

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC



LÝ THUYẾT.

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

a. Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng cho hai tia Ou , Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một **góc lượng giác** với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .

Góc lượng giác (Ou, Ov) chỉ được xác định khi ta biết được chiều chuyển động quay của tia Om từ tia đầu Ou đến tia cuối Ov . Ta quy ước: chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.

Khi tia Om quay góc α° thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α° . Số đo của **góc lượng giác** với tia đầu Ou , tia cuối Ov được kí hiệu là $sd(Ou, Ov)$.

Cho hai tia Ou , Ov thì có vô số **góc lượng giác** tia đầu Ou , tia cuối Ov . Mỗi **góc lượng giác** như thế đều kí hiệu là (Ou, Ov) . Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của 360° .

b. Hệ thức Chasles: với 3 tia Ou , Ov , OW bất kì ta có:

$$sd(Ou, Ov) + sd(Ov, Ow) = sd(Ou, Ow) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Từ đó suy ra: $sd(Ou, Ov) = sd(Ou, Ow) - sd(Ov, Ow) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

a. Đơn vị đo góc và cung tròn

Đơn vị độ:

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và một cung AB trên (O) . Ta nói cung AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R . Khi đó ta cũng nói rằng góc $\widehat{AOB}$ có số đo bằng 1 radian và viết $\widehat{AOB} = 1 \text{ radian}$

b) Quan hệ giữa độ và radian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

b. Độ dài của một cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì có độ dài là $\ell = R\alpha$.



3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

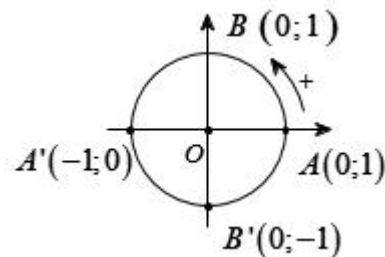
a. Đường tròn lượng giác

Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm gốc của đường tròn.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$

$A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.

Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sd(OA, OM) = \alpha$.



b. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Giả sử $M(x;y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α .

- Hoành độ x của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = x$$

- Tung độ y của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = y$$

- Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan \alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu

$$\operatorname{tg} \alpha): \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

- Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là cotang của α và kí hiệu là $\cot \alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu

$$\operatorname{cotg} \alpha): \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các **giá trị lượng giác của cung α** .

Chú ý:

a) Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**

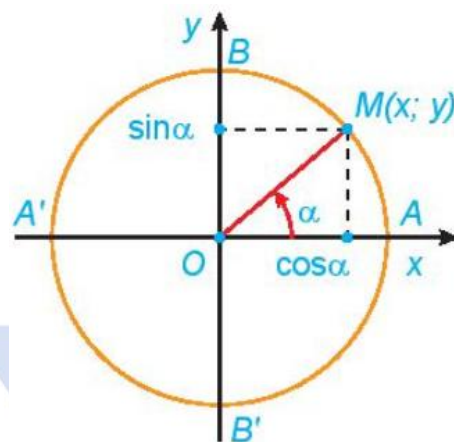
b) Từ định nghĩa ta suy ra:

1) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa, ta có:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 &\leq \cos \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

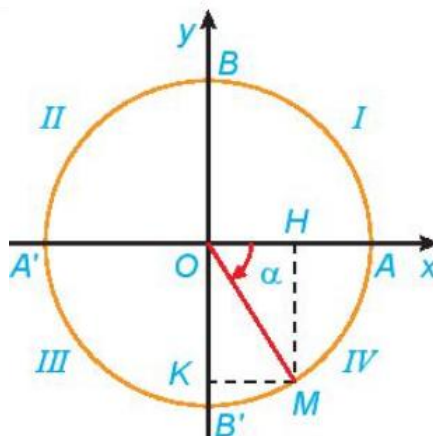




2) $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3) $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4) Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác.



Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

Giá trị lượng giác \ Góc phần tư	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

c. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

a. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

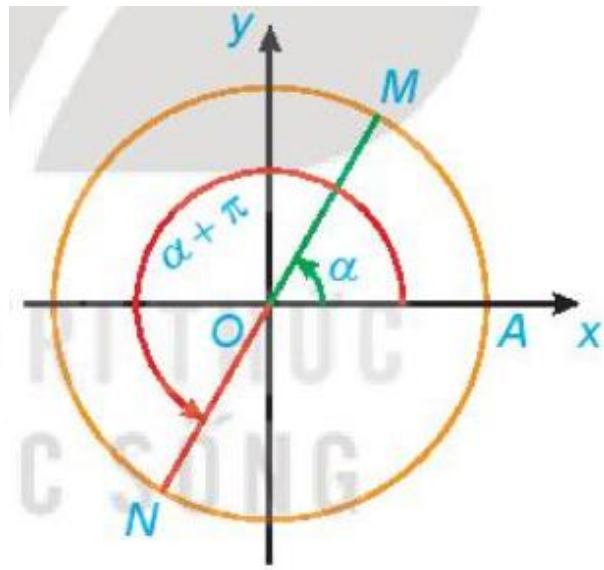
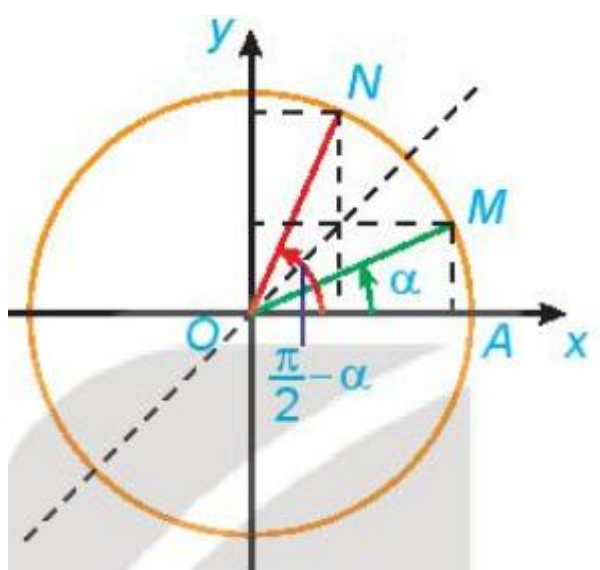
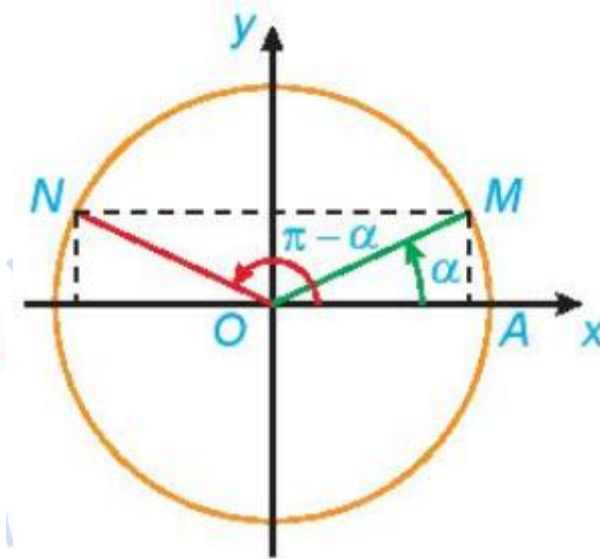
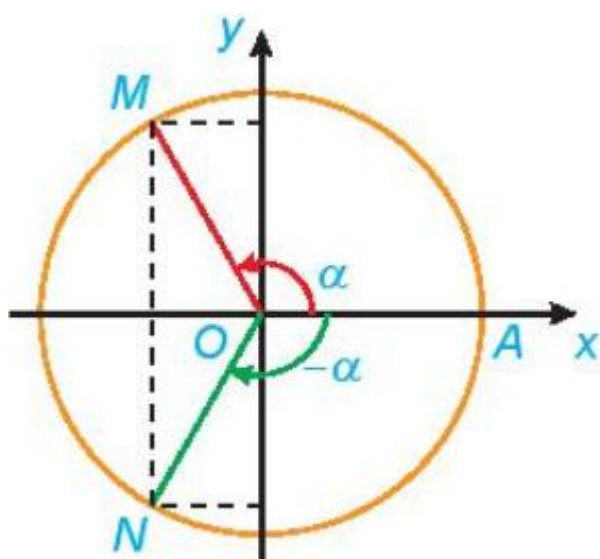
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

b. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt





Góc đối nhau	Góc bù nhau	Góc phụ nhau
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

Góc hơn kém π	Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$

WE COACH.WE INSPIRE



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Một cung tròn có số đo a° (hoặc α rad) có độ dài là $l = \frac{a\pi R}{180}$ (hoặc $l = \alpha R$)

Câu 1: Một đường tròn có bán kính 10. Tính độ dài cung tròn có số đo 30°

Lời giải

Độ dài cung tròn có số đo 30° là $l = \frac{\pi \cdot 30}{180} \cdot R = \frac{\pi \cdot 30}{180} \cdot 10 \approx 5,26(cm)$

Câu 2: Một bánh xe máy có đường kính 60 cm. Nếu xe chạy với vận tốc $50(km/h)$ thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.

Lời giải

Trong một phút bánh xe quay được: $\left[\frac{50 \cdot 1000}{3600} : (0,6\pi) \right] \cdot 5 \approx 36,9$.



Câu 3: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270° ?

Lời giải

$$\text{Tính được: } 270^\circ = \frac{270}{180} \pi = \frac{3}{2} \pi = \frac{3}{4} \cdot 2\pi$$

Vậy đu quay quay được góc 270° khi nó quay được $\frac{3}{4}$ vòng

Ta có: Đu quay quay được 1 vòng trong $\frac{1}{3}$ phút

Đu quay quay được $\frac{3}{4}$ vòng trong $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 4: Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,25 cm, kim phút dài 13,25 cm. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?

Lời giải

Trong 6 giờ kim giờ vạch nên một cung có số đo là π (rad), vậy trong 30 phút kim giờ vạch nên cung có số đo là $\frac{\pi}{12}$ (rad). Khi đó độ dài cung tròn mà kim giờ vạch ra trong 30 phút là

$$l = R \cdot \alpha \Rightarrow l = 10,25 \cdot \frac{\pi}{12} = 2,68 \text{ (cm)}.$$

DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC HOẶC MỘT BIỂU THỨC

Sử dụng công thức lượng giác cơ bản trong các bài toán:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$5) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$6) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Câu 5: Cho $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0 \right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải



Vì $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$

Vậy $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$

Câu 6: Cho $\sin x = \frac{3}{5} \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi \right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

Vậy $\cos x = -\frac{4}{5}$.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

Câu 7: Cho $\tan x = \frac{3}{4} \left(-\pi < x < -\frac{\pi}{2} \right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

Vì $-\pi < x < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0$

$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

Ta có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$

Vậy $\cos x = -\frac{4}{5}$.



