AE \perp BH$.

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có biến đổi tích vô hướng như sau:



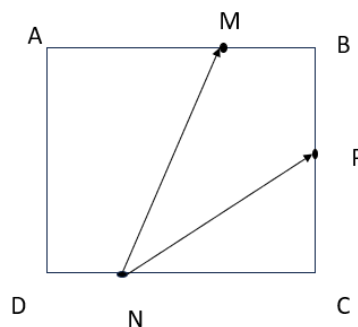
$$\begin{aligned}
 &\text{Gọi } H' \text{ là điểm trên ME sao cho } \overrightarrow{MH'} = 2\overrightarrow{ME} \\
 &2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH'} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AH'}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MH'}) \\
 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{MH'} \\
 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH'} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH'}) \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{MH'} \\
 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{MH'} \\
 &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{MH'} \\
 &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{MH'} \\
 &= \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{MH'} = 0
 \end{aligned}$$

Nên $H' \equiv H$ hay E là trung điểm MH . Vậy $k = \frac{ME}{EH} = 1$

Câu 10: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP})$.

Lời giải

Trả lời: 0,82



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{2}{9} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{13}{2}$$

$$\text{Mặt khác, } |\overrightarrow{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, |\overrightarrow{NP}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}.$$

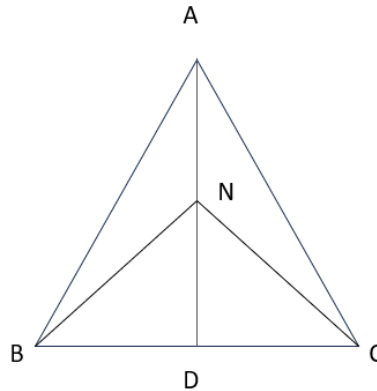


$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}) = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{10} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{13}{5\sqrt{10}} \approx 0,82.$$

Câu 11: Cho $\triangle ABC$ đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 20$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1,48



Gọi N là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ và D là trung điểm BC .

Suy ra N là trung điểm AD nên $NA = ND = \frac{AD}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$;

$$NB = NC = \sqrt{ND^2 + BD^2} = \sqrt{\frac{27}{16} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

Chèn N vào $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 20$, ta được:

$$4MN^2 + 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow 4MN^2 + 2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 20$$

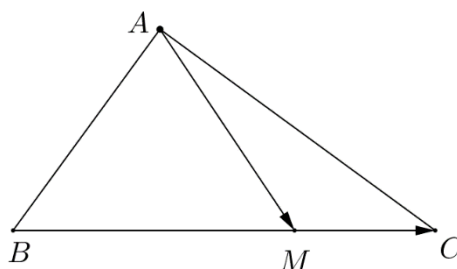
$$\text{Suy ra } MN = \frac{\sqrt{35}}{4} \approx 1,48$$

Vậy tập hợp điểm M thỏa đường tròn tâm N bán kính $R = MN = \frac{\sqrt{35}}{4} \approx 1,48$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$; $AC = 4$. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 7,7



Ta có:



$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \right) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}^2 \\ &= -\frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AC^2 = -\frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{2}{3} \cdot 4^2 = \frac{23}{3} \approx 7,7. \end{aligned}$$

Câu 13: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB = AD = 5, CD = 10$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ bằng

Lời giải

Trả lời: -25

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - 2AB^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= AD^2 - 2AB^2 = 5^2 - 2 \cdot 5^2 = -25. \end{aligned}$$

Câu 14: Cho đoạn $BC = 10$. Biết rằng tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là một đường tròn. Tìm bán kính của đường tròn đó.

