



CHƯƠNG

IV

# VECTƠ

## BÀI 3: TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ



### LÝ THUYẾT.

#### 1. ĐỊNH NGHĨA:

Tích của một vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số thực  $k > 0$  là một vector, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $k|\vec{a}|$ .

Tích của một vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số thực  $k < 0$  là một vector, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $(-k)|\vec{a}|$ .

**TÓM LẠI:** Cho số  $k \neq 0$  và một vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của vector  $\vec{a}$  với số  $k$  là một vector, kí hiệu  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$ .

**Chú ý:** Ta quy ước  $k\vec{a} = \vec{0}$  nếu  $\vec{a} = \vec{0}$  hoặc  $k = 0$ .

#### Luyện tập 1.

Cho đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$  (H.4.25). Những khẳng định nào sau đây là đúng?



Hình 4.25

- Điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  khi và chỉ khi tồn tại số  $t$  để  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ .
- Với điểm  $M$  bất kì, ta luôn có  $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{AB}$ .
- Điểm  $M$  thuộc tia đối của tia  $AB$  khi và chỉ khi tồn tại số  $t \leq 0$  để  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ .

#### Giải

Những khẳng định đúng là a); c).



## 2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

Với hai vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và hai số thực  $k, t$ , ta luôn có:

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$ ;
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;  $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$ ;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$ ;
- $1\vec{a} = \vec{a}$ ;  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

### ▶▶ Luyện tập 2.

Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng với điểm  $O$  tùy ý, ta có  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ .

#### Giải

$G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  (Ví dụ 3b, Bài 8).

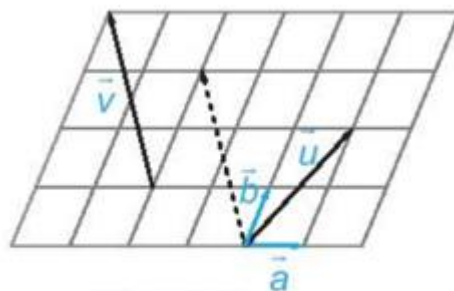
Ta có:  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OG} + \vec{GA} + \vec{OG} + \vec{GB} + \vec{OG} + \vec{GC} = 3\vec{OG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = 3\vec{OG}$

#### Nhận xét:

- Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .
- Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

### ▶▶ Luyện tập 3.

Trong hình 4.27, hãy biểu thị mỗi vector  $\vec{u}, \vec{v}$  theo hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$ , tức là tìm các số  $x, y, z, t$  để  $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ,  $\vec{v} = t\vec{a} + z\vec{b}$ .



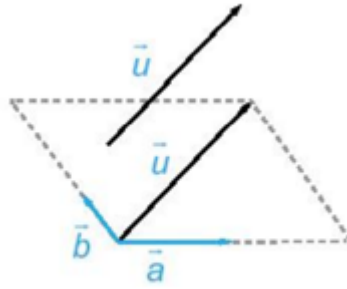
Hình 4.27

#### Giải

Ta có: 
$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} \end{cases}$$



**Chú ý:** Cho hai vector không cùng phương  $\vec{a}, \vec{b}$  (H.4.28).



Hình 4.28

Khi đó, mọi vector  $\vec{u}$  đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $(x; y)$  sao cho  $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

### CHÚ Ý

- 1) Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì với mọi điểm  $M$  ta có  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ .
- 2) Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì với mọi điểm  $M$  ta có  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ .
- 3) Điều kiện cần và đủ để hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương là có một số thực  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

Nhận xét: Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k$  khác 0 để



### VÍ DỤ MINH HỌA.

**Câu 1:** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{5}AB$ . Tìm  $k$  trong các đẳng thức sau:

- a)  $\vec{AM} = k\vec{AB}$  b)  $\vec{MA} = k\vec{MB}$  c)  $\vec{MA} = k\vec{AB}$

**Lời giải**



a)  $\vec{AM} = k\vec{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\vec{AM}|}{|\vec{AB}|} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$ , mà  $\vec{AM}$  cùng hướng  $\vec{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$ .

