



CHƯƠNG

IV

VECTƠ

BÀI 9: TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6$, $AC = 8$. Độ dài vector $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ bằng

Lời giải

Trả lời: 10

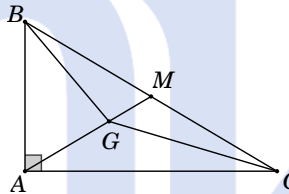
Do tam giác ABC vuông tại A nên $CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Theo quy tắc trừ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = 10$.

Câu 2: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tính độ dài của vector $\vec{v} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Lời giải

Trả lời: 4



Gọi M là trung điểm của BC .

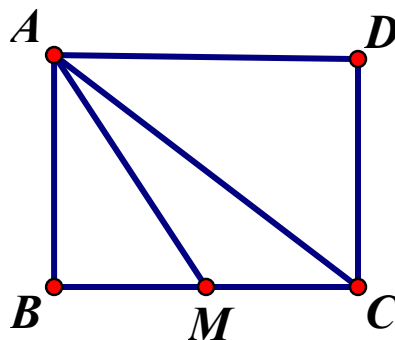
Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GA}| = GA$

Mà $GA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{BC}{3} = 4$.

Câu 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$?

Lời giải

Trả lời: 7,2



Gọi M là trung điểm BC , suy ra $BM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$.



Tam giác ABM vuông tại B có $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2\sqrt{13}$.

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $3\sqrt{2}$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

Lời giải

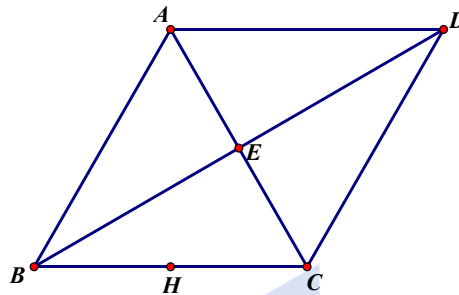
Trả lời: 12

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2AC = 2\sqrt{AB^2 + BC^2} = 2.3\sqrt{2}.\sqrt{2} = 12$.

Câu 5: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 2, H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{HC}|$.

Lời giải

Trả lời: 3,5



Dựng hình bình hành $ABCD$ và E là trung điểm của AC .

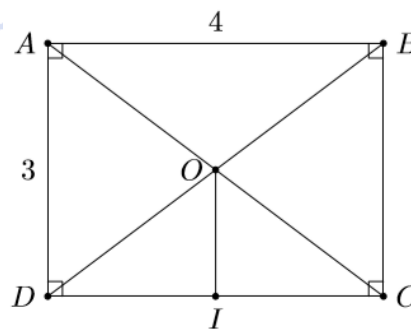
Ta có $2\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{BC}$, do đó: $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Vậy: $|\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{HC}| = BD = 2BE = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Câu 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có $AB = 4, AD = 3$. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.

Lời giải

Trả lời: 6



Gọi I là trung điểm của DC .

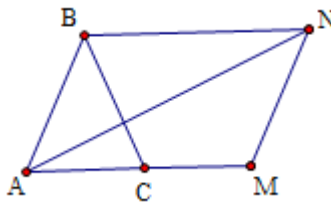
Ta có $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = |2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}| = |2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})| = 2|\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$.

$\Rightarrow |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 2|2\overrightarrow{OI}| = 4OI = 2BC = 2.3 = 6$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính độ dài của vector $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, biết $a = 2\sqrt{7}$

Lời giải

Trả lời: 14



Dựng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$.

Dựng hình bình hành $ABNM$. Khi đó $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$

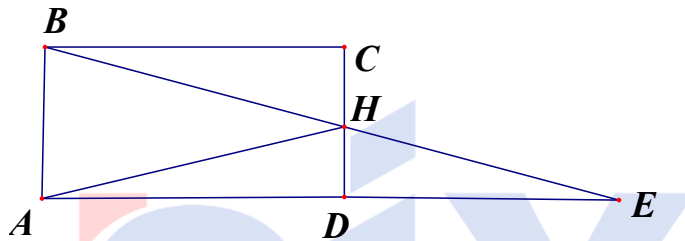
Dựng điểm M thỏa mãn $AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2 \cdot AB \cdot BN \cdot \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AN = a\sqrt{7}$

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{7} = 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 14$

Câu 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có hai cạnh $AB = a, BC = 2a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}|$, biết rằng $a = \sqrt{17}$

Lời giải

Trả lời: 17

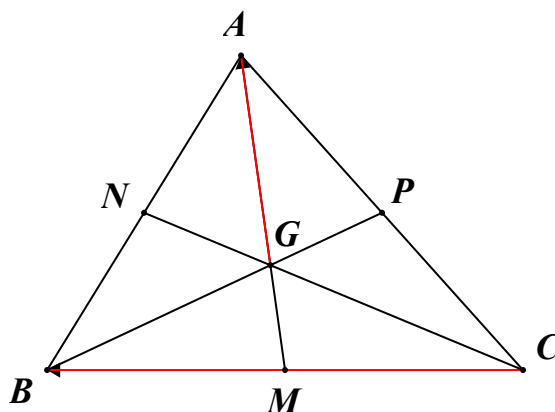


$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}| &= |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2AH \\ &= BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + 16a^2} = a\sqrt{17} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = 17 \end{aligned}$$

Câu 9: Cho tam giác ABC đều cạnh $3\sqrt{3}$, trọng tâm G . Tính độ dài vector $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{GA}$

Lời giải

Trả lời: 6



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC .

Ta có $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{GA}| = |2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MG}| = 2|\overrightarrow{GB}|$.

$$|\overrightarrow{GB}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{BP}| = \frac{2}{3} \cdot \frac{|\overrightarrow{AB}|\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 3.$$

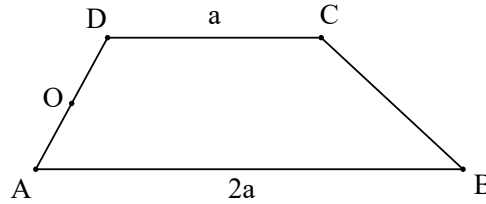
Vậy $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{GA}| = 2 \cdot 3 = 6$.



Câu 10: Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD , $AB = 20$, $CD = 10$. Gọi O là trung điểm của AD . Tính $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$

Lời giải

Trả lời: 30

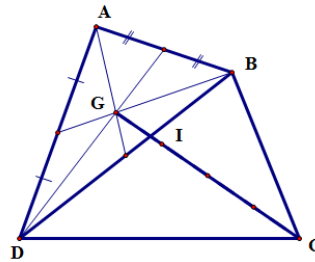


$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| &= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}| \\ &= |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = AB + DC = 20 + 10 = 30 \end{aligned}$$

Câu 11: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , I là điểm trên GC sao cho $IC = 3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MI}$. Tìm k .

Lời giải

Trả lời: 4



Ta có: $3\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{IC}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABD nên

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

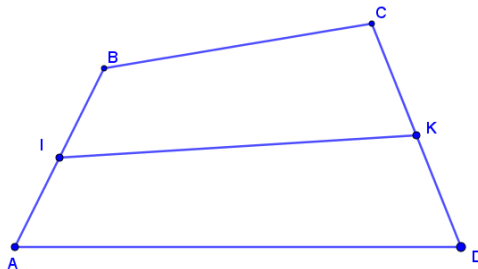
Khi đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID} \\ &= 4\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = 4\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 4\overrightarrow{MI} \end{aligned}$$

Câu 12: Cho tứ giác $ABCD$, có I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = k \cdot \overrightarrow{IJ}$. Tìm k ?

Lời giải

Trả lời: 2



$$\text{Ta có } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC})$$



$$= \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{IJ}$$

Vậy $k = 2$.

Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$, có cạnh bằng 2. Tính độ dài vectơ $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}|$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 4,47

$$AB \perp AD \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}|^2 = AB^2 + (2AD)^2 = 2^2 + (2 \cdot 2)^2 = 20$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{5}$$

Câu 14: Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

Lời giải

Trả lời: -0,5

Do hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương.

$$\text{Suy ra } 2\vec{a} - 3\vec{b} = k[\vec{a} + (x-1)\vec{b}] \quad (k \neq 0, k \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow 2\vec{a} - 3\vec{b} = k\vec{a} + k(x-1)\vec{b} \Rightarrow (k-2)\vec{a} + [k(x-1)+3]\vec{b} = \vec{0} \quad (1).$$

Theo đầu bài hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

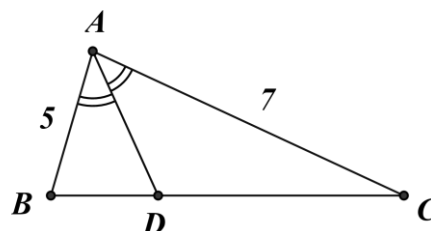
$$(1) \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k(x-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ x-1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = -\frac{1}{2}.$$

Câu 15: Cho tam giác ABC với AD là đường phân giác trong. Biết $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. Biết rằng $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$, tính $P = x + y$

Lời giải

Trả lời: 1



Vì AD là phân giác trong của tam giác ABC nên:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{5}{7} \overrightarrow{DC}$$

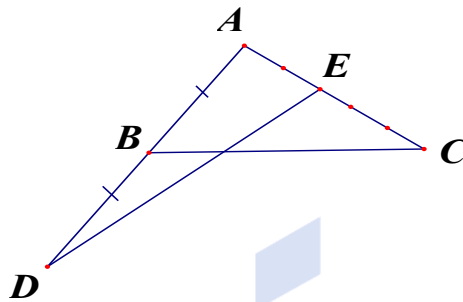
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{5}{7} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{7}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{12} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{12} \\ y = \frac{5}{12} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{7}{12} + \frac{5}{12} = 1.$$

Câu 16: Cho tam giác ABC . Lấy điểm D đối xứng với A qua B và lấy điểm E trên đoạn AC sao cho $3AE = 2EC$. Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, khi đó tính giá trị của biểu thức $P = 4m - 5n$

Lời giải

Trả lời: -10



Ta có $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow m = -2, n = \frac{2}{5} \Rightarrow P = 4m - 5n = 4 \cdot (-2) - 5 \cdot \frac{2}{5} = -10$.

Câu 17: Cho tam giác ABC đều nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính bằng 3. Gọi D là điểm nằm trên đường tròn (I) . Tính $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}|$.

Lời giải

Trả lời: 9

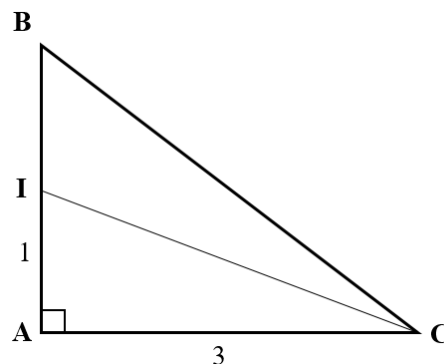
Tam giác ABC đều nội tiếp trong đường tròn tâm $I \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác ABC .

