



CHƯƠNG

IV

VECTƠ

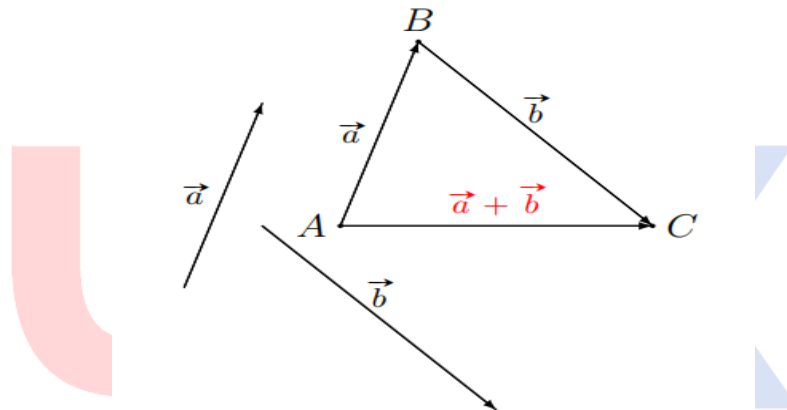
BÀI 8: TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTO



LÝ THUYẾT.

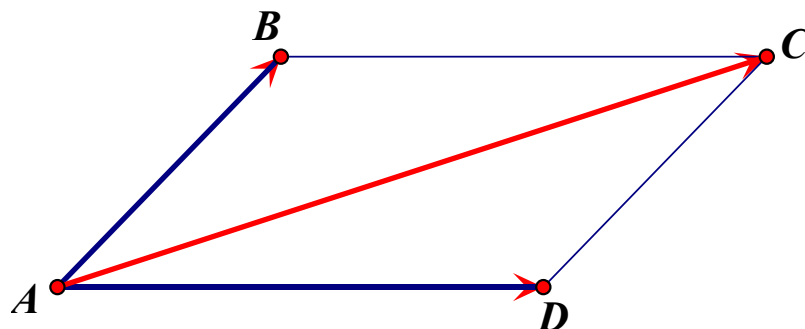
1. TỔNG CỦA HAI VECTO

1.1. Định nghĩa: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng** của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



1.2. Các quy tắc:

- + Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C , ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- + Quy tắc hình bình hành: Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



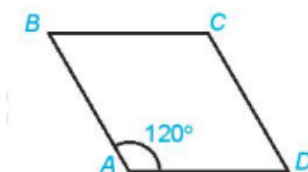
1.3. Tính chất: Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có:

- + Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- + Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- + Tính chất của vector - không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.



Luyện tập 1. Cho hình thoi $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1

và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$.



Lời giải

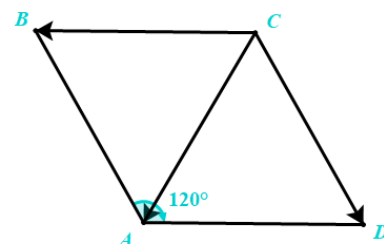
Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.

Do hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên tam giác ABC đều.

Vậy $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = 1$.

Ta có $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.

Do đó $|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}| = CA = 1$.



2. HIỆU CỦA HAI VECTO

1.1. Định nghĩa:

+ Vector đối của vector $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là một vector ngược hướng và có cùng độ dài với vector $\vec{a}$.

+ Vector $\vec{0}$ được coi là đối vector của chính nó.

+ Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vector $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

1.2. Quy tắc về hiệu vector:

Quy tắc hiệu: Với ba điểm O, M, N ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

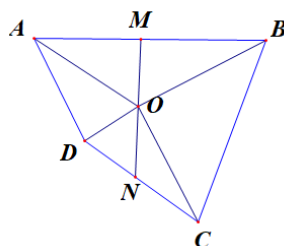
Chú ý:

+ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

+ Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Luyện tập 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Giải



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ND}$



Thầy Lê Việt – Tư duy Kiến tạo – Giúp em giỏi toán, Cùng em chọn nghề

$$= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND})$$

$$= \vec{0}$$

Chú ý: Phép cộng vec tơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc.

Vận dụng.

Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng $22148N$ (ứng với khối lượng xấp xỉ $2260kg$) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (H.4.18). Nếu lực kéo của mỗi người bằng $100N$, thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo?

