



HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC



LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa hàm số lượng giác

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$ được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y = \sin x$.
Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.
- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$ được gọi là **hàm số cosin**, kí hiệu là $y = \cos x$.
Tập xác định của hàm số cosin là $\mathbb{R}$.
- Hàm số cho bằng công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là **hàm số tang**, kí hiệu là $y = \tan x$.
Tập xác định của hàm số tang là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Hàm số cho bằng công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là **hàm số cotang**, kí hiệu là $y = \cot x$.
Tập xác định của hàm số cotang là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D .

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng.



b) Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

i) $x + T \in D$ và $x - T \in D$;

ii) $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

3. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \sin x$

Hàm số $y = \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên đoạn $[-1; 1]$ và

Là hàm số lẻ vì: $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

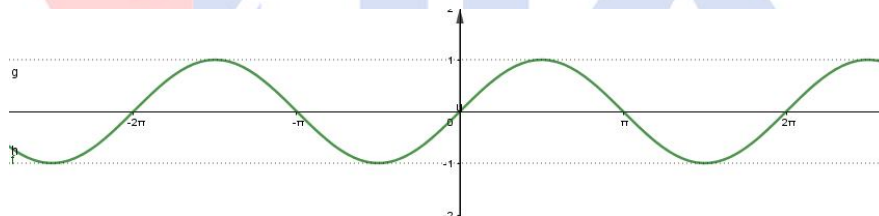
Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Đồ thị hàm số $y = \sin x$:



4. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cos x$

Hàm số $y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên đoạn $[-1; 1]$ và

Là hàm số chẵn vì: $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

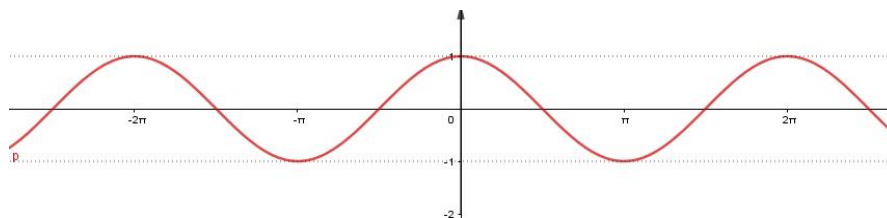
Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



5. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$

Hàm số $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ và

Là hàm số chẵn vì: $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

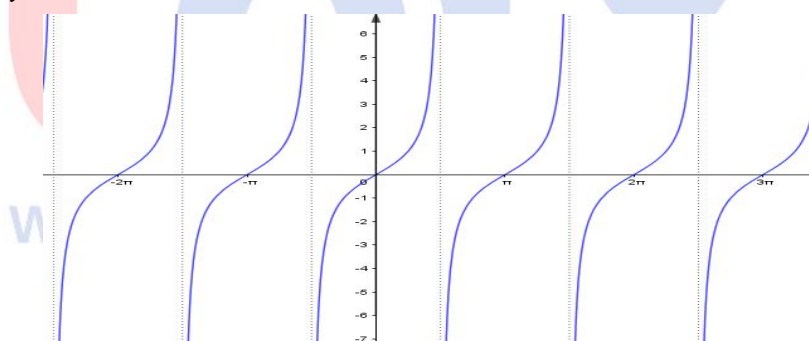
Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt:

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Đồ thị hàm số $y = \tan x$:



6. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ và

Là hàm số lẻ vì: $\cot(-x) = -\cot x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt:

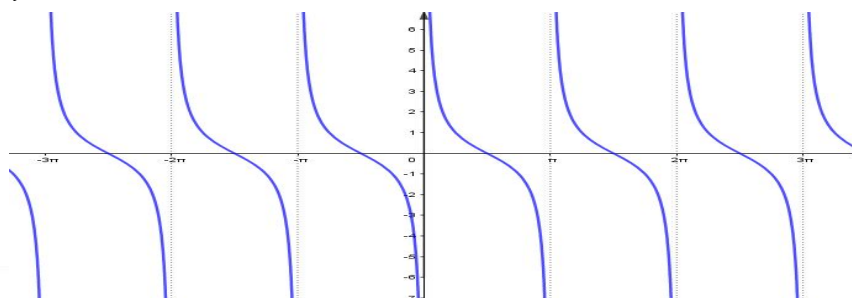
$$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Đồ thị hàm số $y = \cot x$:



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ



KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN.

Hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

PHƯƠNG PHÁP

+ Tìm điều kiện để hàm số có nghĩa

+ Giải ra điều kiện

+ Suy ra tập xác định của hàm số

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi:

+ $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lưu ý $Q(x) \neq 0$.

+ $y = f(x) = \sqrt[n]{Q(x)}$ thì $y = f(x)$ có nghĩa khi $Q(x) \geq 0$.

+ $y = f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}}$ lưu ý $Q(x) > 0$.

+ $y = \tan(u(x))$ xác định $\Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

+ $y = \cot(u(x))$ xác định $\Leftrightarrow u(x) \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$.



BÀI TẬP.

Câu 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan(x - \frac{\pi}{6})$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \cos(x - \frac{\pi}{6}) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 2: Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot^2(\frac{2\pi}{3} - 3x)$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \sin(\frac{2\pi}{3} - 3x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} - 3x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{9} - k\frac{\pi}{3}$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 3: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot(3x + \frac{\pi}{6})$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin(3x + \frac{\pi}{6}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \sin 4x - \cos 3x = \sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$



$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}; \frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \right\}.$$

Câu 5: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 + 2\cos x}$

Lời giải

hàm số xác định khi $3 + 2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{3}{2}$ (đúng $\forall x \in \mathbb{R}$), vì $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Câu 6: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{\pi^2}{2x-1}$

Lời giải

hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2x-1}$ xác định $\Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Tập xác định của hàm số

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Câu 7: Tìm tập xác định của hàm số $y = 3\cot(2x+3)$

Lời giải

$$y = 3\cot(2x+3) = \frac{3\cos(2x+3)}{\sin(2x+3)} \text{ hàm số xác định } \Leftrightarrow \sin(2x+3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tập xác định của hàm số } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 8: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

Lời giải

$$y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{-\cos 2x} = -\frac{\sin x}{\cos 2x} \text{ hàm số xác định } \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Tập xác định của hàm số } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 9: Tìm tập xác định của các hàm số sau



- a) $y = \sin x + \cos x$ b). $y = \sin \sqrt{x+4}$ c) $y = \frac{1 + \tan x}{\sin x}$ d). $y = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$
- e) $y = \cot \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$ f). $y = \sqrt{3 - 2 \cos x}$ g) $y = \frac{1 + \sin x}{\sqrt{\cos x}}$ h) $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$
- i) $y = \cot \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\tan 2x}{\sin x + 1}$ j) $y = \sqrt{5 + 2 \cot^2 x - \sin x} + \cot \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$

Lời giải

a) Ta có hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = \sin x + \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Điều kiện xác định của hàm số là

$$x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4. \text{ Vậy } D = [-4; +\infty).$$

c) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

e) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

f) Điều kiện xác định của hàm số là

$$3 - 2 \cos x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \leq 3 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{3}{2} \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Vậy tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R}.$$

g) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right); k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $D = \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right); k \in \mathbb{Z}.$

h) Điều kiện xác định của hàm số là



$$\sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow -\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

i) Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{-\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; \frac{-\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

j) Ta có điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} 5 + 2\cot^2 x - \sin x \geq 0 \quad (1) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \neq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ta có $5 + 2\cot^2 x - \sin x = (3 - \sin x) + 2(1 + \cot^2 x) = (3 - \sin x) + \frac{2}{\sin^2 x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}.$

$$(2) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{-\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 10: Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}.$

a) $y = \sqrt{2m - 3\cos x}$ b) $y = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + m - 1}}$

Lời giải

a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi:

$$2m - 3\cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3\cos x \leq 2m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m}{3} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}.$$

b) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi:

$$\sin^2 x - 2\sin x + m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > -\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 2 - (\sin x - 1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m > \max_{(-\infty; +\infty)} (-\sin^2 x + 2\sin x + 1) = 2 \Leftrightarrow m > 2.$$



Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{5 - m \sin x - (m+1) \cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ

khi: $5 - m \sin x - (m+1) \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \sin x + (m+1) \cos x \leq 5, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \sin x + \frac{m+1}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \cos x \leq \frac{5}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) \leq \frac{5}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{2m^2 + 2m + 1}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 2m + 1} \leq 5.$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 3. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

DẠNG 2. XÉT TÍNH CHẴN LẺ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

- Hàm số f được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D , ta có $-x$ cũng thuộc D và $f(-x) = f(x)$.

