



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

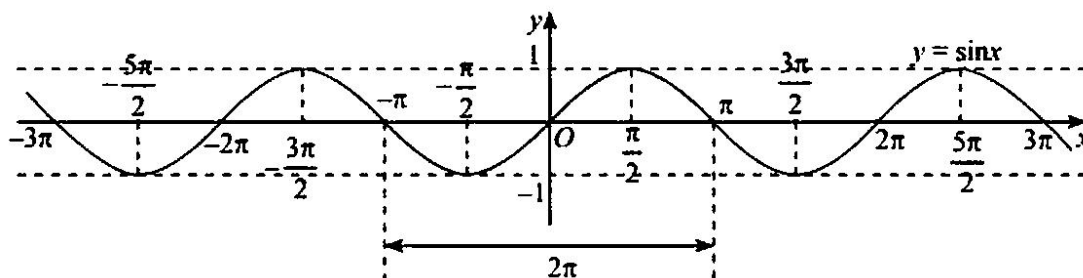
## BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC



### HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Hình bên vẽ đồ thị  $y = \sin x$ .

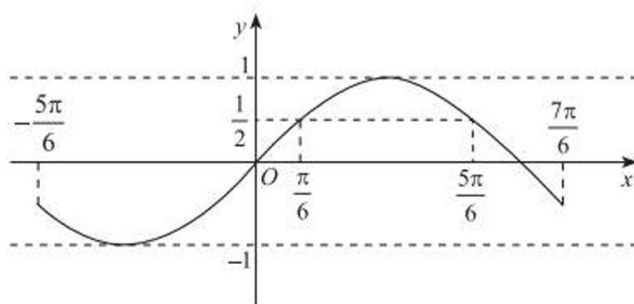


- a) Hàm số trên là hàm số chẵn, đối xứng qua trục  $Oy$ .
- b) Hàm số trên tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ .
- c) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$ .
- d) Trong khoảng từ  $-\frac{5\pi}{6}$  đến  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\sin x \geq \frac{1}{2}$  khi và chỉ khi  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ .

**Lời giải**

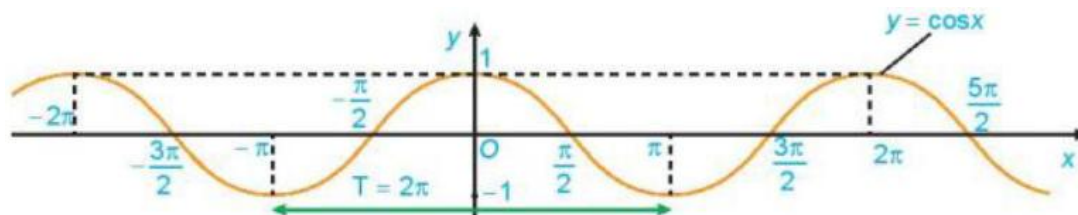
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|
|--------|---------|--------|---------|

- a) Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ  $O$ , nên mệnh đề a) sai.
- b) Hàm số  $y = \sin x, y = \cos x$  tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ . Hàm số  $y = \tan x, y = \cot x$  tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ . Do đó mệnh đề b) đúng.
- c) Trên khoảng  $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$  đồ thị có chiều hướng đi lên, nên hàm số đồng biến. Vậy mệnh đề c) nghịch biến là sai.
- d) Xét hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ .



Ta thấy  $\sin x \geq \frac{1}{2}$  khi và chỉ khi  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ . Vậy d) đúng.

**Câu 2:** Đường cong trong hình dưới là đồ thị hàm số  $y = \cos x$ .



a) Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

b) Hàm số  $y = \cos x$  nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

c) Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

d) Hàm số  $y = \cos x$  nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Lời giải**

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|--------|---------|---------|

a) Sai: Khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  chứa khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số  $y = \cos x$ .

b) Sai: Khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  chứa khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số  $y = \cos x$ .

c) Đúng: Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

d) Đúng: Hàm số  $y = \cos x$  nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = \sin x$ .

a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .

b) Trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  hàm số đồng biến.

c) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .

d) Trên đoạn  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$  giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



### Lời giải

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| a) Đ | b) Đ | c) S | d) S |
|------|------|------|------|

Giải chi tiết:

a) Đúng.