Chú ý: Ta coi khẩu pháo chịu tác động của ba lực: Trọng lực $\vec{P}$ (có độ lớn $|\vec{P}| = 22148N$, có phương vuông góc với phương nằm ngang và hướng xuống dưới), phản lực $\vec{w}$ (có độ lớn $|\vec{w}| = |\vec{P}| \cos 30^\circ$, có phương vuông góc với mặt dốc và hướng lên trên) và lực kéo $\vec{F}$ (theo phương dốc, hướng từ chân dốc lên đỉnh dốc).

Lời giải

Ta có: Trọng lực $\vec{P}$ có độ lớn $|\vec{P}| = 22148N$, có phương vuông góc với phương nằm ngang và hướng xuống dưới

Phản lực $\vec{w}$ có độ lớn $|\vec{w}| = |\vec{P}| \cos 30^\circ = 22184 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} N$,

có phương vuông góc với mặt dốc và hướng lên trên)

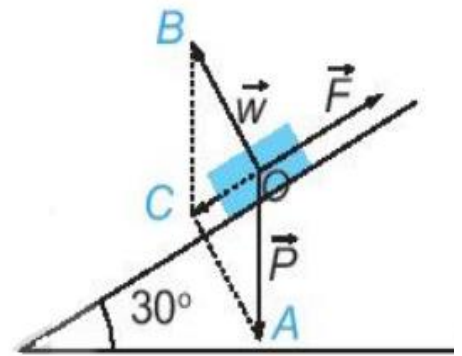
Gọi $\vec{F}_1 = \vec{P} + \vec{w}$ ta có

$$|\vec{F}_1| = OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{|\vec{P}|^2 - |\vec{w}|^2} = 1174N$$

Để kéo được khẩu pháo lên dốc thì $|\vec{F}| > |\vec{F}_1|$,

nghĩa là số người kéo pháo phải lớn hơn $\frac{|\vec{F}_1|}{100} = \frac{1174}{100} = 11,74$

Vậy cần tối thiểu 12 người để kéo pháo.



Hình 4.18



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.6. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, D . Hãy chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$

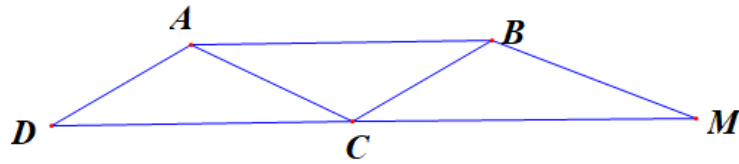
Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

b) Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} \end{cases}$ nên $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

4.7. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$.

Lời giải



Ta có theo quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ nên M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BACM$ (như hình vẽ).

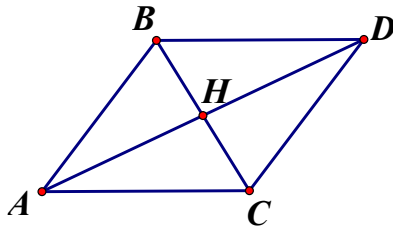
4.8. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

a) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ nên $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a$

b) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

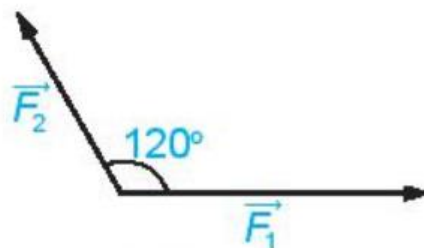


Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$. Suy ra $AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dựng D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình thoi.

Ta lại có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

4.9. Hình 4.19 biểu diễn hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3N, |\vec{F}_2| = 2N$. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

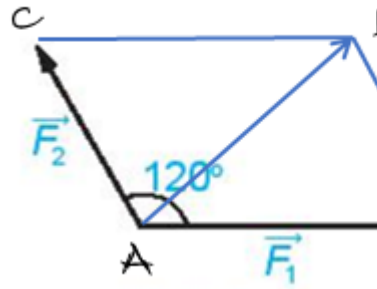


Hình 4.19

Lời giải



Thầy Lê Việt – Tư duy Kiến tạo – Giúp em giỏi toán, Cùng em chọn nghề



Gọi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{F_2}$

Ta có $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{F}$

Xét tam giác ABD

$$AD = \sqrt{BA^2 + BD^2 - 2BA \cdot BD \cdot \cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7}.$$

Vậy $|\overrightarrow{F}| = \sqrt{7}N$.