Do đó: $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = |3\overrightarrow{DI}| = 3DI = 3 \cdot 3 = 9$.

Câu 18: Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2, AC = 3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6,3



Ta có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CI}$ với I là trung điểm AB .

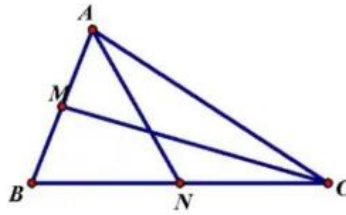
Vậy $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{CI}| = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} = 2\sqrt{10}$.



Câu 19: Gọi AN, CM là các trung tuyến của tam giác ABC . Biết rằng $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AN} + y\overrightarrow{CM}$, tính $P = x + y$

Lời giải

Trả lời: 2



Ta có $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Và $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

Suy ra $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Từ và suy ra $2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} \Rightarrow P = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$.

Câu 20: Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC , J là trung điểm của AI . Biết rằng tồn tại duy nhất cặp số m, n thỏa mãn $\overrightarrow{BJ} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{BC}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 10m + 4n$

Lời giải

Trả lời: -4

Do I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

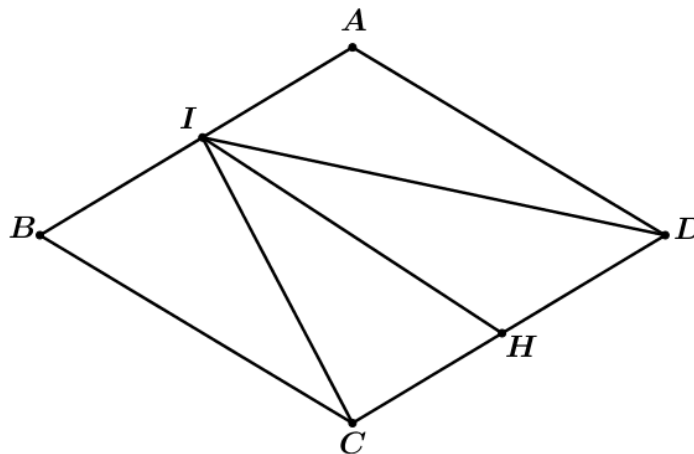
Và J là trung điểm AI nên $2\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow P = 10\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot \frac{1}{4} = -4$

Câu 21: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 5. Gọi I là trung điểm của AB . Tính $|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}|$.

Lời giải

Trả lời: 10



Ta có: I là trung điểm của $AB \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IH}$.

Ta có: $|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}| = |2\overrightarrow{IH}| = 2|\overrightarrow{IH}|$.



Ta có:
$$\begin{cases} AI = DH = \frac{1}{2} AB \\ AI // DH \end{cases} \Rightarrow \text{Tứ giác } AIHD \text{ là hình bình hành} \Rightarrow IH = AD \Rightarrow IH = 5$$

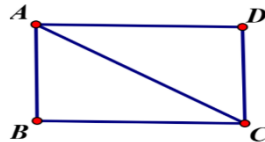
$$\Rightarrow |\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}| = 2.5 = 10.$$

Câu 22: Cho hình chữ nhật ABCD, biết $AB = 6, AD = 8$. Tính $|2\vec{AD} + \vec{DB}|$.

Lời giải

Trả lời: 10

Ta có $|2\vec{AD} + \vec{DB}| = |\vec{AD} + \vec{AD} + \vec{DB}| = |\vec{AD} + \vec{AB}| = |\vec{AC}| = AC$.



Và $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ nên $|2\vec{AD} + \vec{DB}| = 10$.

Câu 23: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\vec{MC} - \vec{MB}| = |\vec{MC} - \vec{AC}|$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải

Trả lời: 10

Ta có $|\vec{MC} - \vec{MB}| = |\vec{MC} - \vec{AC}| \Leftrightarrow |\vec{BC}| = |\vec{MC} + \vec{CA}| \Leftrightarrow |\vec{BC}| = |\vec{MA}| \Leftrightarrow MA = BC$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Vậy tập các điểm M thỏa mãn $|\vec{MC} - \vec{MB}| = |\vec{MC} - \vec{AC}|$ là đường tròn tâm A bán kính $BC = 10$.

Câu 24: Cho tam giác đều ABC có cạnh là 8cm . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\vec{MA} - 4\vec{MB} + 3\vec{MC}| = |\vec{MB} - \vec{MC}|$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải

Trả lời: 8

Ta có $|\vec{MB} - \vec{MC}| = |\vec{CB}| = 8$.

Dựng điểm I thỏa mãn $2\vec{IA} - 4\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$.

Khi đó: $|2\vec{MA} - 4\vec{MB} + 3\vec{MC}| = |\vec{MB} - \vec{MC}| \Leftrightarrow |\vec{MI}| = 8 \Leftrightarrow IM = 8$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I cố định có bán kính $R = 8\text{cm}$.