- Hàm số f được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D , ta có $-x$ cũng thuộc D và $f(-x) = -f(x)$.

Phương pháp giải

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:

Nếu D là tập đối xứng (tức là $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), ta thực hiện tiếp bước 2.

Nếu D không phải là tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$, khi đó:

Nếu $f(-x) = f(x)$ kết luận hàm số là hàm chẵn.

Nếu $f(-x) = -f(x)$ kết luận hàm số là hàm lẻ.

Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Chú ý: Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

1. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.



2. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn

3. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

4. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

*** Lưu ý: Một số công thức liên quan đến việc xử lý dấu “ - ”**

1. Công thức hai cung đối nhau:

$$\sin(-x) = -\sin x; \cos(-x) = \cos x; \tan(-x) = -\tan x; \cot(-x) = -\cot x$$

$$2. |-x| = |x|$$

$$3. (-x)^n = x^n \text{ khi } n \text{ chẵn và } (-x)^n = -x^n \text{ khi } n \text{ lẻ.}$$



BÀI TẬP.

Câu 12: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = 2x \sin x$

b) $y = \cos x + \sin 2x$.

c) $y = \frac{\cos 2x}{x}$.

d) $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1).

Đặt $y = f(x) = 2x \sin x$.

NX: $\forall x \in D, f(-x) = 2(-x) \sin(-x) = 2x \sin x = f(x)$ (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Đặt $y = f(x) = \cos x + \sin 2x$.

Xét $x = \frac{\pi}{3} \in D \Rightarrow -x = -\frac{\pi}{3} \in D$.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta thấy $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm số chẵn

Và $-f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm số lẻ.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Đặt $y = f(x) = \frac{\cos 2x}{x}$.

Ta có $\forall x \in D: f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{-x} = -\frac{\cos(2x)}{x} = -f(x)$.



Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Đặt $y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$.

Ta có $\forall x \in D: f(-x) = \tan^7(-2x) \sin(-5x) = \tan^7(2x) \sin(5x) = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chú ý: Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

Với câu a) Chứng minh đồ thị hàm số $y = 2x \sin x$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

Với câu c) Chứng minh đồ thị hàm số $y = \frac{\cos 2x}{x}$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Câu 13: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = \tan x + \cot x$ b) $y = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$ c) $y = \frac{\sin^{2020n}(x) + 2020}{\cos(x)}, n \in \mathbb{Z}$

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $\forall x \in D: f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

NX: $f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x)$.

Ta có $\forall x \in D: f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

+ NX: $\sin^{2020n}(-x) = (-\sin x)^{2020n} = \sin^{2020n}(x), \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Do đó $\forall x \in D: f(-x) = \frac{\sin^{2020n}(-x) + 2020}{\cos(-x)} = \frac{\sin^{2020n}(x) + 2020}{\cos(x)} = f(x)$.

Suy ra hàm số là hàm số chẵn $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

+ Với $n = 0$ thì $\sin^{2020n}(x) = 1$. Do đó $\forall x \in D: f(-x) = \frac{2021}{\cos(-x)} = \frac{2021}{\cos(x)} = f(x)$.

Suy ra hàm số là hàm số chẵn với $n = 0$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Câu 14: Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm chẵn.

Lời giải



- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

- Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.

$$\Leftrightarrow 3m \sin(-4x) + \cos(-2x) = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow -3m \sin(4x) + \cos(2x) = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow 6m \sin(4x) = 0, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow m = 0.$$

DẠNG 3: TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ



1 KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

$$x - T \in D \text{ và } x + T \in D.$$

$$f(x + T) = f(x).$$

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kỳ hàm số tuần hoàn đó.

Người ta chứng minh được rằng hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$; hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$; hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$; Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Chú ý:

Sử dụng định nghĩa hàm số tuần hoàn và tìm chu kỳ của nó.

Sử dụng các kết quả sau:

- Hàm số $y = A \cdot \sin(ax + b)$ ($A, a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số $y = A \cdot \cos(ax + b)$ ($A, a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số $y = A \cdot \tan(ax + b)$ ($A, a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$

- Hàm số $y = A \cdot \cot(ax + b)$ ($A, a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kỳ lần lượt là $T_1, T_2, \dots, T_n$ thì hàm số f có chu kỳ T là bội chung nhỏ nhất của $T_1, T_2, \dots, T_n$.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T thì hàm số $y = f(x) + c$ (c là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kỳ T .