Lời giải

Trả lời: 5

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{MB} \text{ hay } CM \perp MB. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp những điểm M thuộc đường tròn đường kính BC , nên bán kính đường tròn là

$$R = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Câu 15: Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC = 7\text{ cm}$ và $BC = 14\text{ cm}$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Trả lời: -0,5

$$\text{Ta có: } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - ACB.$$

$$\text{Mà } \cos(ACB) = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \text{ nên } ACB = 60^\circ.$$

$$\text{Vậy } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ hay } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

Câu 16: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Lời giải

Trả lời: 1,9

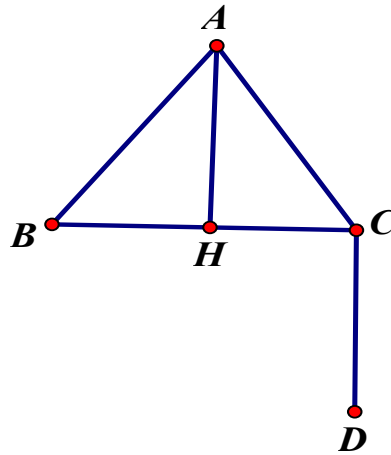
Ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b}} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \approx 1,9 \end{aligned}$$

Câu 17: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 6 và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

Lời giải

Trả lời: -27



Dựng $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AH}$.

Ta có $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = \angle ACD = 150^\circ$.

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = AH \cdot AC \cdot \cos 150^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -27.$$

Câu 18: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC và H là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = kBC^2$. Khi đó $k = ?$

Lời giải

Trả lời: 0,25

Ta có M là trung điểm BC

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC})]$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$$

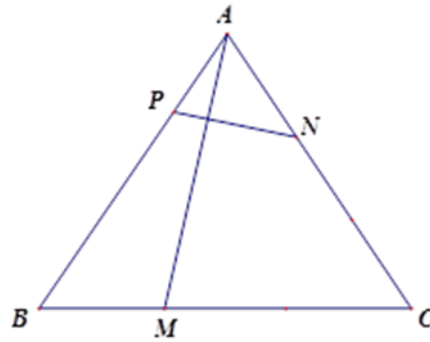
$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2 = \frac{1}{4}BC^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4} = 0,25$$

Câu 19: Cho tam giác đều ABC và các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{15} \overrightarrow{AB}$. Tìm k để AM vuông góc với PN .

Lời giải

Trả lời: 0,33



Ta có: $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

Lại có: $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = -\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Để AM vuông góc với PN thì $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \right] \left(-\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15}AB^2 + \frac{k}{3}AC^2 + \left(\frac{1-k}{3} - \frac{4k}{15} \right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

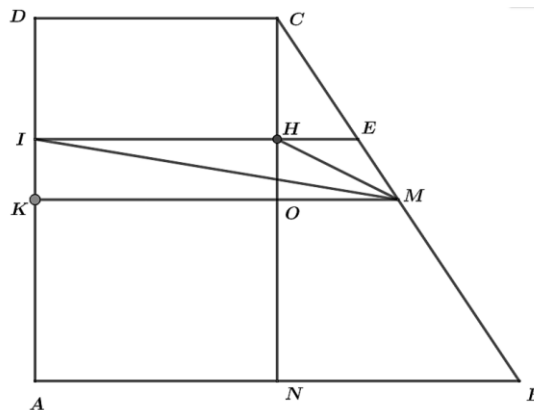
$$\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15} + \frac{k}{3} + \left(\frac{1-k}{3} - \frac{4k}{15} \right) \cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Câu 20: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , $AB = 4$, $CD = 2$, $AD = 3$. Gọi I là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AI = 2$. Tính $T = (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Trả lời: 24



Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC, AD . Kẻ $CN \perp AB$ ta có N là trung điểm của AB .

Từ I kẻ $IE \parallel AB$, $H = CN \cap IE$, $O = MK \cap HN$.