Câu 25: Cho tam giác ABC đều cạnh 12. Biết rằng tập hợp điểm M sao cho $|4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}|$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải

Trả lời: 3,46

Gọi G là trọng tâm ΔABC , K là trung điểm của AG. Ta có:

$$|4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}| \Leftrightarrow |3(\vec{MA} + \vec{MG})| = |3(\vec{MA} - \vec{MG})|$$

$$\Leftrightarrow |6\vec{MK}| = |3\vec{GA}| \Leftrightarrow MK = \frac{GA}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3,46.$$

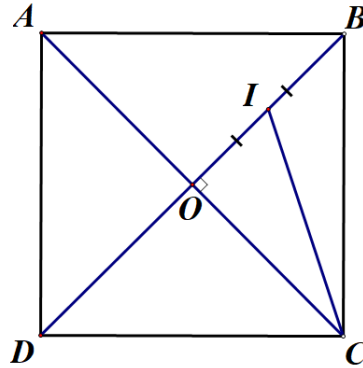


Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn tâm K bán kính $R \approx 3,46$

Câu 26: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 20 , tâm O . Tính $|\vec{CO} + \vec{DA}|$.

Lời giải

Trả lời: 31,6



Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OB

$$\text{Ta có } \vec{CO} + \vec{DA} = \vec{CO} + \vec{CB} = 2\vec{CI} \Rightarrow |\vec{CO} + \vec{DA}| = 2CI$$

$$BD = 2\sqrt{2} \cdot 10 = 20\sqrt{2}, \quad OC = \frac{1}{2}BD = 10\sqrt{2}, \quad OI = \frac{1}{4}BD = 5\sqrt{2}$$

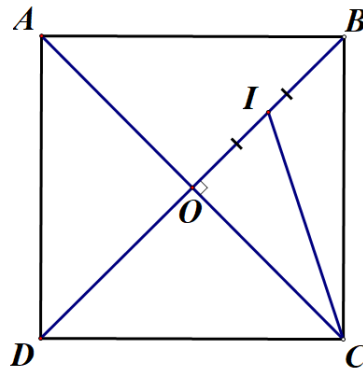
$$CI = \sqrt{OI^2 + OC^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{10}$$

$$\text{Suy ra } |\vec{CO} + \vec{DA}| = 2CI = 10\sqrt{10} \approx 31,6.$$

Câu 27: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, tâm O . Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{OA}| = |\vec{AM} + \vec{CD}|$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải

Trả lời: 31,6



Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OB

$$\text{Ta có } \vec{CO} + \vec{DA} = \vec{CO} + \vec{CB} = 2\vec{CI} \Rightarrow |\vec{CO} + \vec{DA}| = 2CI$$

$$BD = 2\sqrt{2} \cdot 10 = 20\sqrt{2}, \quad OC = \frac{1}{2}BD = 10\sqrt{2}, \quad OI = \frac{1}{4}BD = 5\sqrt{2}$$

$$CI = \sqrt{OI^2 + OC^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{10}$$

$$\text{Suy ra } |\vec{CO} + \vec{DA}| = 2CI = 10\sqrt{10} \approx 31,6.$$

$$\text{Ta có } |\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{OA}| = |\vec{CB} + \vec{OA}| = |\vec{DA} + \vec{CO}| = 10\sqrt{10} \approx 31,6$$



$$|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BM}| = BM$$

Suy ra $BM = 10\sqrt{10} \approx 31,6$. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm B bán kính

$$R = 10\sqrt{10} \approx 31,6$$

Câu 28: Cho tam giác ABC . Các điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Trả lời: -0,5

Ta có

$$+) \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$$

$$+) \overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{BC} + (x+1)\overrightarrow{AC}$$

Khi đó A, M, N thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM}$

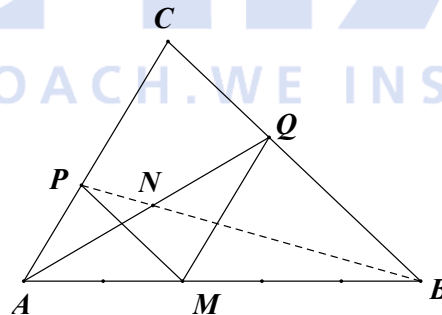
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{BC} + (x+1)\overrightarrow{AC} = 2k\overrightarrow{BC} - k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2k \\ x+1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $x = -\frac{1}{2}$ thì A, M, N thẳng hàng.

Câu 29: Cho tam giác ABC , M là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Trên các cạnh AC, BC lấy các điểm P, Q sao cho $CPMQ$ là hình bình hành. Lấy điểm N trên AQ sao cho $a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NQ} = \vec{0}$. Khi ba điểm B, N, P thẳng hàng hãy tính $a+b$.

Lời giải

Trả lời: 19



$$\text{Vì } MP \parallel BC, MQ \parallel AC \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{CQ}{CB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AP}.$$

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AQ}. \text{ Suy ra: } \overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}x\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}x\overrightarrow{AP}.$$

$$\text{Do } B, N, P \text{ thẳng hàng nên } \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{10}{19} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{10}{19}\overrightarrow{AQ}$$

$$\text{Hay } \overrightarrow{AN} = \frac{10}{9}\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{NA} + 10\overrightarrow{NQ} = \vec{0}.$$

$$\text{Vậy } a+b = 10+9 = 19.$$



Câu 30: Cho tam giác đều ABC và các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{15} \overrightarrow{AB}$.
 . Tìm k để AM vuông góc với PN . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,33

$$+/- \text{ Ta có: } \overrightarrow{BM} = k \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AC} + (1-k) \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{4}{15} \overrightarrow{AB}$$

$$+/- \text{ } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow [k \overrightarrow{AC} + (1-k) \overrightarrow{AB}] \cdot \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{4}{15} \overrightarrow{AB} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{3} \cdot AC^2 - \frac{4(1-k)}{15} AB^2 + \left(\frac{1-k}{3} - \frac{4k}{15} \right) \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{3} \cdot AC^2 - \frac{4(1-k)}{15} AB^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{3k}{5} \right) \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{3} - \frac{4(1-k)}{15} + \left(\frac{1}{3} - \frac{3k}{5} \right) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } k = \frac{1}{3}.$$

Câu 31: Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 20$, M là điểm tùy ý trong mặt phẳng tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$?