Một số dấu hiệu nhận biết hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm:

- + Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.
- + Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$.
- + Phương trình $f(x) = k$ có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.
- + Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự:

$$\dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

$$\text{mà } |x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0 \text{ hay } \infty.$$

2 BÀI TẬP.

Câu 15: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y = \cos^2 x - 1$.

Lời giải

Ta biến đổi: $y = \cos^2 x - 1 = \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$.

Do đó f là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Câu 16: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

Lời giải

Ta biến đổi: $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$.

Do đó f là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5\pi}{2}$.

Câu 17: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Lời giải

Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn $\Rightarrow$ có số thực dương T thỏa :

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(x+T) + \cos \sqrt{3}(x+T) = \cos x + \cos \sqrt{3}x$$

$$x = 0 \Rightarrow \cos T + \cos \sqrt{3}T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos \sqrt{3}T = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 2n\pi \\ \sqrt{3}T = 2m\pi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} \text{ vô lí, do}$$

$m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n}$ là số hữu tỉ. Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

Câu 18: Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì của nó: $y = \frac{1}{\sin x}$.

Lời giải



Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ta xét đẳng thức $f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \sin(x+T) = \sin x$.

Chọn $x = \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x = 1$ và do đó $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Số dương nhỏ nhất trong các số T là 2π .

Rõ ràng $\forall x \in D, x + k2\pi \in D, x + k2\pi \in D$ và $f(x + k2\pi) = \frac{1}{\sin(x + k2\pi)} = \frac{1}{\sin x} = f(x)$

Vậy f là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Câu 19: Cho a, b, c, d là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = a \sin cx + b \cos dx$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{c}{d}$ là số hữu tỉ.

Lời giải

* Giả sử $f(x)$ là hàm số tuần hoàn $\Rightarrow \exists T > 0: f(x+T) = f(x) \quad \forall x$

Cho $x = 0, x = -T \Rightarrow \begin{cases} a \sin cT + b \cos dT = b \\ -a \sin cT + b \cos dT = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos dT = 1 \\ \sin cT = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} dT = 2n\pi \\ cT = m\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{m}{2n} \in \mathbb{Q}$.

* Giả sử $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: \frac{c}{d} = \frac{k}{l}$. Đặt $T = \frac{2\pi k}{c} = \frac{2l\pi}{d}$

Ta có: $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi k}{c} = \frac{2l\pi}{d}$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là T_1, T_2 . Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ thì các hàm số $f(x) \pm g(x); f(x).g(x)$ là những hàm số tuần hoàn.

Lời giải

Vì $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ nên tồn tại hai số nguyên $m, n; n \neq 0$ sao cho

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_1 = mT_2 = T$$

Khi đó $f(x+T) = f(x+nT_1) = f(x)$ và $g(x+T) = g(x+mT_2) = g(x)$

Suy ra $f(x+T) \pm g(x+T) = f(x) \pm g(x)$ và $f(x+T).g(x+T) = f(x).g(x), \frac{f(x+T)}{g(x+T)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.



Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 21: Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = 1 - \sin 5x$. b) $y = \cos^2 x - 1$.

b) c) $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$. d) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Lời giải

Ta có hàm số $y = k \sin(ax + b) + c$; $y = k \cos(ax + b) + c$ là hàm số tuần hoàn và có chu

$$\text{kỳ } T = \frac{2\pi}{|a|}$$

a. Hàm số $y = 1 - \sin 5x$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{5}$.

b. Hàm số $y = \cos^2 x - 1 = \frac{\cos 2x - 1}{2}$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_2 = \pi$.

c. Hàm số $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_2 = \frac{5\pi}{2}$.

d. Hàm số $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$ không tuần hoàn

Vì ta có hàm số $y = \cos x$ có chu kỳ $T_1 = 2\pi$ và hàm số $y = \cos(\sqrt{3}x)$ có chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ nhưng không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của $T_1 = 2\pi$ và $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Câu 22: Tìm chu kỳ của hàm số: $f(x) = \sin 3x + 3 \cos 2x$.