Hàm số  $y = \sin x$  xác định với mọi giá trị  $x \in \mathbb{R}$  nên có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

b) Đúng.

$\forall x_1, x_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); x_1 < x_2$  thì  $\sin x_1 < \sin x_2$  nên hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

c) Sai.

Ta có:  $\sin x = \sin(x + 2\pi), \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ .

d) Sai.

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$  thì  $\sin x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

Nên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1.

Dấu "=" xảy ra khi  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ , vì  $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$ .

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x) = 2\cos x + 3$ .

a) Tập xác định của hàm số trên là  $\mathbb{R}$ .

b) Hàm số trên là hàm số chẵn.

c) Tập giá trị của hàm số trên là  $[-1; 5]$ .

d) Đồ thị hàm số trên cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

### Lời giải

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|

a) Tập xác định của hàm số trên là  $\mathbb{R}$ . Mệnh đề đúng.

b) Hàm số trên là hàm số chẵn. Mệnh đề đúng.

Vì  $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = 2\cos(-x) + 3 = f(x) \end{cases}$

c) Tập giá trị của hàm số trên là  $[-1; 5]$ . Mệnh đề sai.

Thật vậy, vì  $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  nên  $1 \leq 2\cos x + 3 \leq 5$  hay  $1 \leq y \leq 5$ .

d) Đồ thị hàm số trên cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Mệnh đề sai.

Gọi  $M$  là giao điểm của đồ thị hàm số  $f(x) = 2\cos x + 3$  và  $Oy$ .

$M \in Oy \Rightarrow x_M = 0$ .

$M$  thuộc đồ thị hàm số nên  $y_M = f(x_M) = 2\cos 0 + 3 = 5$ .

Vậy đồ thị hàm số trên cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5.

**Câu 5:** Cho hàm số  $y = f(x) = \cos 2x + \cos x$ .

a) Tập xác định của hàm số trên là  $\mathbb{R}$ .

b) Hàm số trên là hàm số chẵn.



- c) Đặt  $t = \cos x$  thì hàm số trở thành  $y = 2t^2 + t - 1$ .  
 d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0.

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|
|---------|---------|---------|--------|

- a) Tập xác định của hàm số trên là  $\mathbb{R}$ . Mệnh đề đúng.  
 b) Hàm số trên là hàm số chẵn. Mệnh đề đúng.

Vì  $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = \cos(-2x) + \cos(-x) = f(x) \end{cases}$

- c) Đặt  $t = \cos x$  thì hàm số trở thành  $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$ . Mệnh đề đúng.

Ta có  $y = \cos 2x + \cos x$ .

$$y = \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1.$$

Đặt:  $t = \cos x, t \in [-1; 1]$ .

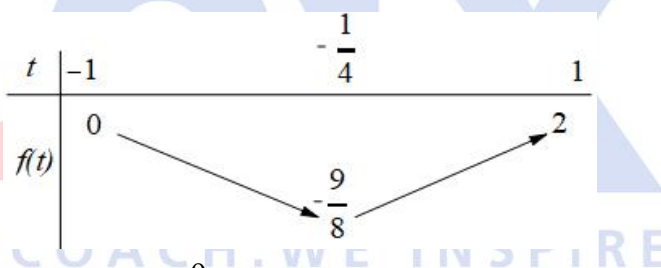
$$f(t) = 2t^2 + t - 1.$$

- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0. Mệnh đề sai.

Với hàm số  $f(t) = 2t^2 + t - 1$  ở câu c:

Đồ thị của hàm số  $f$  là parabol có đỉnh  $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$ .

BBT:



Dựa vào BBT ta có:  $m = \min_{[-1; 1]} f(t) = -\frac{9}{8}$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = \cos x - \sin x$ .

- a) Tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R}$ .  
 b) Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ  $T = \pi$ .  
 c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là  $\min_{\mathbb{R}} y = -2$ .  
 d) Phương trình  $y + 1 = 0$  có tất cả 4 nghiệm trên đoạn  $[-2\pi; 2\pi]$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|
|---------|--------|--------|---------|

- a) Tập xác định của hàm số  $y = \sin x, y = \cos x$  đều là  $D = \mathbb{R}$ , nên tập xác định của hàm số  $y = \cos x - \sin x$  là  $D = \mathbb{R}$ .