Ta có $MK = \frac{AB + CD}{2} = 3$,

$OH = IK = IA - KA = \frac{1}{2}$, suy ra $IM = \sqrt{IK^2 + KM^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

$OM = \frac{1}{2}NB = 1$; $HM = \sqrt{OH^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



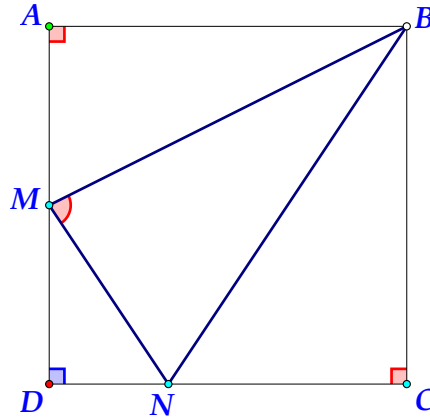
$$\text{Khi đó } T = (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IM} \cdot 2\overrightarrow{IH} = 4 \frac{IM^2 + IH^2 - MH^2}{2} = 24.$$

Vậy $T = 24$.

Câu 21: Cho hình vuông $ABCD$ với M là trung điểm cạnh AD , N là điểm thuộc cạnh CD sao cho $NC = 2ND$. Tính $\angle BMN$ (đơn vị độ).

Lời giải

Trả lời: 82,9



Đặt cạnh hình vuông là $AB = 6a > 0$.

Ta có: $\triangle DMN$ vuông tại $D \Rightarrow MN^2 = DM^2 + DN^2 = (3a)^2 + (2a)^2 = 13a^2$.

Và $\triangle MAB$ vuông tại $A \Rightarrow MB^2 = AM^2 + AB^2 = (3a)^2 + (6a)^2 = 45a^2$.

Và $\triangle NBC$ vuông tại $C \Rightarrow BN^2 = BC^2 + NC^2 = (6a)^2 + (4a)^2 = 52a^2$.

$$\text{Xét } \cos \angle BMN = \frac{MB^2 + MN^2 - BN^2}{2 \cdot MB \cdot MN} = \frac{45a^2 + 13a^2 - 52a^2}{2 \cdot a\sqrt{13} \cdot 3a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{65}}{65}.$$

Suy ra $\angle MBN \approx 82,9^\circ$.

Câu 22: Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M . Cho biết cường độ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 50 N và tam giác MAB đều. Tính cường độ hợp lực tác dụng lên vật đó.

Lời giải

Trả lời: 86,6

Lực tổng hợp tác dụng lên vật là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{MA} + \vec{MB}$

Với $|\vec{MA}| = |\vec{MB}| = 50$, $(\vec{MA}, \vec{MB}) = 60^\circ$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F}^2 &= (\vec{MA} + \vec{MB})^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + 2\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2 + MB^2 + 2MA \cdot MB \cdot \cos(\vec{MA}, \vec{MB}) \\ &= 50^2 + 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot 50^2 \Rightarrow |\vec{F}| = 50\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vậy cường độ hợp lực tác dụng lên vật là $50\sqrt{3} \text{ N} \approx 86,6 \text{ N}$.

Câu 23: Cho nửa đường tròn đường kính AB . Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$ biết $AB = 2$.

Lời giải

Trả lời: 4

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$



Vì AB là đường kính nửa đường tròn nên

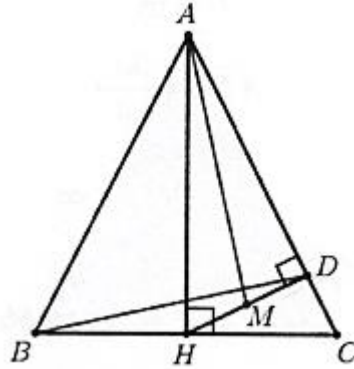
$$ADB = 90^\circ, ACB = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4 \end{aligned}$$

Câu 24: Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của BC , D là hình chiếu của H trên AC , M là trung điểm của HD . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$

Lời giải

Trả lời: 0



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}; \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD}),$$

$$\text{mà } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \text{ (do } AH \perp BC) \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \text{ (do } HD \perp AC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC})$$