Lời giải

Ta có hàm số $y = \sin 3x$ có chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ và hàm số $y = \cos 2x$ có chu kỳ $T_2 = \pi$

$\Rightarrow$ chu kỳ T của hàm số $y = \sin 3x + 3 \cos 2x$ là bội chung nhỏ nhất của $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ và $T_2 = \pi$

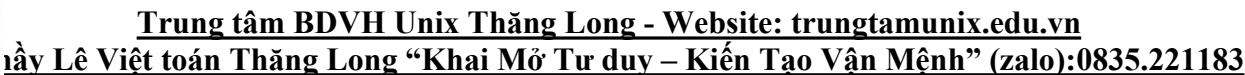
$\Rightarrow T = 2\pi$.

DẠNG 4: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



2 BÀI TẬP.

BÀI TẬP.

a. $y = 2 + 3 \cos x$.

b. $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$.

c. $y = \sqrt{4 \cos^2 2x + 1}$.

d. $y = 3 - 2|\sin x|$.

e. $y = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 3$ **f.** $y = 3 \sin 2x - 12$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$.

$$\mathbf{g}.y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) - 7 \text{ v\u00f3i } x \in [0; \pi].$$

Lời giải

a. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 2 + 3 \cos x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq y \leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $5 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \leq 1 \Rightarrow -5 \leq y \leq 1.$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-5 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

c. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $0 \leq \cos^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 4 \cos^2 2x + 1 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq \sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{5} \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

d. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.



Ta có: $0 \leq |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -2|\sin x| \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq y \geq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $3 \Leftrightarrow |\sin x| = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $1 \Leftrightarrow |\sin x| = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

e. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 3 = 2(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) + 3 = 5 - \sin^2 2x$$

Ta có: $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 5 - \sin^2 2x \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $5 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $4 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{f. Với } x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right] \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 12 \leq y \leq -9.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số với $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$ là $-9 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số với $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$ là $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 12 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8}$.

$$\text{g. Ta có } y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) - 7 = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 5$$

$$\text{Với } x \in [0; \pi] \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} - 5 \leq y \leq -3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số với $x \in [0; \pi]$ là $-3 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số với $x \in [0; \pi]$ là $-\sqrt{3} - 5 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pi$.



Câu 24: Tìm GTLN – GTNN của các hàm số sau:

a. $y = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$

b. $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

c. $y = \cos x + 2\cos 2x$

d. $y = (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + 1$

e. $y = 2\sin^2 x - \sin x + 2$ trên đoạn $[0; \pi]$

f. $y = 2\cos x + \cos 2x - 8$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

g. $y = \tan^2 x - \tan x + 1$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

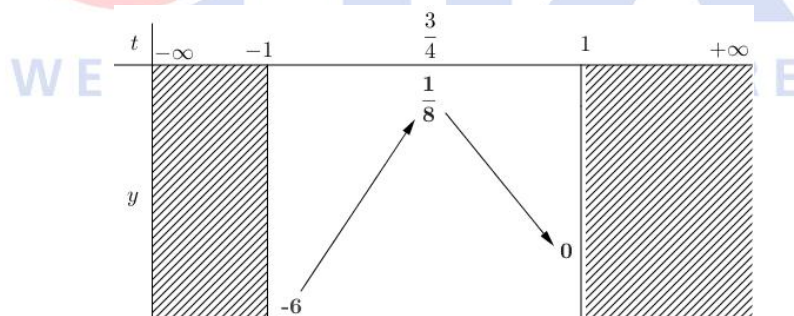
h. $y = \sin x + \cos x + 4\sin x \cos x + 7$.

i. Tìm min của hàm số: $y = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - \sin x - \frac{1}{\sin x}$ với $0 < x < \pi$.

Lời giải

a. Đặt $\sin x = t$ ($|t| \leq 1$), hàm số có dạng: $y = -2t^2 + 3t - 1$.

Xét hàm số $y = -2t^2 + 3t - 1$ trên $[-1; 1]$, hàm số có BBT như sau:



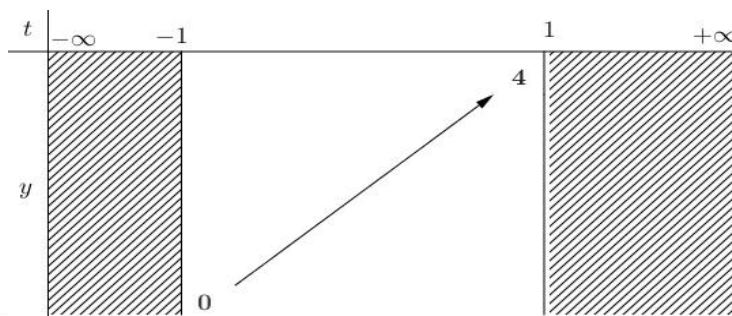
Nhìn vào BBT ta thấy:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -6 khi và chỉ khi $t = -1$ tức là $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{1}{8}$ khi và chỉ khi $t = \frac{3}{4}$ tức là $\sin x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k2\pi$ hoặc $x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b. Hàm số được viết lại thành $y = 1 - \sin^2 x + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3$