Lời giải

Trả lời: 10

Gọi P là trung điểm đoạn BC và là Q trung điểm đoạn AP .

Khi đó:

$$AP = \frac{1}{2} BC = 10$$

$$|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MP}| + 2|\overrightarrow{MP}| = 4|\overrightarrow{MQ}| + 2|\overrightarrow{MP}| = 4MQ + 2MP.$$

Ta có $2MQ + 2MP \geq 2PQ$ và $2MQ \geq 0$

. Suy ra $2MQ + 2MP \geq 2PQ = AP$

. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ là $AP = 10$

Câu 32: Cho đoạn $AB = 4$. Với điểm M tùy ý, tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $3MA^2 + MB^2$

Lời giải

Trả lời: 12



Gọi I là điểm thuộc đoạn AB sao cho $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có: } p = 3MA^2 + MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$



$$= 4MI^2 + 2\overline{MI} \left(3\overline{IA} + \overline{IB} \right) + 3IA^2 + IB^2 = 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2.$$

Vì I, A, B cố định nên: $p \geq 3IA^2 + IB^2$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$

Suy ra $\min p = 3IA^2 + IB^2 = 12$ đạt được khi $M \equiv I$.

Câu 33: Cho ABC đều có độ dài cạnh bằng $5\sqrt{3}$. Gọi d là đường thẳng qua A và song song BC , điểm M di động trên d . Tính giá trị nhỏ nhất của $|\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC}|$.

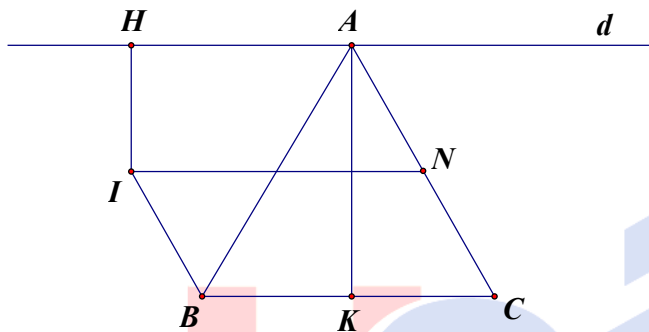
Lời giải

Trả lời: 15

Giả sử I là điểm thỏa mãn $\overline{IA} + 2\overline{IB} - \overline{IC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } \overline{IA} + 2\overline{IB} - \overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{IB} + \overline{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{IB} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

Gọi N là trung điểm của AC suy ra $\overline{IB} = \overline{NC}$ suy ra I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BCNI$



$$\text{Ta có } T = |\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC}| = |\overline{MI} + \overline{IA} + 2(\overline{MI} + \overline{IB}) - (\overline{MI} + \overline{IC})| = |2\overline{MI}| = 2MI$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d , khi đó với mọi điểm M thuộc d ta luôn có $MI \geq HI$ nên T nhỏ nhất khi $MI = HI$ hay $M \equiv H$

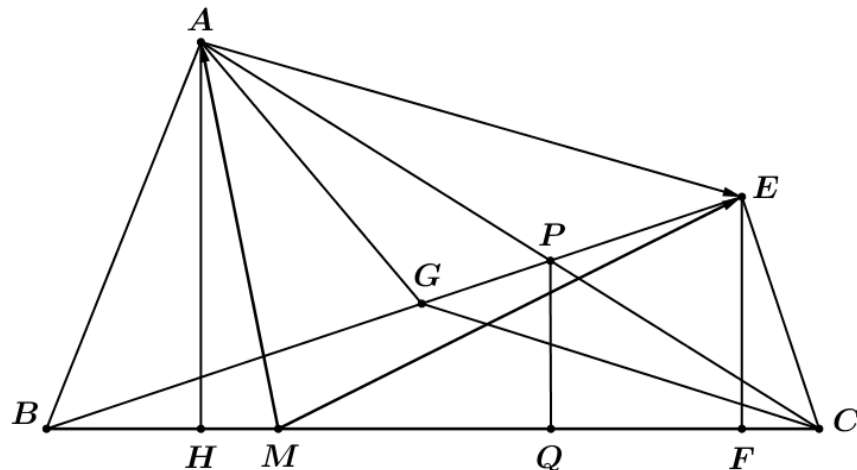
$$\text{Suy ra } T_{\min} = 2HI = AK = 2 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 15 \text{ với } K \text{ là hình chiếu vuông góc của } A \text{ trên } BC$$

Câu 34: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overline{BH} = \frac{1}{3}\overline{HC}$

. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overline{BM} = x\overline{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vector $\overline{MA} + \overline{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 0,8





Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$.

Kẻ $EF \perp BC$ ($F \in BC$). Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{ME}| = ME \geq EF$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất khi $M \equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC , Q là hình chiếu vuông góc của P lên BC $Q \in BC$.

Khi đó P là trung điểm GE nên $BP = \frac{3}{4}BE$.

Ta có $\triangle BPQ$ và $\triangle BEF$ đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4}$ hay $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

PQ là đường trung bình $\triangle AHC$ nên Q là trung điểm HC hay $\overrightarrow{HQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$.

Suy ra $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{HC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BC}$.