- 4.10.** Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình vẽ). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?



Lời giải

Gọi tàu thứ nhất là tàu hướng xuống hạ lưu có vận tốc thực tế là $\vec{v}_1 = \vec{v}_r + \vec{v}_n$

Tàu thứ hai là tàu hướng lên thượng nguồn có vận tốc thực tế là $\vec{v}_2 = \vec{v}_r - \vec{v}_n$

Ta thấy $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$ nên tàu thứ nhất sẽ sang bờ bên kia trước.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỔNG CÁC VECTOR

Câu 1: Cho hình bình hành ABCD, xác định các vector $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} \text{ và } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}.$$

Câu 2: Cho tam giác ABC, xác định các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Gọi D là điểm sao cho ABCD là hình bình hành. Khi đó

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 3: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O , xác định các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 4: Cho n điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, xác định vector

$$\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}.$$

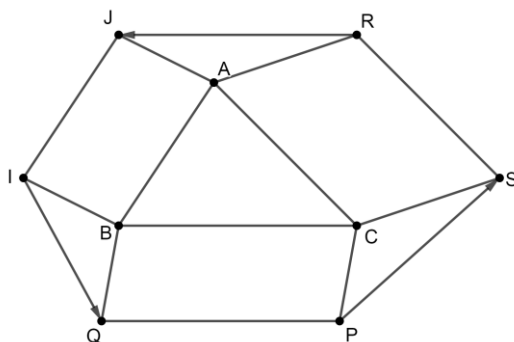
Lời giải

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2} \\ &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

Câu 5: Cho tam giác ABC . Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}, \quad \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}, \quad \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}) \\ &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) \\ &= (\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PC}) \\ &= \overrightarrow{SS} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{CC} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}.$$

DẠNG 2: VECTO ĐỐI, HIỆU CỦA HAI VECTO

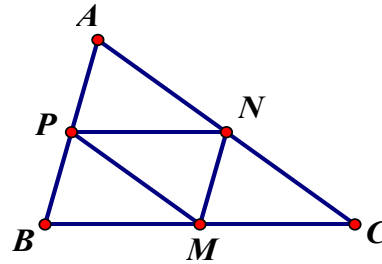
Câu 6: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \text{ với } O \text{ là điểm bất kì.}$$



Lời giải



a) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$$

Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC .

Vậy $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

b) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0} \text{ suy ra } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.$$

Câu 7: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh **A**. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

Lời giải

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

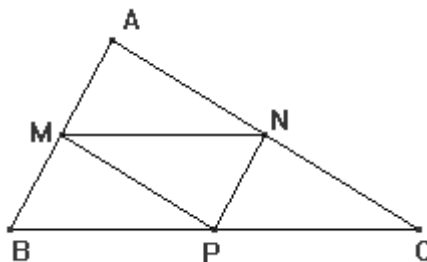
$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Câu 8: Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC .

a) Tìm $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}; \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}; \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}; \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vector $\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}$.

Lời giải



$$a) \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$$

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN} \text{ (Vì } \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP} \text{)}$$

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$$

$$\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$$

$$b) \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}.$$

Câu 9: Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Lời giải

$$\text{Ta có } -\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}; -\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EC} \text{ nên}$$

$$\text{VT} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} = \text{VP} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Câu 10: Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, \dots, B_n$ ($A_i \neq B_n$). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2} + \dots + \overrightarrow{A_n B_n} = \vec{0}$.

Lời giải

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

$$\overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2} + \dots + \overrightarrow{A_n B_n} = (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$$

Vì $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ nên

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2} + \dots + \overrightarrow{A_n B_n} = \vec{0}.$$

DẠNG 3: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTO

Câu 11: Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

$$a) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} \quad b) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$$