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

Câu 8: Cho $\cot x = \frac{3}{4}$ ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

$$\text{Vì } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < 0$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\text{Vậy } \sin x = -\frac{4}{5}.$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \cot x \cdot \sin x = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

Câu 9: Biết $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính giá trị của biểu thức: $\sin \alpha + \cos \alpha$

Lời giải

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } 180^\circ < \alpha < 270^\circ \text{ nên } \cos \alpha < 0. \text{ Suy ra, } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do đó, } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 10: Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$

Lời giải

$$A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{3 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = 7.$$

Câu 11: Cho $\tan x = 3$. Tính $P = \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \tan x = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \sin x = 3 \cos x. \text{ Khi đó } P = \frac{2 \cdot 3 \cos x - \cos x}{3 \cos x + \cos x} = \frac{5 \cos x}{4 \cos x} = \frac{5}{4}.$$

Câu 12: Cho $\sin a = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a}$ bằng



Lời giải

Ta có

$$A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2 \cot a} = \frac{\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a}}{\frac{\sin a}{\cos a} + 2 \frac{\cos a}{\sin a}} = \frac{\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a}}{\frac{\sin^2 a + 2 \cos^2 a}{\sin a \cos a}} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin^2 a + 2 \cos^2 a}$$

$$= \frac{(1 - \sin^2 a) - \sin^2 a}{\sin^2 a + 2(1 - \sin^2 a)} = \frac{1 - 2\sin^2 a}{2 - \sin^2 a} = \frac{7}{17}$$

Câu 13: Cho $\tan x = -4$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{2 \sin x - 5 \cos x}{3 \cos x + \sin x}$ là

Lời giải

Ta có: $A = \frac{2 \sin x - 5 \cos x}{3 \cos x + \sin x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x} - 5 \frac{\cos x}{\cos x}}{3 \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2 \tan x - 5}{3 + \tan x} = \frac{2 \cdot (-4) - 5}{3 + (-4)} = 13.$

Câu 14: Cho $\tan \alpha = 3$, khi đó giá trị của biểu thức $P = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$ là

Lời giải

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos \alpha \neq 0$ ta được: $P = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha} = \frac{2 \tan \alpha - 1}{3 \tan \alpha - 5} = \frac{5}{4}.$

Câu 15: Cho góc α thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$ bằng

Lời giải

Cách 1: Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

Với $\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Vậy: $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}.$

Cách 2: Theo giả thiết: $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}.$

Vậy $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}.$



Câu 16: Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin^4 \alpha - 3 \sin^3 \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}$.

Lời giải

Do $\tan \alpha = 2$ nên $\cos \alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của biểu thức P cho $\cos^4 \alpha$ ta được:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} - 3 \cdot \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{\cos^4 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} + 2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha}} = \frac{\tan^4 \alpha - 3 \tan^3 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{\tan^4 \alpha - 3 \tan^3 \alpha + (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^2 \alpha \cdot (\tan^2 \alpha + 1) + \tan^2 \alpha + 2 \cdot (\tan^2 \alpha + 1)} = \frac{\tan^4 \alpha - 3 \tan^3 \alpha + \tan^2 \alpha + 1}{\tan^4 \alpha + 4 \tan^2 \alpha + 2} \\ &= \frac{2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2^2 + 1}{2^4 + 4 \cdot 2^2 + 2} = -\frac{3}{34}. \end{aligned}$$

Vậy $P = -\frac{3}{34}$.

Câu 17: Cho $2 \tan a - \cot a = 1$ với $-\frac{\pi}{2} < a < 0$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\tan(8\pi - a) + 2 \cot(\pi + a)}{3 \tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)}$

Lời giải

$$2 \tan a - \cot a = 1 \Leftrightarrow 2 \tan a - \frac{1}{\tan a} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan a = 1 \\ \tan a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vì $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ nên $\tan a < 0$, suy ra $\tan a = -\frac{1}{2}$, $\cot a = -2$

Ta có: $\tan(8\pi - a) = -\tan a$; $\cot(\pi + a) = \cot a$; $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = -\cot a$.

$$P = \frac{\tan(8\pi - a) + 2 \cot(\pi + a)}{3 \tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)} = \frac{-\tan a + 2 \cot a}{-3 \cot a} = \frac{\frac{1}{2} - 4}{6} = \frac{-7}{12}.$$

Câu 18: Cho $\sin x + \cos x = m$. Tính giá trị của biểu thức: $M = |\sin x - \cos x|$

Lời giải

Ta có: $M^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin x \cos x$.