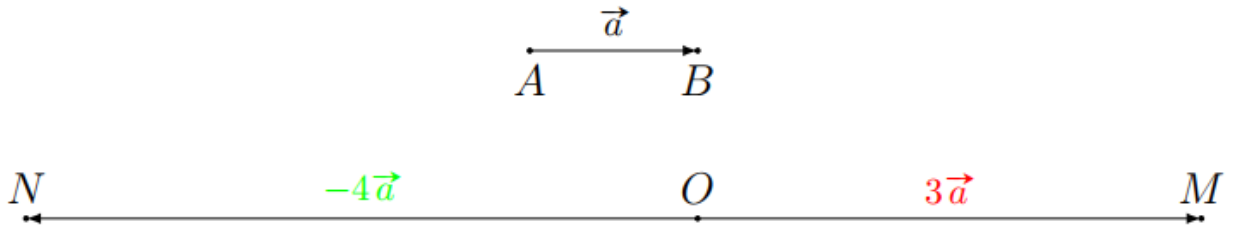
b)  $\vec{MA} = k\vec{MB} \Rightarrow |k| = \frac{|\vec{MA}|}{|\vec{MB}|} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}$ , mà  $\vec{MA}$  ngược hướng  $\vec{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$ .

c)  $\vec{MA} = k\vec{AB} \Rightarrow |k| = \frac{|\vec{MA}|}{|\vec{AB}|} = \frac{MA}{AB} = \frac{1}{5}$ , mà  $\vec{MA}$  ngược hướng  $\vec{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$ .



**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  và điểm  $O$ . Xác định hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho:  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ ;  $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$ .

*Lời giải*



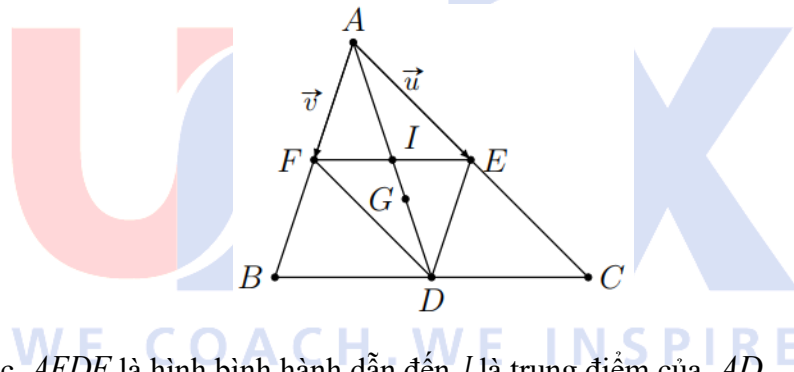
Vẽ  $d$  đi qua  $O$  và song song với giá của  $\vec{a}$  (nếu  $O$  thuộc giá của  $\vec{a}$  thì  $d$  là giá của  $\vec{a}$ ).

– Trên  $d$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM = 3|\vec{a}|$ ,  $\overrightarrow{OM}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng. Khi đó  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ .

– Trên  $d$  lấy điểm  $N$  sao cho  $ON = 4|\vec{a}|$ ,  $\overrightarrow{ON}$  và  $\vec{a}$  ngược hướng nên  $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$ .

**Câu 3:** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$ . Hãy phân tích các vector  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{DE}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  theo hai vector  $\vec{u}, \vec{v}$ .