Đặt $t = \sin x$ ($|t| \leq 1$), xét hàm số $y = -t^2 + 2t + 3$ trên $[-1; 1]$ có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:

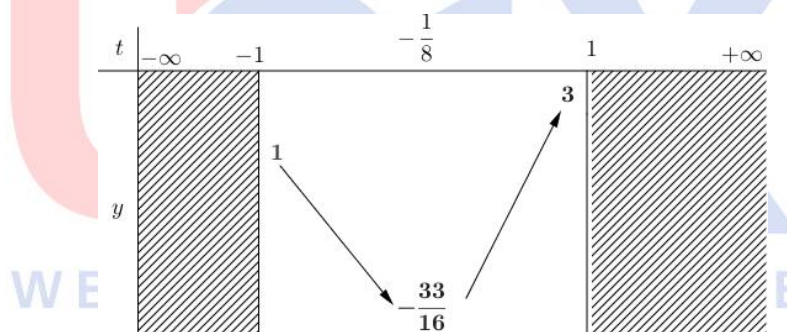
Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 khi và chỉ khi $t = -1$ tức $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4 khi và chỉ khi $t = 1$ tức là $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c. Ta có $y = \cos x + 2.(2\cos^2 x - 1) = 4\cos^2 x + \cos x - 2$

Đặt $\cos x = t (|t| \leq 1)$, hàm số có dạng: $y = 4t^2 + t - 2$.

Xét hàm số $y = 4t^2 + t - 2$ trên $[-1; 1]$ có BBT như sau:



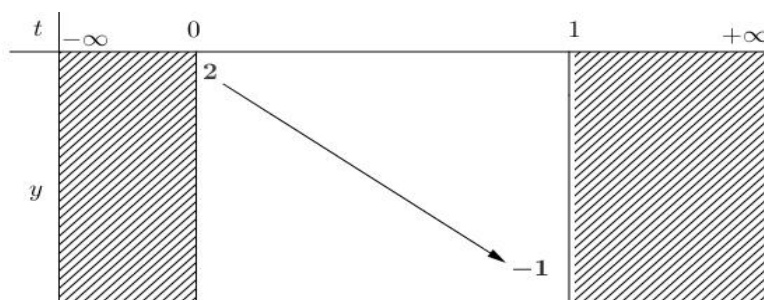
Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{33}{16}$ khi và chỉ khi $t = -\frac{1}{8}$ tức $\cos x = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{8}\right) + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 khi và chỉ khi $t = 1$ tức là $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d. Hàm số được viết lại thành

$$y = (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + 1 = (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) - 2\cos^2 x + 1 = \cos^4 x - 4\cos^2 x + 2$$

Đặt $t = \cos^2 x, t \in [0; 1]$, xét hàm số $y = t^2 - 4t + 2$ trên $[0; 1]$ có BBT như sau:



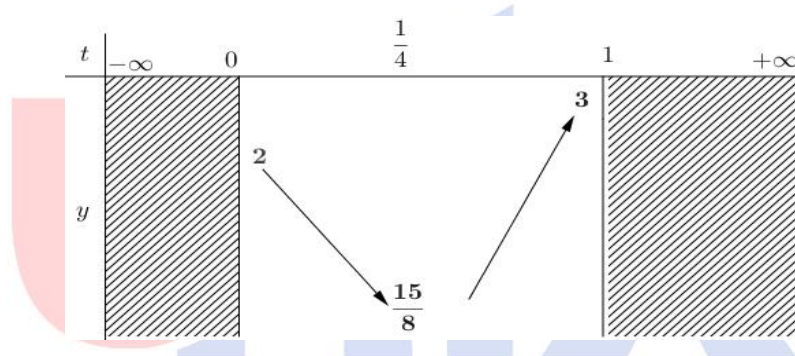
Nhìn vào BBT ta thấy:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 khi và chỉ khi $t=1$ tức $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 khi và chỉ khi $t=0$ tức là $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e.Đặt $\sin x = t$ với $x \in [0; \pi]$ thì $t \in [0; 1]$, hàm số có dạng: $y = 2t^2 - t + 2$.