Mặt khác: $M^2 = (\sin x - \cos x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 4 \sin x \cos x = m^2 - 4 \sin x \cos x$.

$$\text{Suy ra: } 1 - 2 \sin x \cos x = m^2 - 4 \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}.$$



Do đó: $M^2 = 2 - m^2 \Rightarrow M = \sqrt{2 - m^2}$.

Câu 19: Cho $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$ Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$

Lời giải

Đặt $\cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{a} + \frac{t^2}{b} = \frac{1}{a+b}$

$\Leftrightarrow b(1-t)^2 + at^2 = \frac{ab}{a+b} \quad \Leftrightarrow at^2 + bt^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b} \quad \Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b}$

$\Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2b(a+b)t + b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b}{a+b}$

Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{b}{a+b}; \sin^2 \alpha = \frac{a}{a+b}$

Vậy: $\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}$.

DẠNG 3: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

Câu 20: Tính giá trị của biểu thức: $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

Lời giải

Ta có $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - 1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$.

Câu 21: Rút gọn biểu thức $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3 \sin(\alpha - 5\pi)$.

Lời giải

Ta có $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3 \sin(\alpha - 5\pi)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + 3 \sin(\pi - \alpha) = \cos \alpha - \cos \alpha + 3 \sin \alpha = 3 \sin \alpha$.

Câu 22: Tính giá trị của biểu thức: $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

Lời giải

$\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

$= \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \cos^2 30^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ$

$= \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$

$= 4$

Câu 23: Tính giá trị của biểu thức:



$$\begin{aligned} M &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ + \\ &+ \cos^2 90^\circ + \cos^2 100^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 130^\circ + \cos^2 140^\circ + \cos^2 150^\circ + \cos^2 160^\circ + \\ &+ \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ \end{aligned}$$

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ta có:

$$\begin{aligned} M &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ \\ &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 80^\circ + \dots + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + \cos^2 90^\circ \\ &= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ) \\ &= 2(\sin^2 80^\circ + \dots + \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ) = 8 \end{aligned}$$

DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC. ĐĂNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Câu 24: Rút gọn biểu thức $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$

Lời giải

$$A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x) = \cot^2 x - \cos^2 x + 1 - \cot^2 x = \sin^2 x.$$

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

Lời giải

$$M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin x \cos x = 2.$$

Câu 26: Rút gọn biểu thức $C = 2(\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (\cos^8 x + \sin^8 x)$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} \cos^8 x + \sin^8 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x \\ &= (\cos^4 x + \sin^4 x)^2 - 2 \cos^4 x \sin^4 x = 1 - 4 \cos^2 x \sin^2 x + 2 \cos^4 x \sin^4 x \\ &= (1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x)^2 - 2 \cos^4 x \sin^4 x = 1 - 4 \cos^2 x \sin^2 x + 2 \cos^4 x \sin^4 x. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } C = 2(1 - \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (1 - 4 \cos^2 x \sin^2 x + 2 \cos^4 x \sin^4 x).$$

$$C = 2(1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x \sin^4 x) - (1 - 4 \cos^2 x \sin^2 x + 2 \cos^4 x \sin^4 x) = 1.$$

Câu 27: Đơn giản biểu thức $A = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x}$

Lời giải



$$\text{Ta có: } A = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x} = \frac{-2 \cos x \cdot \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \cdot \cos x} = \frac{-2 \cos x \cdot \sin x \cos x}{\sin x (1 - \cos^2 x)} = \frac{-2 \cos^2 x}{\sin^2 x} = -2 \cot^2 x$$

Câu 28: Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Lời giải

Ta có:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

$$\text{Suy ra: } A = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1.$$

Câu 29: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$$

$$\text{Khi đó } A^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} \right)^2 = \frac{4}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos \alpha > 0 \text{ do đó } A = \frac{2}{\cos \alpha}$$

DẠNG 5: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Câu 30: Giá trị lớn nhất của $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$ bằng:

Lời giải

$$\text{Ta có } Q = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\text{Vì } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq Q \leq 1.$$

Nên giá trị lớn nhất là 1.