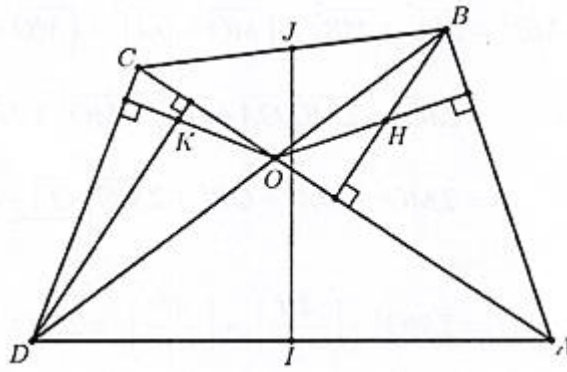
$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{HC}]$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}}_0 + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Câu 25: Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC . Tính $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ}$?

Lời giải

Trả lời: 0



Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$$

Suy ra:
$$\overrightarrow{HK} \cdot 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{DB}$$

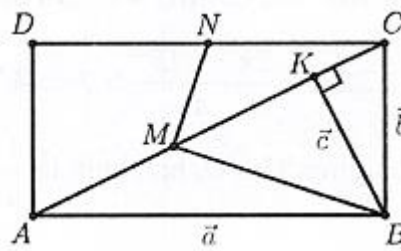
$$= (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK})\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK})\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{0} = 0.$$

Vậy $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$

Câu 26: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC, K \in AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD . Tìm số đo góc BMN (đơn vị độ).

Lời giải

Trả lời: 90



Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BK} = \vec{c}$ và $BA = a, BC = b, BK = c$. Khi đó:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(2\vec{b} - \vec{c}).$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}(2\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{4}(2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2)$$

$$= \frac{1}{4}[2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b} - \vec{a})\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c})\vec{c}].$$

Ta thấy rằng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ do $\vec{a} \perp \vec{b}$; $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{c} = 0$

Do $AC \perp BK$; $(\vec{b} - \vec{c})\vec{c} = \overrightarrow{KC} \cdot \vec{c} = 0$ do $CK \perp BK$.

Vì vậy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow BMN = 90^\circ$.

Câu 27: Cho đoạn $AB = 20$. Tồn tại điểm M sao cho $T = 3MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

Lời giải

Trả lời: 480

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$



Vậy điểm I thuộc đoạn AB và $IA = \frac{2}{5} \cdot AB = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8, IB = 12$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } T &= 3MA^2 + 2MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 3\overrightarrow{MI}^2 + 6\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}^2 \\ &= 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\underbrace{3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}_0) = 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2. \end{aligned}$$

Ta có $(3IA^2 + 2IB^2)$ là hằng số do ba điểm A, B, I cố định.

Do đó: T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ bé nhất $\Leftrightarrow$ Điểm M trùng với điểm I .

Khi đó giá trị T nhỏ nhất là : $T_{\min} = 3IA^2 + 2IB^2 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 12^2 = 480$.

Câu 28: Một người dùng lực $\vec{F}$ có độ lớn là $80N$ kéo một vật di chuyển theo một vector $\vec{d}$ có độ dài $100m$, biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$?

Lời giải

Trả lời: 4000

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 80 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4000(J)$$

Câu 29: Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ $500km/h$ thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ $40km/h$. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm vận tốc mới của máy bay (làm tròn đến hàng đơn vị theo đơn vị km/h)

Lời giải

Trả lời: 529

Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc của máy bay khi không có gió, $|\vec{v}_0| = 500km/h$

Gọi $\vec{v}_1$ là vận tốc của gió, $|\vec{v}_1| = 40km/h$

Gọi $\vec{v}_2$ là vận tốc của máy bay khi có gió, suy ra $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_0$