Lời giải

a) Biến đổi về trái ta có



Thầy Lê Việt – Tư duy Kiến tạo – Giúp em giỏi toán, Cùng em chọn nghề

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP.$$

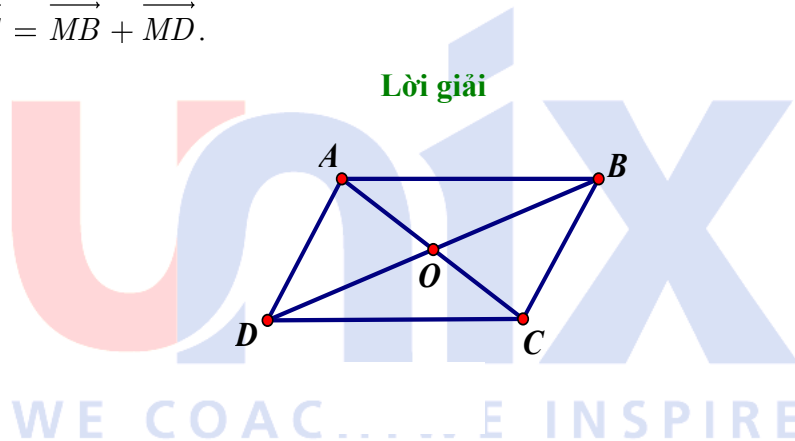
b) Đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \text{ (đúng).} \end{aligned}$$

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ suy ra

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) Cách 1: Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \end{aligned}$$

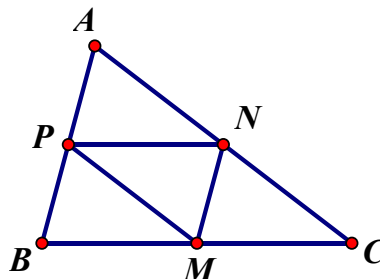
Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ (đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành).}$$

Câu 13: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$

Lời giải



Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên

$PN \parallel BM, MN \parallel BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$$

N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$

Câu 14: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$$

Lời giải

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$

Mặt khác $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$ suy ra $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.



DẠNG 4: CÁC BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA ĐẲNG THỨC VEC TƠ

Câu 16: Cho ΔABC , tìm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}.$$

Suy ra M là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là C sao cho $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$.

Câu 17: Cho ΔABC , tìm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \vec{O}$$

Suy ra M trùng C .

Câu 18: ΔABC , tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$$

Suy ra M là trung điểm AC .

Câu 19: ΔABC , tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}.$$

Suy ra M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành.

Câu 20: Cho tứ giác $ABCD$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BD}.$$

Vậy M là điểm đối xứng với B qua D .

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÍNH ĐỘ DÀI CỦA VEC TƠ

Câu 21: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$.

Lời giải

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$

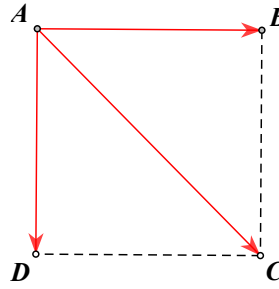
Câu 22: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Gọi M là điểm sao cho $ABMC$ là hình bình hành. Ta có $AB = AC$ nên $ABMC$ là hình thoi. Gọi O là tâm hình thoi $ABMC$. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AM}| = AM = 2AO = a\sqrt{3}.$

Câu 23: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AD}|$.

Lời giải



Ta có $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = AC = 2a\sqrt{2}$.

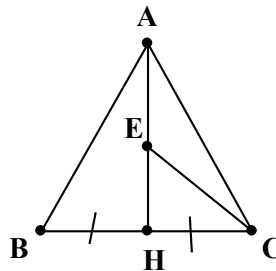
Câu 24: Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\vec{CA} - \vec{HC}|$.

Lời giải

Gọi M là điểm sao cho $CHMA$ là hình bình hành.

Ta có: $|\vec{CA} - \vec{HC}| = |\vec{CA} + \vec{CH}| = |\vec{CM}| = CM = 2CE$ (E là tâm của hình bình hành $CHMA$).

Ta lại có: $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle ABC$ đều, AH là đường cao).

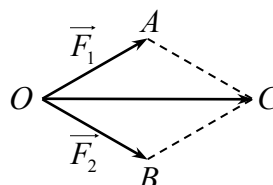


Trong tam giác HEC vuông tại H , có:

$$EC = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{2.5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \Rightarrow |\vec{CA} - \vec{HC}| = 2CE = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 25: Có hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

Lời giải





Giả sử $\vec{F}_1 = \vec{OA}$, $\vec{F}_2 = \vec{OB}$.