Câu 31: Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 7 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$ là.

Lời giải

$$M = 7(1 - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x = 7 - 9 \sin^2 x.$$

$$\text{Ta có: } 0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \geq -9 \sin^2 x \geq -9, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 7 \geq 7 - 9 \sin^2 x \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giá trị lớn nhất là 7.

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2$

Lời giải



$$\begin{aligned} P &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2 \cot^2 a \cdot \cot^2 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2 (\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2) + 6 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2 (\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2 \cot a \cdot \cot b \cdot \tan a \cdot \tan b) + 6 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2 (\cot a \cdot \cot b - \tan a \cdot \tan b)^2 + 6 \geq 6 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a \cdot \cot b = \tan a \cdot \tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a = b = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 33: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc x biết:

a. $\sin x = -\frac{3}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. b. $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

c. $\cos x = \frac{3}{5}$ với $0 < x < 90^\circ$. d. $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

Lời giải

a. Do $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$.

Từ đó với $\sin x = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4}{3} \end{cases}$.

b. Do $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$.

Từ đó với $\cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{15} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{15}} \end{cases}$.

c. Do $0 < x < 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$.



$$\text{Từ đó với } \cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{d. Do } 180^\circ < x < 270^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó với } \cos x = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\frac{12}{13} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{12}{5} \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

Câu 34: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc x biết

a) $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. b) $\cos x = \frac{4}{5}$ với $270^\circ < x < 360^\circ$.

c) $\sin x = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ d) $\sin x = -\frac{1}{3}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

Lời giải

$$\text{a) Do } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \\ \tan x < 0 \\ \cot x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó với } \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) Do } 270^\circ < x < 360^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \\ \tan x < 0 \\ \cot x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó với } \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) Do } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x < 0 \\ \cot x < 0 \end{cases}$$



$$\text{Từ đó với } \sin x = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{12}{13} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{5}{12} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\text{d) Do } 180^\circ < x < 270^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \\ \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó với } \sin x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 35: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc x biết

a) $\tan x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. b) $\tan x = -2$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

c) $\tan x = -\frac{1}{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ d) $\cot x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

a) $\tan x = 3 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{3}$

$$\tan x = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \sin^2 x = 9 \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x - 9(1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{10}.$$

$$\text{Vì } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \sin x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}; \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

b) $\tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$

$$\tan x = -2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \Rightarrow \sin^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x - 4(1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

c) $\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cot x = -2$

$$\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4 \sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow 4 \sin^2 x - 1(1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$



Do đó $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) $\cot x = 3 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$

$\tan x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 9\sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow 9\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{10}$.

Vì $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$

Do đó $\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Câu 36: Tính giá trị lượng giác của các biểu thức sau:

a) Cho $\tan x = -2$. Tính: $A_1 = \frac{5\cot x + 4\tan x}{5\cot x - 4\tan x}$, $A_2 = \frac{2\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$.

b) Cho $\cot x = \sqrt{2}$. Tính: $B_1 = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$, $B_2 = \frac{\sin x - 3\cos x}{\sin x + 3\cos x}$.

c) Cho $\cot x = 2$. Tính: $C_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$, $C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$.

d) Cho $\sin x = \frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính: $E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$.

e) Cho $\sin x = \frac{1}{5}$, $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính: $F = \frac{8\tan^2 x + 3\cot x - 1}{\tan x + \cot x}$.