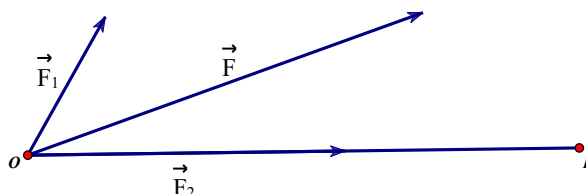
$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{v}_2|^2 &= \vec{v}_2^2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_0)^2 = \vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_0 + \vec{v}_0^2 \\ &= |\vec{v}_1|^2 + 2 \cdot |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_0| \cdot \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_0) + |\vec{v}_0|^2 \end{aligned}$$

Mà $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$ nên $|\vec{v}_2|^2 = 500^2 + 40^2 + 2 \cdot 500 \cdot 40 \cdot \cos 45^\circ \approx 279884,27$

$$\Rightarrow |\vec{v}_2| \approx 529(km/h).$$

Vậy vận tốc mới của máy bay làm tròn đến hàng đơn vị là $529(km/h)$

Câu 30: Hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có độ lớn $|\vec{F}_1| = 10N, |\vec{F}_2| = 20N$ và tạo với nhau một góc $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 60^\circ$ cùng tác dụng lên một vật đặt tại điểm O làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến B (như hình vẽ). Biết $OB = 100m$ và chỉ có hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tác động lên vật.

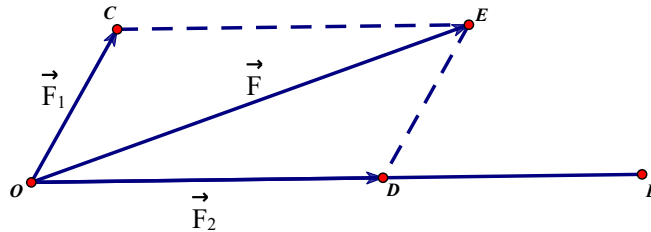




Tính công A của hợp lực $\vec{F}$ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ khi di chuyển vật từ O đến B ?

Lời giải

Trả lời: 2500



Vì $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ nên

$$(\vec{F})^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = (\vec{F}_1)^2 + (\vec{F}_2)^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = (\vec{F}_1)^2 + (\vec{F}_2)^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 700. \text{ Do đó: } |\vec{F}| = 10\sqrt{7} \text{ (N)}.$$

$$\text{Xét tam giác } ODE \text{ ta có: } \cos(\angle DOE) = \frac{OD^2 + OE^2 - DE^2}{2OD \cdot OE} = \frac{5\sqrt{7}}{14}. \text{ Suy ra: } \cos(\vec{F}, \vec{OB}) = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{Vậy công của lực } \vec{F} \text{ là: } A = \vec{F} \cdot \vec{OB} = |\vec{F}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{OB}) = 2500 \text{ (J)}$$

Câu 31: Một khinh khí cầu đang bay từ hướng tây sang hướng đông với tốc độ 12 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng tây bắc sang hướng đông nam với vận tốc 10 km/h. Khinh khí cầu bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm vận tốc mới của khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục theo đơn vị km/h)?

Lời giải

Trả lời: 24,1

Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$ tương ứng là vận tốc của khinh khí cầu, vận tốc của gió và vận tốc của khinh khí cầu sau khi gặp gió thổi.

$$\text{Ta có: } |\vec{v}_1| = 16, |\vec{v}_2| = 10, (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 45^\circ.$$

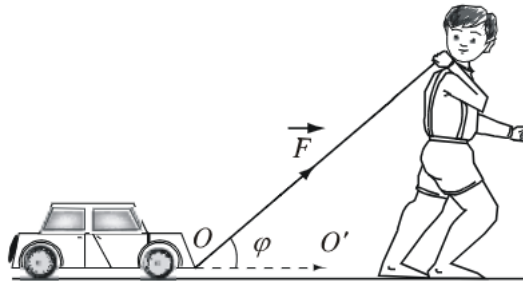
$$\begin{aligned} \text{Vì } \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ nên } (\vec{v})^2 &= (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 = (\vec{v}_1)^2 + (\vec{v}_2)^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 16^2 + 10^2 + 2|\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cdot \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \\ &= 16^2 + 10^2 + 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos(45^\circ) = 356 + 160\sqrt{2}. \text{ Do đó: } |\vec{v}| = \sqrt{356 + 160\sqrt{2}} \approx 24,1. \end{aligned}$$

Câu 32: Người ta dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn 100 N kéo một vật di chuyển trên một đường thẳng nằm ngang, vật đi được quãng đường dài 10 m. Tính độ lớn của công sinh bởi lực $\vec{F}$ đó biết phương của lực hợp với phương chuyển động 60° .