*Lời giải*



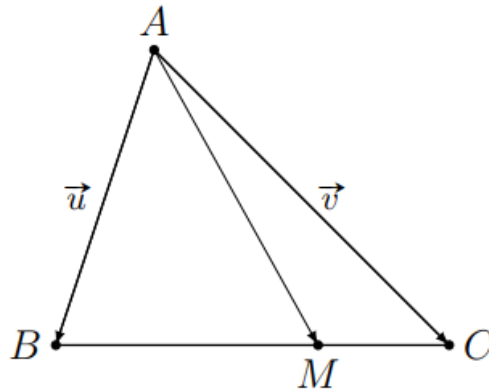
Dễ thấy tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành dẫn đến  $I$  là trung điểm của  $AD$ .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}; \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}; \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}.$$

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Hãy phân tích vector  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

*Lời giải*



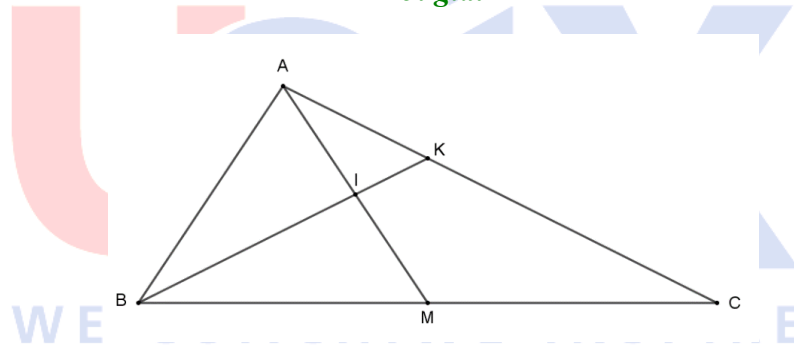
Từ giả thiết  $MB = 2MC$  ta dễ dàng chứng minh được  $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ .

Do đó  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  mà  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{v}.$$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là điểm thuộc  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

*Lời giải*



Ta có  $I$  là trung điểm của  $AM \Rightarrow 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}$ .

Mặt khác  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .

Do đó  $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$  (1).

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ .

Suy ra 3 điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi hệ thức:  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN \parallel AC$ .



**Lời giải**

Ta có

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} \quad (1).$$

Mặt khác,  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}.$

Do ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng nên bốn điểm  $A, B, C, M$  là bốn đỉnh của hình bình hành  $BCMA \Rightarrow$  ba điểm  $A, M, C$  không thẳng hàng (2).

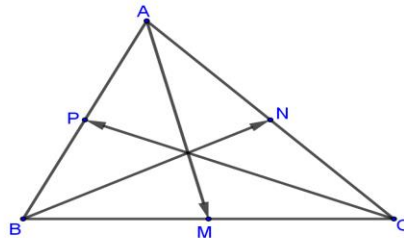
Từ (1) và (2) suy ra  $MN \parallel AC.$

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}.$

**Lời giải**

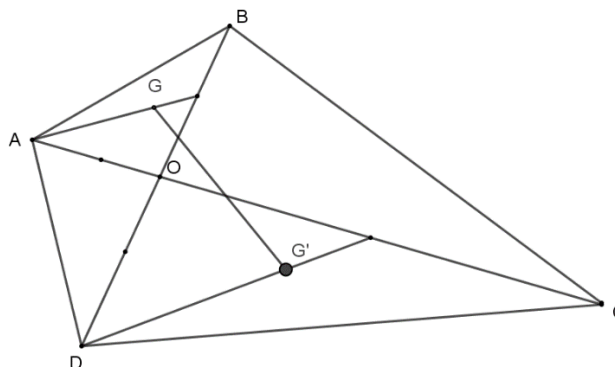
Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}. \end{aligned}$$



**Câu 8:** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G, G'$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $OAB$  và  $OCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}.$

**Lời giải**



Vì  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $OCD$  nên ta có:



$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \quad (1).$$

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $OAB$  nên ta có:

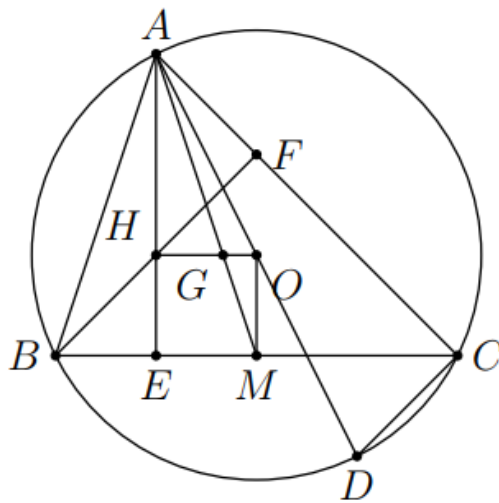
$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  với  $H$ ,  $O$ ,  $G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ .

*Lời giải*



Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ , ta có

$BH \parallel DC$  (cùng vuông góc với  $AC$ ) (1).

$CH \parallel BD$  (cùng vuông góc với  $AB$ ) (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $BHCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow$  ba điểm  $H$ ,  $M$ ,  $D$  thẳng hàng.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

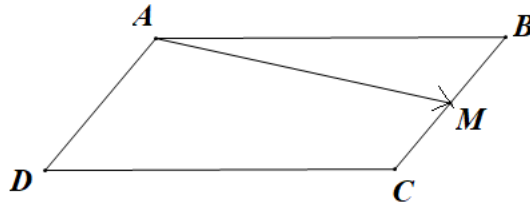


## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

**4.11.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Hãy biểu thị  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .



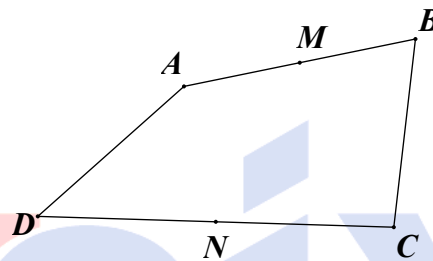
**Lời giải**



$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

**4.12.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $AB, CD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải**



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} \\ &= 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) = 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

**4.13.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .

a) Hãy xác định điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ .

**Lời giải**

$$a) \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$b) \text{Ta có: } \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}) = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}(-2\overrightarrow{KB}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK}$$

**4.14.** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Hãy xác định điểm  $M$  để  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$ .



### Lời giải

a)

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

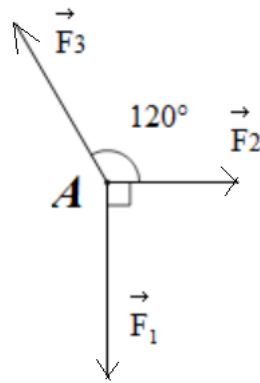
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

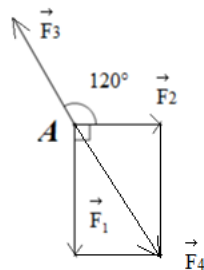
b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{OM}$

**4.15.** Chất điểm  $A$  chịu tác động của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ ). Tính độ lớn của các lực  $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ , biết  $\vec{F}_1$  có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

### Lời giải



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_4$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_4 = -\vec{F}_3 \Rightarrow |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$$

Ta có:  $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1| \cdot \tan 30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ ;  $|\vec{F}_4| = \frac{|\vec{F}_1|}{\cos 30^\circ} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ ;

Vậy  $|\vec{F}_2| = \frac{20\sqrt{3}}{3}$  N,  $|\vec{F}_3| = \frac{40\sqrt{3}}{3}$  N.

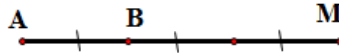


## HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

### DẠNG 1: XÁC ĐỊNH VECTƠ $k\vec{a}$

**Câu 10:** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Xác định điểm  $M$  biết  $2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0}$

**Lời giải**



Ta có:

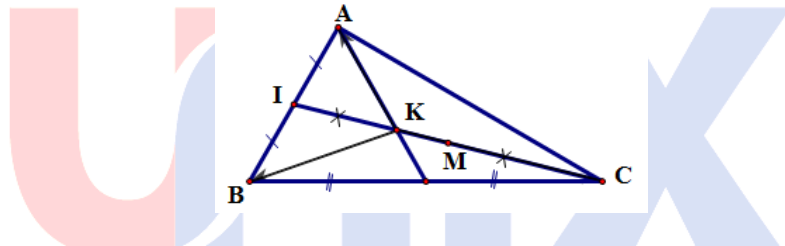
$$2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MA} - 3(\vec{MA} + \vec{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\vec{MA} - 3\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AM} = 3\vec{AB} \\ \Rightarrow \vec{AM}, \vec{AB} \text{ cùng hướng và } AM = 3AB.$$