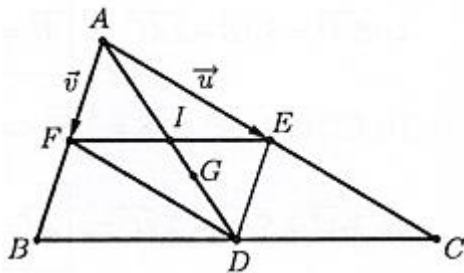
Do đó $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

Vậy $x = \frac{5}{6}$.

Câu 35: Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Phân tích vector $\overrightarrow{AI}$ theo hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta thu được kết quả dạng $a\vec{u} + b\vec{v}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính giá trị $S = a^2 + b^2$.

Lời giải

Trả lời: 0,5



Theo tính chất đường trung bình thì $\begin{cases} DE \parallel AB \\ DF \parallel AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DE \parallel AF \\ DF \parallel AE \end{cases}$

Suy ra: $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow AD = AE + AF$.

Từ giả thiết ta có I là tâm của hình bình hành $AEDF$.

Khi đó: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = 0,5$.

Câu 36: Cho $\triangle ABC$. Gọi I, J là 2 điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}, \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BJ}$. Với $k = \frac{m}{n}$, là phân số tối giản. Tính $P = m + n$.

Lời giải

Trả lời: 5



$$\text{Ta có } \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{BJ} + 3(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BJ}) = \vec{0}$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{BJ} + 3\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BJ} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ}.$$

Câu 37: Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Cho điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$, khi đó điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

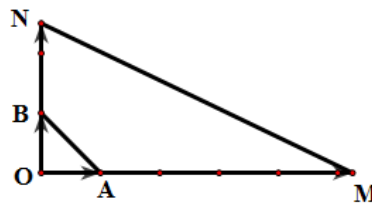
$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MG}| = 3MG \Leftrightarrow MG = 2.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 2.

Câu 38: Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = 1$. Tính độ dài của véc tơ $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

Trả lời: 5,81



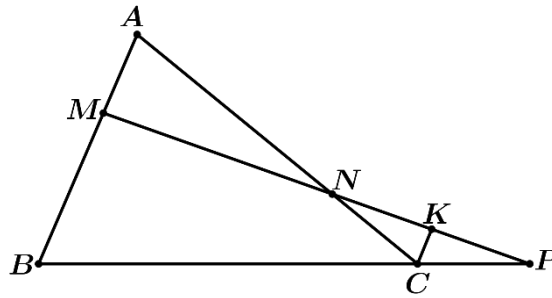
Dựng điểm M, N sao cho: $\overrightarrow{OM} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$. Khi đó:

$$|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \approx 5,81.$$

Câu 39: Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và AC thỏa mãn biểu thức $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{NC}$. Đường thẳng MN cắt BC tại P và biết $\overrightarrow{PB} = k\overrightarrow{PC}$. Khi đó, giá trị của k bằng

Lời giải

Trả lời: 4



Dựng $CK \parallel AB$ và gọi K là một điểm thuộc PM .

Ta có $\frac{PC}{PB} = \frac{KC}{MB} = \frac{KC}{2MA}$ mà $\frac{KC}{MA} = \frac{NC}{NA} = \frac{1}{2}$ nên suy ra $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{4}$.

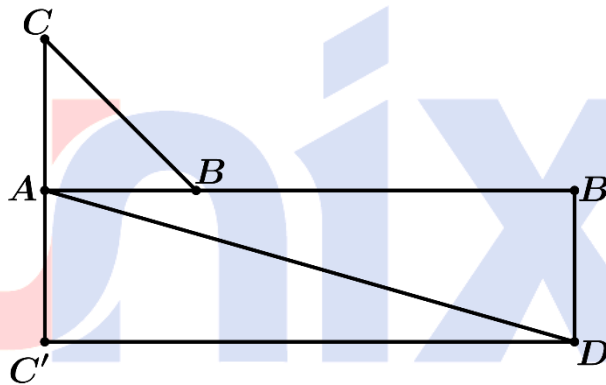
Mặt khác $\overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{PB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{PB} = 4\overrightarrow{PC}$.

Vậy $k = 4$.

Câu 40: Cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A . Biết rằng độ dài cạnh $AB = \sqrt{17}$. Khi đó hãy tính độ dài của vector $|\vec{u}| = |4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Trả lời: 17



Dựng $\overrightarrow{AB'} = 4\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AC}$ và hình bình hành $AC'DB'$

Ta có: $|4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$

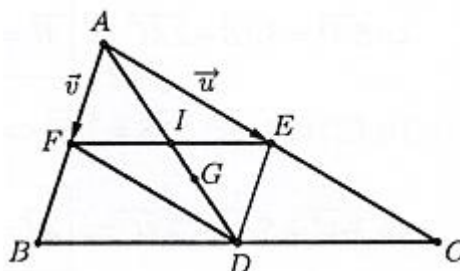
Do đó: $AD = \sqrt{AB'^2 + AC'^2} = \sqrt{16(\sqrt{17})^2 + (\sqrt{17})^2} = 17$.

Vậy độ dài vector $|\vec{u}| = 17$.

Câu 41: Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. $\overrightarrow{AI} = m\vec{u} + n\vec{v}$ tính $P = m^2 + n^2$

Lời giải

Trả lời: 0,5



Theo tính chất đường trung bình thì



$$\begin{cases} DE // AB \\ DF // AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DE // AF \\ DF // AE \end{cases}$$

Suy ra: $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow AD = AE + AF$.