Lời giải

Trả lời: 500

Trong môn Vật lý, ta có khái niệm “công sinh bởi một lực”. Giả sử một lực không đổi $\vec{F}$ tác dụng lên một vật làm cho nó di chuyển từ điểm O đến điểm O' (hình vẽ).



Khi đó, lực $\vec{F}$ sinh ra một công tính theo công thức: $A = F.d$

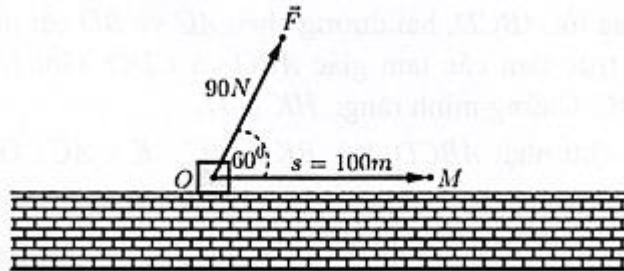
Với F là độ lớn của lực tác dụng (N), d là độ dịch chuyển theo phương của lực (m).

Nếu phương của lực hợp với phương chuyển động một góc φ và làm vật dịch chuyển một quãng đường OO' , thì $d = OO'.\cos \varphi$. Suy ra $A = F.d = F.OO'.\cos \varphi = \vec{F}.\vec{OO'}$.

Độ lớn của công sinh bởi lực $\vec{F}$ là

$$A = \vec{F}.\vec{OO'} = F.OO'.\cos \varphi = 100.10.\cos 60^\circ = 500(N.m)$$

Câu 33: Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$.



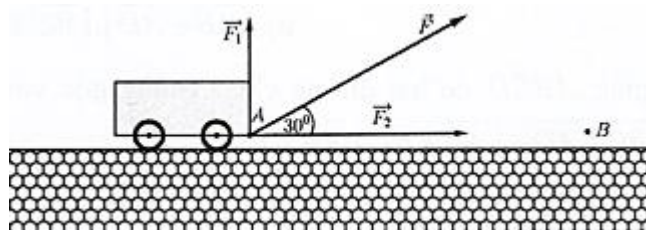
Lời giải

Trả lời: 4500

Đặt $OM = s$ là đoạn đường mà vật di chuyển được với O là điểm đặt vật ban đầu. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

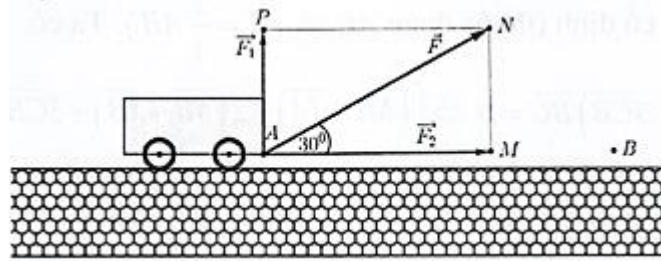
$$A = \vec{F}.\vec{OM} = |\vec{F}| \cdot |\vec{OM}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{OM}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500J.$$

Câu 34: Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài $200m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\vec{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Tính tổng công sinh ra bởi các lực $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$.



Trả lời: 17321

Lời giải



Đặt $\vec{F} = \vec{AN}$, $\vec{F}_1 = \vec{AP}$, $\vec{F}_2 = \vec{AM}$.