Xét hàm số $y = 2t^2 - t + 2$ trên $[0; 1]$, hàm số có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{15}{8}$ khi và chỉ khi $t = \frac{1}{4}$ tức là $\sin x = \frac{1}{4}$

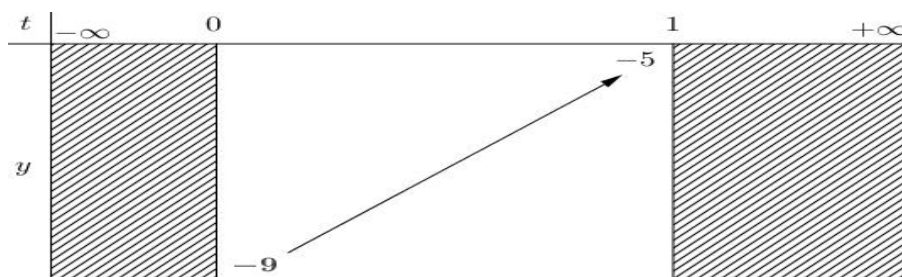
$\Leftrightarrow x = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi$ hoặc $x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 khi và chỉ khi $t=1$ tức là $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f.Hàm số được viết lại thành $y = 2\cos x + 2\cos^2 x - 1 - 8 = 2\cos^2 x + 2\cos x - 9$

Đặt $\cos x = t$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ thì $t \in [0; 1]$, hàm số có dạng: $y = 2t^2 + 2t - 9$.

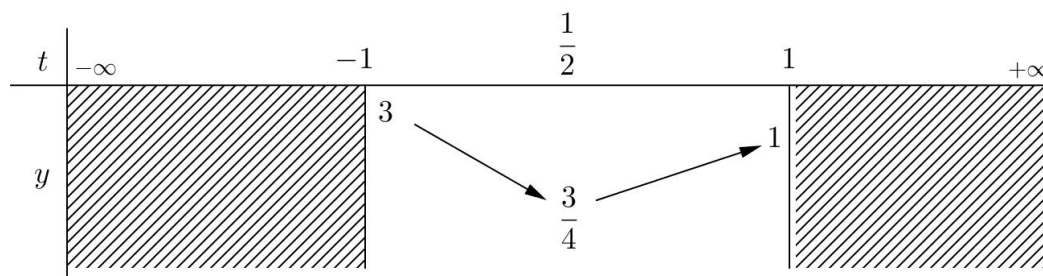
Xét hàm số $y = 2t^2 + 2t - 9$ trên $[0; 1]$ có BBT như sau:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -9 khi và chỉ khi $t=0$ tức $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng -5 khi và chỉ khi $t=1$ tức là $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 g. Đặt $\tan x = t$, $t \in [-1; 1]$, hàm số có dạng: $y = t^2 - t + 1$.

Xét hàm số $y = t^2 - t + 1$ trên $[-1; 1]$ có BBT như sau:



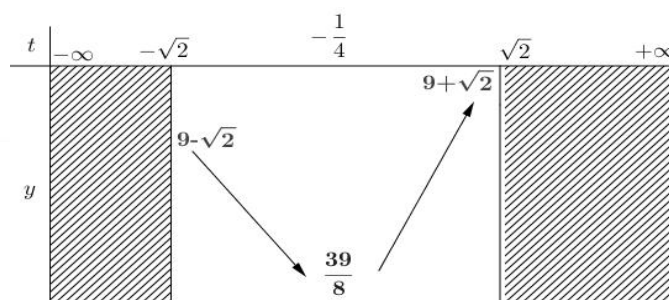
Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{3}{4}$ khi và chỉ khi $t = \frac{1}{2}$ tức $\tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 khi và chỉ khi $t = -1$ tức là $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

h. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($|t| \leq \sqrt{2}$) $\Rightarrow 2 \sin x \cos x = t^2 - 1$, hàm số trở thành:

$$y = t + 2(t^2 - 1) + 7 = 2t^2 + t + 5.$$

Xét hàm số $y = 2t^2 + t + 5$ trên $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ có BBT như sau:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{39}{8}$.