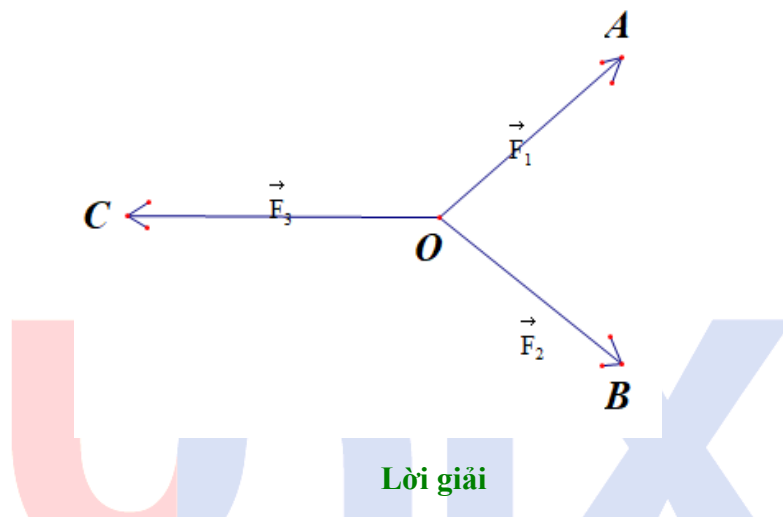
Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OC}$, như hình vẽ.

Ta có $\angle AOB = 60^\circ$, $OA = OB = 50$, nên tam giác OAB đều, suy ra $OC = 50\sqrt{3}$.

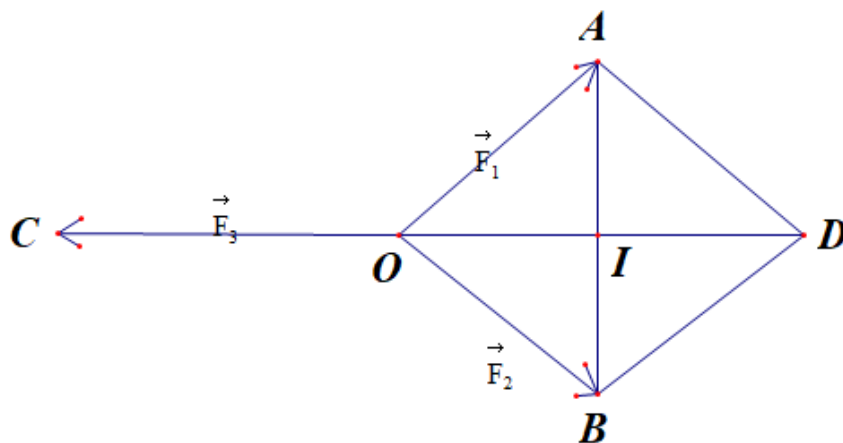
Vậy $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OC}| = 50\sqrt{3} \text{ (N)}$.

ỨNG DỤNG THỰC TẾ VÀO TỔNG HIỆU 2 VECTO

Câu 26: Cho ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào vật đứng tại điểm O , biết sau khi tác động lực thì vật đứng yên. Hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều có cường độ 100N và hợp với nhau một góc 60° . Hỏi cường độ lực $\vec{F}_3$ là bao nhiêu?



Lời giải



Dựng hình bình hành $OADB$ như hình vẽ.

Tổng hợp lực tác động vào vật tại O là: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

Vì vật đứng yên nên $\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OC} = -(\vec{OA} + \vec{OB})$.

$$|\vec{F}_3| = |-(\vec{OA} + \vec{OB})| = |\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OD}| = OD = 2OI = 2 \cdot \frac{100\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}.$$

Câu 27: Cho 2 lực F_1, F_2 có cùng điểm đặt tại O và có cường độ lần lượt bằng $6N, 8N$. Tìm cường độ lực tổng hợp của F_1, F_2 biết góc giữa chúng bằng 90° .

Lời giải

Dựng $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{F_2}$.

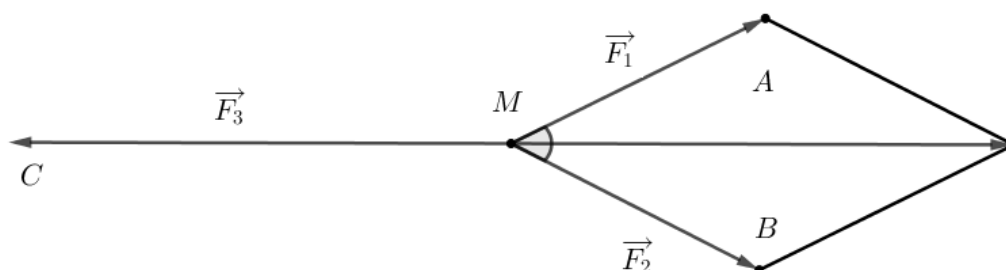
Ta có: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OI}$ với I là trung điểm của BD .