**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Tìm điểm  $K$  sao cho  $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{CB}$

b) Tìm điểm  $M$  sao cho  $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$

**Lời giải**



a) Ta có:  $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{KB} - \vec{KC} \Leftrightarrow \vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$

$\Rightarrow K$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MI} + \vec{MC} = \vec{0}$$

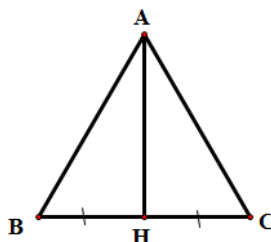
$\Rightarrow M$  là trung điểm của  $IC$ .

**Câu 12:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính

a)  $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}|$

b)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

**Lời giải**





a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}| = |(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2AC = 2a$ .

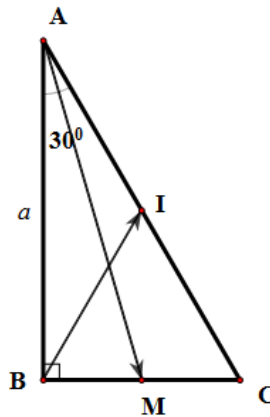
b) Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Ta có:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{AH}| = 2AH = 2\sqrt{AB^2 - BH^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$$

**Câu 13:** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$  có  $A = 30^\circ$ ,  $AB = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Hãy tính:

a)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$  b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

**Lời giải**



Ta có:  $BC = AB \tan A = a \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $AC = \frac{AB}{\cos A} = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

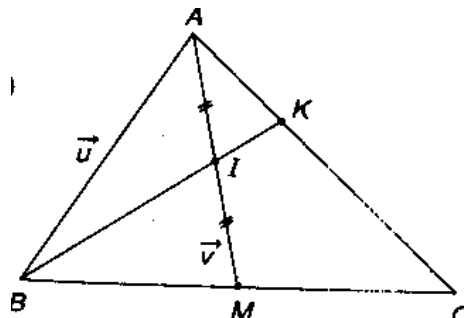
a)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2BI = 2 \cdot \frac{AC}{2} = AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}$ .

## DẠNG 2: HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là trung điểm  $AC$  sao  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

**Lời giải**



Ta có  $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$  (1)



$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ \Rightarrow 3\overrightarrow{BK} &= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Rightarrow B, I, K$  thẳng hàng.

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi hệ thức:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}. \text{ Chứng minh } MN // AC.$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ hay } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Vậy  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}$  cùng phương.

Theo giả thiết  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$ . Mà  $A, B, C$  không thẳng hàng nên bốn điểm  $A, B, C, M$  là bốn đỉnh của hình bình hành  $\Rightarrow M$  không thuộc  $AC$ .

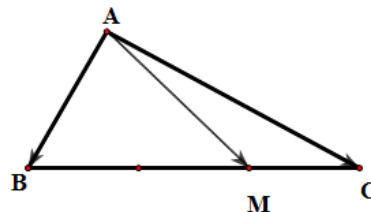
Vậy  $MN // AC$ .