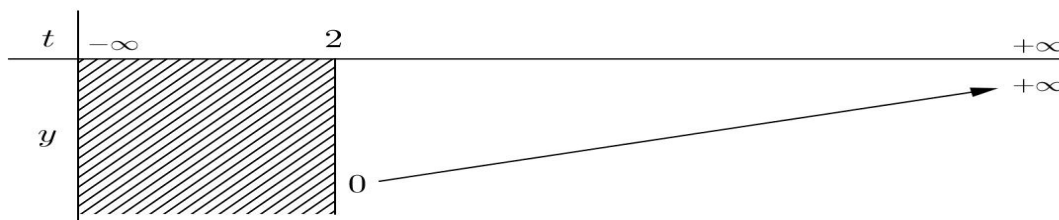


Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $9 + \sqrt{2}$.

i. Đặt $t = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, với $0 < x < \pi$ thì $t \geq 2 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = t^2 - 2$, hàm số trở thành:

$$y = t^2 - t - 2.$$

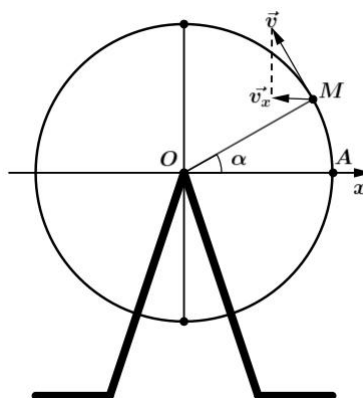
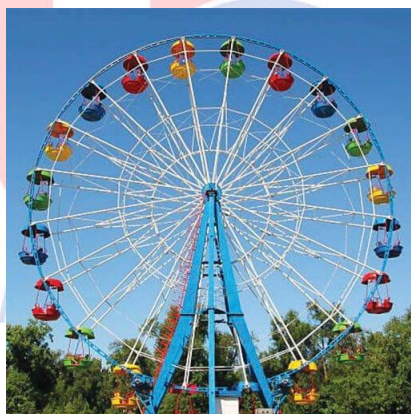
Xét hàm số $y = t^2 - t - 2$ trên $[2; +\infty)$ có BBT như sau:



Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $0 \Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{\sin x} = 2 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TẾ

Câu 25: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s).



- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
- Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

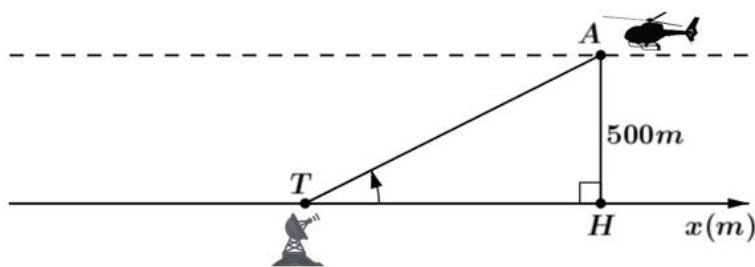
Lời giải

a) Do $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ nên $-0,3 \leq \sin \alpha \leq 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3$ (m) và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3$ (m).

b) Dựa vào đồ thị hàm số $\sin$, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$); v_x tăng khi $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

Câu 26: Trong hình dưới đây, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H và α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot \alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \cot \alpha < \sqrt{3}$. Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$.

Câu 27: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $\forall \alpha$ nên ta có: $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12 \leq 3 \cdot 1 + 12 = 15$.

Suy ra $d(t)_{\max} = 15$ đạt được khi $\sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
 $\Leftrightarrow t = 171 + 364k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $0 < t \leq 365$ nên ta có: $0 < 171 + 364k \leq 365 \Rightarrow \frac{-171}{364} < k \leq \frac{194}{364}$ do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$.

Vậy vào ngày thứ 171 trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất.

Câu 28: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Ta có: $\sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] \geq -1 \quad \forall t \Rightarrow d(t) \geq 3 \cdot (-1) + 12 = 9$. Dấu "=" xảy ra khi:

$\sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t-80 = -91 + 364k \Leftrightarrow t = -11 + 364k$

Mà $0 < t \leq 365 \Rightarrow 0 < -11 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} < k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 353$.

Vậy thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất vào ngày 353 trong năm.



Câu 29: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi t bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mực nước của kênh cao nhất khi độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất.

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\max h = 15 \text{ khi } \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 16k.$$

$$\text{Trong 1 ngày có 24 giờ nên } 0 \leq -2 + 16k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{26}{16}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1 \Rightarrow t = 14$ giờ.