Khi đó $AMNP$ là hình bình hành, mà $AM \perp AP$ nên $AMNP$ là hình chữ nhật.

Ta có: $AN = 50$, $AM = AN \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$,

$$AP = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 25.$$

Lực $\vec{F}$ sinh ra công $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000\sqrt{3} J$.

Lực $\vec{F}_1$ có độ lớn $25 N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 90° nên công sinh ra là

$$A_1 = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 90^\circ = 0 J.$$

Lực $\vec{F}_2$ có độ lớn $25\sqrt{3} N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 0° nên công sinh ra là

$$A_2 = |\vec{F}_2| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 0^\circ = 25\sqrt{3} \cdot 200 \cdot 1 = 5000\sqrt{3} J.$$





Câu 35: Cho vectơ $\vec{a}(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì vectơ $\vec{b}(3; y)$ tạo với vectơ $\vec{a}$ một góc 45°

Lời giải

Trả lời: -1

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{y^2 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{4y^2 - 12y + 9}{5y^2 + 45} = \frac{1}{2} \\ 3 - 2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 24y - 27 = 0 \\ y \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \\ y \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = -1.$$

Câu 36: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; 2), B(-4; 3)$. Biết tọa độ điểm $M(x; 0)$ thuộc tia Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M . Tìm x .

Lời giải

Trả lời: 2

$$\text{Ta có } \vec{MA} = (3 - x; 2); \vec{MB} = (-4 - x; 3).$$

$$\text{Tam giác } MAB \text{ vuông tại } M \Leftrightarrow \vec{MA} \perp \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - x)(-4 - x) + 2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \quad (tm) \\ x = -3 \quad (l) \end{cases}.$$

Vậy $M(2; 0)$.

Câu 37: Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC biết $A(-1; 1); B(3; 1); C(2; 4)$. Điểm $H(a; b)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tính $T = 2a + 3b$

Lời giải

Trả lời: 10

$$\text{Gọi } H(x; y) \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \vec{CH} = (x - 2; y - 4); \vec{AB} = (4; 0); \vec{BH} = (x - 3; y - 1); \vec{AC} = (3; 3)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 4(x - 2) + 0 = 0 \\ 3(x - 3) + 3(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

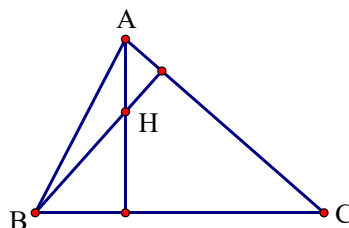
$$\text{Suy } H(2; 2).$$

$$\text{Vậy } T = 2a + 3b = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$$

Câu 38: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(5; 3), B(2; -1), C(-1; 5)$. Điểm $H(a; b)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tính $T = 2a + 3b$

Lời giải

Trả lời: 12





Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác ABC . Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$.

$$\overrightarrow{AH} = (x-5; y-3); \overrightarrow{BC} = (-3; 6); \overrightarrow{BH} = (x-2; y+1); \overrightarrow{AC} = (-6; 2).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(x-5) + 6(y-3) = 0 \\ -6(x-2) + 2(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = -1 \\ 3x-y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Suy $H(3; 2)$.