Do đó: $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI = DB = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Câu 28: Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của F_1, F_2 đều bằng $100N$ và $AMB = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của F_3 là

Lời giải

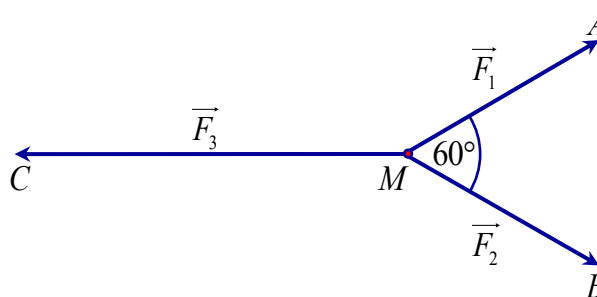
Ta có:



Vật đứng yên nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, do đó

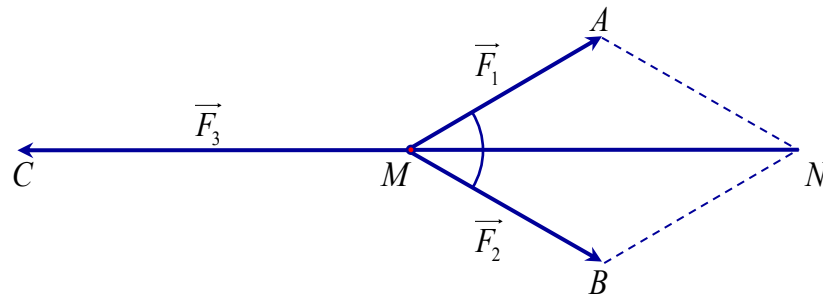
$$|\overrightarrow{F_3}| = |-\overrightarrow{F_3}| = |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = MC = 100\sqrt{3}N.$$

Câu 29: Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của F_1, F_2 đều bằng $25N$ và góc $AMB = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là



Lời giải

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được $\overrightarrow{F_3} = -(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2})$.

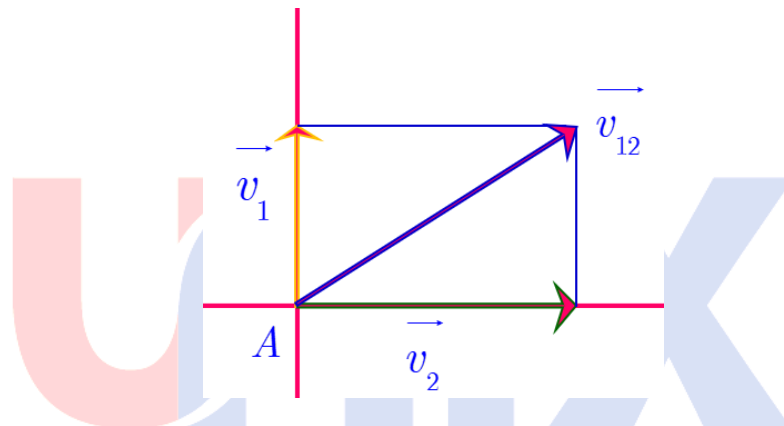


Dựng hình bình hành $AMBN$. Ta có $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\vec{MA} - \vec{MB} = -\vec{MN}$.

$$\text{Suy ra } |\vec{F}_3| = |-\vec{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}.$$

Câu 30: Hai ô tô cùng xuất phát từ A theo hai hướng vuông góc với nhau, vận tốc tương ứng của hai xe là $x \text{ km/h}$ và $(100 - x\sqrt{3}) \text{ km/h}$. Hỏi x bằng bao nhiêu để vận tốc tương đối giữa xe ô tô thứ nhất và người ngồi trên xe ô tô thứ hai là nhỏ nhất:

Lời giải



Vận tốc tương đối của xe ô tô thứ nhất đối với ô tô thứ hai là: $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Theo quy tắc hình bình hành thì $|\vec{v}_{12}|$ là đường chéo của hình chữ nhật có hai cạnh là $|\vec{v}_1|$ và $|\vec{v}_2|$.