Lời giải

a) $\tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{5\cot x + 4\tan x}{5\cot x - 4\tan x} = \frac{-\frac{5}{2} + 4 \cdot (-2)}{-\frac{5}{2} - 4 \cdot (-2)} = -\frac{21}{11}$

$\tan x = -2 \Rightarrow A_2 = \frac{2\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x} = \frac{2\tan x + 1}{1 - 3\tan x} = \frac{2 \cdot (-2) + 1}{1 - 3 \cdot (-2)} = -\frac{3}{7}$

b) $\cot x = \sqrt{2} \Rightarrow B_1 = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{3 - \cot x}{1 + \cot x} = \frac{3 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -5 + 4\sqrt{2}$

$\cot x = \sqrt{2} \Rightarrow B_2 = \frac{\sin x - 3\cos x}{\sin x + 3\cos x} = \frac{1 - 3\cot x}{1 + 3\cot x} = \frac{1 - 3\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} = \frac{-19 + 6\sqrt{2}}{17}$

c) $\cot x = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x} = \frac{2 + 3\cot x}{3 - 2\cot x} = \frac{2 + 3 \cdot 2}{3 - 2 \cdot 2} = -8$

$\cot x = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x} = \frac{2(1 + \cot^2 x)}{3\cot^2 x - \cot x} = \frac{2(1 + 2^2)}{3 \cdot 2^2 - 2} = 1$



$$d) 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}; \cot x = \frac{4}{3}.$$

$$\rightarrow E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{25}{7}.$$

$$e) \text{Ta có } 90^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}; \cot x = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } F = \frac{8 \tan^2 x + 3 \cot x - 1}{\tan x + \cot x} = \frac{8 \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 3 \cdot 2\sqrt{2} - 1}{-\frac{1}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}} = \frac{8}{3}.$$

Câu 37: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$. b) $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

c) $3 - 4 \sin^2 x = 4 \cos^2 x - 1$ d) $\sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x + \cos x$

Lời giải

a) Ta có $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$.

b) Ta có $2 \cos^2 x - 1 = 2(1 - \sin^2 x) - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.

c) Có $3 - 4 \sin^2 x = 3 - 4(1 - \cos^2 x) = 4 \cos^2 x - 1$.

d) Ta có $\sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x$.

Câu 38: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ b. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

c. $4 \cos^2 x - 3 = (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x)$ d. $(1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x$

Lời giải

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

b. $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

c. $(1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x) = 1 - 4 \sin^2 x = 1 - 4(1 - \cos^2 x) = 4 \cos^2 x - 3$

d. $(1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = (1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$



Câu 39: Chứng minh các đẳng thức sau:

- a. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x - 1$ b. $\sin^3 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^3 x = \sin x \cdot \cos x$
 c. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$ d. $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

Lời giải

a. $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = -\cos^2 x + \sin^2 x$

$$= -1 + \sin^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x - 1 = 2(1 - \cos^2 x) - 1 = 1 - 2\cos^2 x$$

b. $\sin^3 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^3 x = \sin x \cdot \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \cdot \cos x$

c. $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left| \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right| = \sin^2 x \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

d. $\cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left| \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right| = \cos^2 x \cdot \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

Câu 40: Chứng minh các đẳng thức sau:

- a. $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$ b. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
 c. $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$ d. $1 - \frac{1}{\cos x} \cdot 1 + \frac{1}{\cos x} + \tan^2 x = 0$

Lời giải

a. $\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$

b. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

c. $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan x}} = \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{\tan x}{1 + \tan x} = 1$

d. $1 - \frac{1}{\cos x} \cdot 1 + \frac{1}{\cos x} + \tan^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = 0$

Câu 41: Chứng minh các đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến x :

- a) $A = -\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x$.
 b) $B = \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x$.
 c) $B = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$

Lời giải



a) Ta có $-\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x$
 $= \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

b) Ta có $B = \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x$
 $= 1.(\sin^2 x) + \cos^2 x = 1.$

c) Ta có $B = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x$
 $= \cos^2 x.1 + \sin^2 x = 1.$