$$\text{Vậy } T = 2a + 3b = 2.3 + 3.2 = 12$$

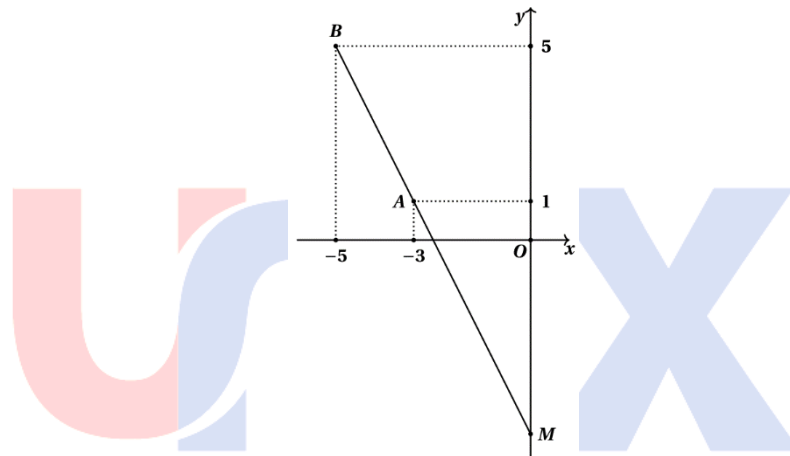
Câu 39: Cho hai điểm $A(-3; 1)$ và $B(-5; 5)$. Gọi điểm $M(a; b)$ trên trục $y'Oy$ sao cho $MB - MA$ lớn nhất. Tính $T = 4a + b$

Lời giải

Trả lời: -5

Nếu M không thẳng hàng với A và B thì theo bất đẳng thức tam giác ta có $|MB - MA| < AB$.

Nếu M thẳng hàng với A và B thì khi đó A nằm giữa B và M . Do đó $MB - MA = AB$.



Vậy giá trị lớn nhất của $MB - MA$ là AB khi M thẳng hàng với A, B .

Đặt $M(0; y)$, khi đó $\overrightarrow{BA} = (2; -4)$ và $\overrightarrow{BM} = (3; y-1)$. Vì M, A, B thẳng hàng nên $\overrightarrow{BA}$ cùng phương với $\overrightarrow{BM}$, suy ra $\frac{3}{2} = \frac{y-1}{-4}$ hay $y = -5$. Suy $M(0; -5)$.

$$\text{Vậy } T = 4a + b = 4.0 + (-5) = -5$$

Câu 40: Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu, một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố A có tọa độ $(600; 200)$ đến thành phố B có tọa độ $(200; 500)$ và thời gian bay quãng đường AB là 3 giờ. Biết rằng $(a; b)$ là tọa độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Tính $T = 3a + b$

Lời giải

Trả lời: 1700

Gọi $M(x; y)$ là vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = (x-600; y-200), \overrightarrow{AB} = (-400; 300).$$

Vì máy bay chuyển động thẳng đều nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$.



Từ đó, ta được
$$\begin{cases} x - 600 = \frac{-400}{3} \\ y - 200 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1400}{3} \\ y = 300 \end{cases}.$$

Suy ra vị trí cần tìm của máy bay là $\left(\frac{1400}{3}; 300\right)$.

Vậy $T = 3a + b = 3 \cdot \frac{1400}{3} + 300 = 1700$

Câu 41: Cho điểm $A(1;0)$ và điểm $B(-1;1)$. Biết rằng quỹ tích điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2MB^2 = 10$ là một đường tròn bán kính R . Tính giá trị R (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 1,49

Điểm $A(1;0)$ và điểm $B(-1;1)$ nên $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Gọi E là điểm thỏa mãn $\vec{EA} + 2\vec{EB} = \vec{0}$, ta có:

$$MA^2 + 2MB^2 = 10 \Leftrightarrow (\vec{ME} + \vec{EA})^2 + 2(\vec{ME} + \vec{EB})^2 = 10 \Leftrightarrow 3ME^2 = 10 - EA^2 - 2EB^2 (*)$$

Mặt khác, do $\vec{EA} + 2\vec{EB} = \vec{0} \Rightarrow EA = \frac{2}{3}AB, EB = \frac{1}{3}AB$, vậy $(*) \Leftrightarrow 3ME^2 = 10 - \frac{2}{3}AB^2$

$$\Leftrightarrow ME^2 = \frac{1}{3} \left(10 - \frac{2}{3}AB^2 \right) = \frac{1}{3} \left(10 - \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \frac{20}{9}.$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn có bán kính $R = ME = \sqrt{\frac{20}{9}} \approx 1,49$