### **DẠNG 3: BIỂU THỊ MỘT VECTƠ THEO HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG**

**Câu 16:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là một điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

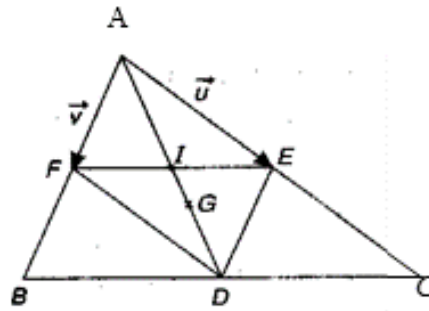
**Lời giải**



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \text{ (đpcm).}$$

**Câu 17:** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$  theo hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

**Lời giải**



Ta có:  $AEDF$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v})$$

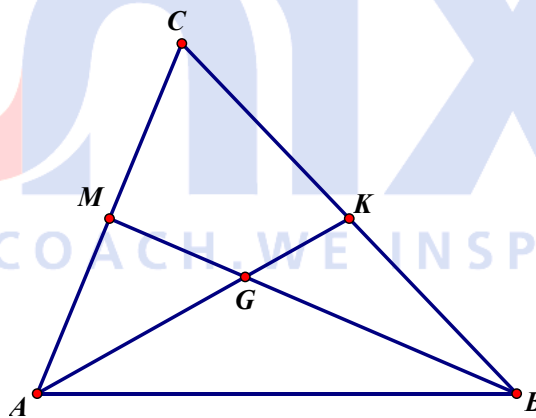
$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{2}{3} (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}$$

**Câu 18:** Cho  $AK$  và  $BM$  là hai trung tuyến của tam giác  $ABC$ , trọng tâm  $G$ . Hãy phân tích các vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  theo hai vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$

**Lời giải**



$$* \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AK} - \frac{2}{3} \overrightarrow{BM}$$

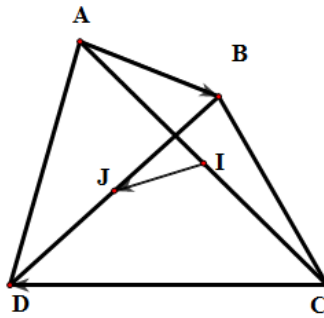
$$* \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK} = 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK}) = 2 \cdot \frac{2}{3} \overrightarrow{BM} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AK} + \frac{4}{3} \overrightarrow{BM}$$

$$* \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) = -(\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC})$$

#### **DẠNG 4: ĐẲNG THỨC VECTƠ CHỨA TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ**

**Câu 19:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh rằng:  
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$ .

**Lời giải**



Ta có: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DJ})$$

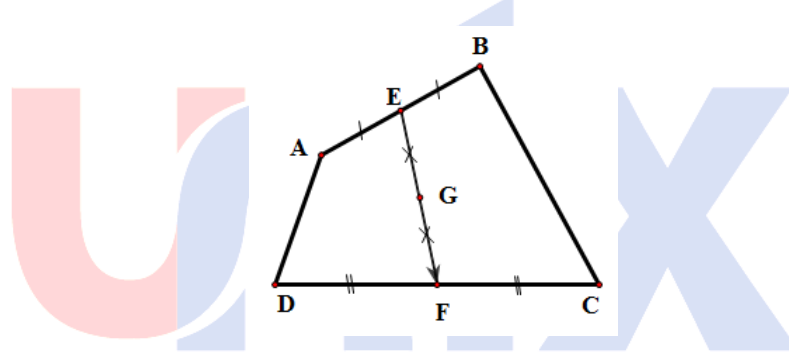
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

**Câu 20:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

a) Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$

b) Gọi  $G$  là trung điểm của  $EF$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

**Lời giải**



$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}) = 2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}) \\ &= 2\overrightarrow{EF} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{EF} \quad (1) \end{aligned}$$

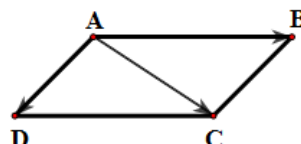
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) = 2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC}) \\ &= 2\overrightarrow{EF} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{EF} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$

$$\text{b) } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = 2(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = 2\vec{0} = \vec{0}.$$

**Câu 21:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

**Lời giải**





$$VT = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC} = VP.$$

**Câu 22:** Chứng minh rằng nếu  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  thì  $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
VP &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} \\
&= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \\
&= 3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} \\
&= 3\overrightarrow{GG'} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'} = VP.
\end{aligned}$$