Ta có:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{12}|^2 &= |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 = x^2 + (100 - x\sqrt{3})^2 \\ &= 4x^2 - 200\sqrt{3}x + 10000 = (2x - 50\sqrt{3})^2 + 2500 \geq 2500 \\ \Rightarrow |\vec{v}_{12}| &\geq 50 \text{ km/h} \end{aligned}$$

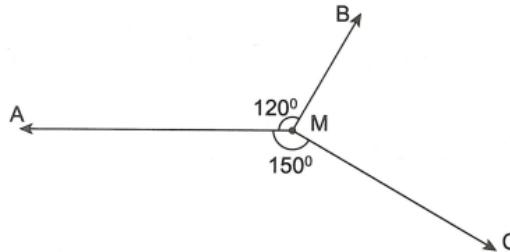
Vậy vận tốc tương đối của xe ô tô thứ nhất đối với người ngồi trên xe ô tô thứ hai nhỏ nhất 50 km/h .

Câu 31: Hai bạn An và Bình cùng di chuyển một xe đẩy trên đường phẳng bằng cách: bạn An đẩy xe từ phía sau theo hướng di chuyển của xe bằng một lực $F_1 = 2 \text{ N}$, bạn Bình kéo xe từ phía trước theo hướng di chuyển của xe một lực $F_2 = 3 \text{ N}$. Giả sử hai bạn thực hiện đúng kỹ thuật để xe di chuyển hiệu quả nhất. Hỏi xe di chuyển với lực tác động có độ lớn bằng bao nhiêu?

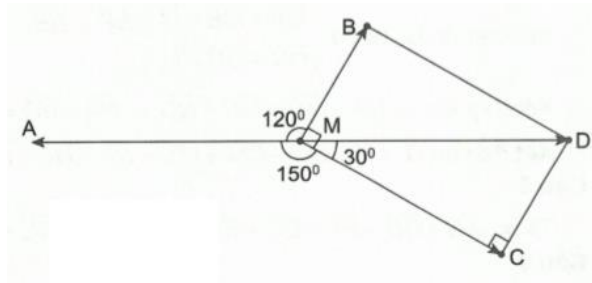
Lời giải

Khi hai bạn An và Bình thực hiện đúng kỹ thuật để xe di chuyển hiệu quả nhất thì hai lực tác động vào xe là $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ phải cùng hướng. Khi đó, lực tổng hợp tác động vào xe là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ có độ lớn là $|\vec{F}| = F = F_1 + F_2 = 5 \text{ N}$.

Câu 32: Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên như hình vẽ. Biết cường độ của lực $\vec{F}_1$ là 50 N , $\angle AMB = 120^\circ$, $\angle AMC = 150^\circ$. Cường độ của lực $\vec{F}_3$ là



Lời giải



Ta có $\angle AMB = 120^\circ$, $\angle AMC = 150^\circ \Rightarrow \angle BMC = 360^\circ - 120^\circ - 150^\circ = 90^\circ$

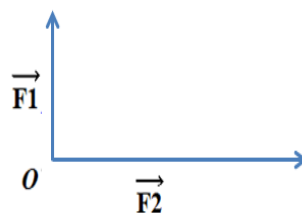
Vẽ hình chữ nhật $MCDB$, có $\angle CMD = 180^\circ - \angle AMC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

Vì vật đứng yên nên tổng hợp lực tác động vào vật bằng 0 $\Rightarrow MD = MA = 50$.

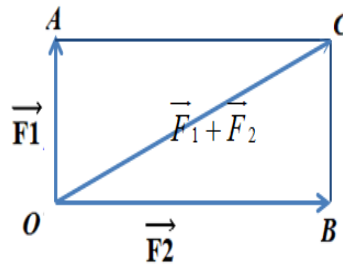
$$\cos \angle CMD = \frac{MC}{MD} \Rightarrow MC = MD \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}.$$

Vậy $|\vec{F}_3| = F_3 = MC = 25\sqrt{3} \text{ N}$.

Câu 33: Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có cường độ lực $F_1 = 60 \text{ N}$, $F_2 = 80 \text{ N}$, điểm đặt tại O có phương vuông góc với nhau. Cường độ lực tổng hợp của hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là



Lời giải



Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{F}_1$; $\overrightarrow{OB} = \vec{F}_2$, dựng hình bình hành $AOBC$ suy ra $AOBC$ là hình chữ nhật.

Khi đó $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

Cường độ lực tổng hợp của hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\overrightarrow{OC}| = OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100N.$$