Từ giả thiết ta có I là tâm của hình bình hành $AEDF$. Khi đó:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}$$

$$\text{Suy ra } m = \frac{1}{2}; n = \frac{1}{2} \Rightarrow P = m^2 + n^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Câu 42: Cho tam giác ABC , có điểm G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó ta có biểu thức $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ và a, b là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $3a + 6b$ là?

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi M là trung điểm BC .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

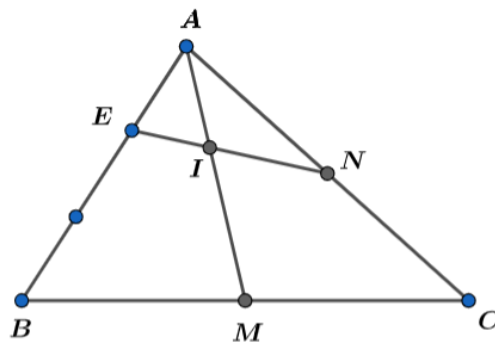
$$\text{Vậy } a = \frac{1}{3}; b = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Giá trị của biểu thức } 3a + 6b = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 3.$$

Câu 43: Cho tam giác ABC ; lấy điểm M, N, E sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$. Với a là số thực, điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{AM}$ và ba điểm I, N, E thẳng hàng. Khi đó giá trị của a là? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,27



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{AM} = a \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{a}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{a}{2} \overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{a}{2} \overrightarrow{AC} \right) - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{AB} + \frac{a}{2} \overrightarrow{AC}.$$



Vì ba điểm I, N, E thẳng hàng nên tồn tại số thực k sao cho: $\overrightarrow{EI} = k\overrightarrow{EN}$

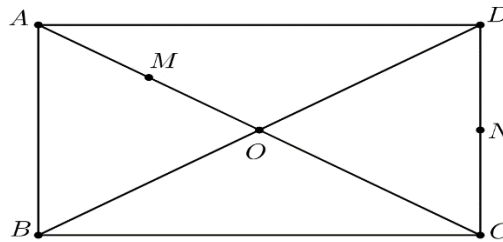
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{a}{2}\overrightarrow{AC} = k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{k}{3} \\ \frac{a}{2} = \frac{k}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{15} \\ k = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Vậy $a = \frac{4}{15} \approx 0,27$.

Câu 44: Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA và CD . Biết $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$. Tính $4a - 8b$.

Lời giải

Trả lời: -5



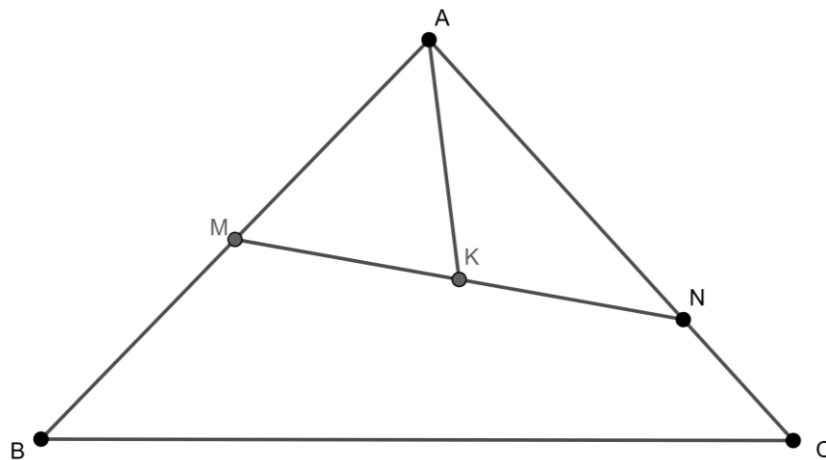
$$\text{Xét } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Do } \overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow 4a - 8b = -5.$$

Câu 45: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm MN . Khi đó $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Tính giá trị của $P = 4x + 3y$.

Lời giải

Trả lời: 2



Ta có: M, K lần lượt là trung điểm của AB và MN . Nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$



Lại có: $NA = 2NC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$

Vậy: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow P = 4x + 3y = 2$$

Câu 46: Cho tam giác ABC . Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

Lời giải

Trả lời: -0,5

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (x+1)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \end{cases}$

Để A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM} (k \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM} (k \in \mathbb{R})$$

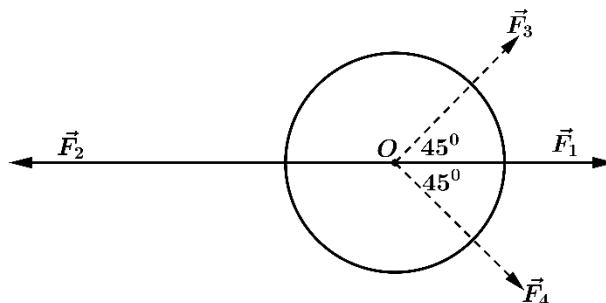
$$\Leftrightarrow k(-\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}) = (x+1)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow -k\overrightarrow{AC} + 2k\overrightarrow{BC} = (x+1)\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -k = x+1 \\ 2k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k = x+1 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

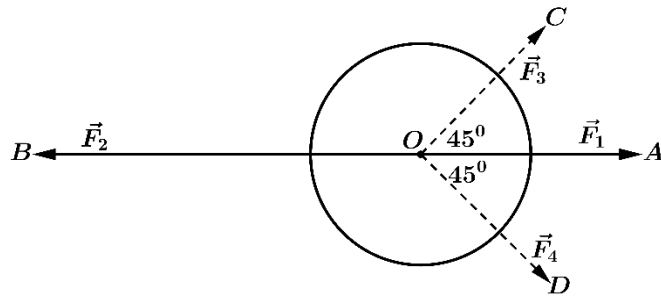
Vậy $x = -0,5$.

Câu 47: Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$, trong đó độ lớn lực $\vec{F}_2$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F}_1$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ có phương hợp với lực $\vec{F}_1$ các góc 45° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng $20N$. Tìm độ lớn của lực $\vec{F}_2$ (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



Lời giải

Trả lời: 56,6



Ta có: $\vec{F}_2 = -2\vec{F}_1$. Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng $\vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 - 2\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1.$$

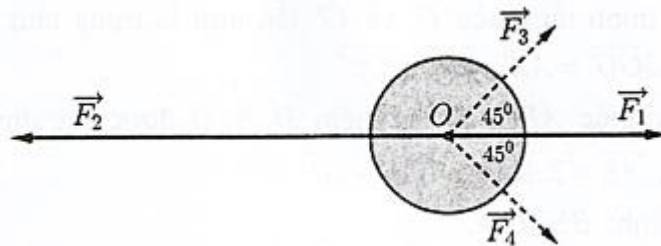
Đặt $\vec{F}_1 = \vec{OA}$, $\vec{F}_2 = \vec{OB}$, $\vec{F}_3 = \vec{OC}$, $\vec{F}_4 = \vec{OD}$.

Ta có: $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 \Leftrightarrow \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OA}$ do đó $OCAD$ là hình bình hành.

Mặt khác: $OC = OD = 20$ và $COD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên $OCAD$ là hình vuông.

Khi đó: $|\vec{F}_1| = OA = 20\sqrt{2} \text{ N}$, $|\vec{F}_2| = 2|\vec{F}_1| = 40\sqrt{2} \text{ N} \approx 56,6 \text{ N}$.

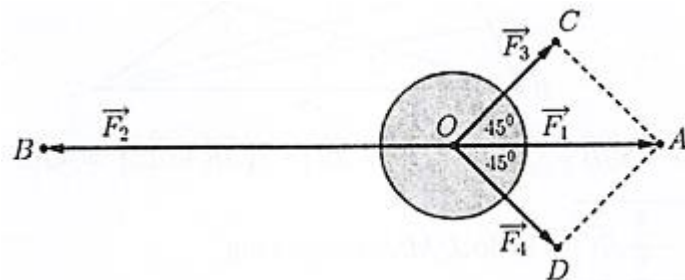
Câu 48: Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$, trong đó độ lớn lực $\vec{F}_2$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F}_1$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ có phương hợp với lực $\vec{F}_1$ các góc 45° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng 20 N . Tìm độ lớn của mỗi lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



WE COACH.WE INSPIRE

Lời giải

Trả lời: 56,6



Ta có: $\vec{F}_2 = -2\vec{F}_1$. Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng $\vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 - 2\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1.$$

Đặt $\vec{F}_1 = \vec{OA}$, $\vec{F}_2 = \vec{OB}$, $\vec{F}_3 = \vec{OC}$, $\vec{F}_4 = \vec{OD}$.

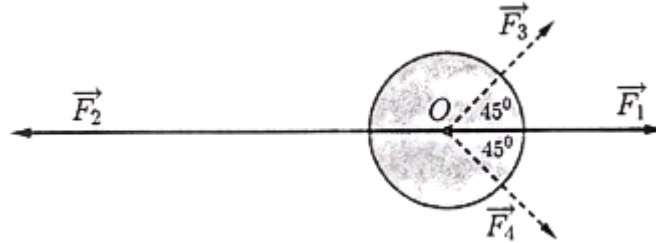
Ta có: $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 \Leftrightarrow \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OA}$. Do đó $OCAD$ là hình bình hành.

Mặt khác: $OC = OD = 20$ và $COD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên $OCAD$ là hình vuông. Khi đó:

$$|\vec{F}_1| = OA = 20\sqrt{2} \text{ N}, |\vec{F}_2| = 2|\vec{F}_1| = 40\sqrt{2} \text{ N}.$$

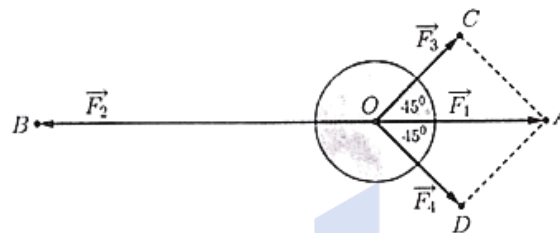


Câu 49: Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$, trong đó độ lớn lực $\vec{F}_2$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F}_1$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ có phương hợp với lực $\vec{F}_1$ các góc 45° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng 20 N . Tính tổng độ lớn của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Lời giải

Trả lời: 85



Ta có: $\vec{F}_2 = -2\vec{F}_1$. Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng $\vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 - 2\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1.$$

Đặt $\vec{F}_1 = \vec{OA}, \vec{F}_2 = \vec{OB}, \vec{F}_3 = \vec{OC}, \vec{F}_4 = \vec{OD}$.

Ta có: $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 \Leftrightarrow \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OA}$. Do đó $OCAD$ là hình bình hành.

Mặt khác: $OC = OD = 20$ và $COD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên $OCAD$ là hình vuông.

Khi đó: $|\vec{F}_1| = OA = 20\sqrt{2}\text{ N}, |\vec{F}_2| = 2|\vec{F}_1| = 40\sqrt{2}\text{ N}.$

Vậy $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = 20\sqrt{2} + 40\sqrt{2} = 80\sqrt{2} \approx 85.$