- b) Ta có  $y = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi.$$



c) Vì tập giá trị của hàm số  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  là đoạn  $[-1; 1]$ , suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ là } \min_{\mathbb{R}} y = -\sqrt{2}.$$

d) Phương trình

$$y + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases}$$

Trên đoạn  $[-2\pi; 2\pi]$ , ta tìm được 4 nghiệm là  $\left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; -\pi; \pi\right\}$ .

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ .

- a) Hàm số có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .
- b) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = 12\pi$ .
- c) Hàm số là hàm số lẻ.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 13.

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|
|---------|--------|--------|---------|

a) Hàm số  $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$  nên mệnh đề đúng.

b) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ . Nên mệnh đề b sai.

c) Ta có  $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2 \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Với  $\forall x \in D$  thì  $-x \in D$ .

Ta có  $y(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$ .

$$y(-x) = 2 \cos\left(\frac{\pi(-x)}{6}\right) + 11 = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11.$$

Vậy  $y(x) = y(-x)$  nên hàm số  $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$  là hàm số chẵn. Nên mệnh đề c sai.

d) Ta có  $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2 \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

$$\text{Nên } -2 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 9 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11 \leq 13 \Leftrightarrow 9 \leq y \leq 13.$$

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 13 do đó mệnh đề d đúng.

**Câu 8:** Cho hàm số  $y = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

- a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$



b) Rút gọn biểu thức ta được  $y = \sin 2x$

c) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$

d) Nếu  $\sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}$  thì giá trị biểu thức  $P = \frac{2 \tan 2x + \cot 2x}{4 \tan 2x - 3 \cot 2x}$  là  $\frac{5}{14}$

### Lời giải

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|
|---------|--------|---------|--------|

a) Hàm số có tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$  nên mệnh đề đúng

b) Ta có

$$y = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) - \cos 2x = -\sin 2x$$

Mệnh đề đã cho sai.

c) Ta có

$$y = f(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) - \cos 2x = -\sin 2x$$

+ Tập xác định  $D = \mathbb{R}$

+ Ta có:

i)  $x + \pi \in D$  và  $x - \pi \in D, \forall x \in D$

ii)  $f(x + \pi) = -\sin 2(x + \pi) = -\sin 2x = f(x), \forall x \in D$

Vậy hàm số  $y = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x$  là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .

Mệnh đề đã cho đúng.

d) Ta có  $\sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin 2x = -\frac{1}{3}$

$$P = \frac{2 \tan 2x + \cot 2x}{4 \tan 2x - 3 \cot 2x} = \frac{2 \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{4 \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 3 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \frac{2 \sin^2 2x + \cos^2 2x}{4 \sin^2 2x - 3 \cos^2 2x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{9}}{4 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{8}{9}} = -\frac{1}{2}$$

Mệnh đề đã cho sai.

**Câu 9:** Giả sử vận tốc  $v$  (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kỳ hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức  $v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3}$ , trong đó  $t$  là thời gian (tính bằng giây).

a) Vận tốc của luồng khí tại giây thứ ba là 0 lít/giây.

b) Thời gian của một chu kỳ hô hấp đầy đủ là 3 giây.

c) Số chu kỳ hô hấp trong một phút của người đó là 10.

d) Thời điểm lần đầu vận tốc của luồng khí đạt giá trị lớn nhất là  $t = 0,5$  giây.

### Lời giải

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|
|---------|--------|---------|--------|

Vận tốc của luồng khí tại giây thứ ba là  $v = 0,85 \sin \frac{\pi \cdot 3}{3} = 0$  lít/giây.



Hàm số  $v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3}$  tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ .

Số chu kì hô hấp trong một phút (60 giây) của người đó là  $60 : 6 = 10$ .

Thời điểm lần đầu vận tốc của luồng khí đạt giá trị lớn nhất là  $t = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{3} = 1,5$  giây.

- a) Đúng: Vận tốc của luồng khí tại giây thứ ba là 0 lít/giây.  
 b) Sai: Thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ là 6 giây.  
 c) Đúng: Số chu kì hô hấp trong một phút của người đó là 10.  
 d) Sai: Thời điểm lần đầu vận tốc của luồng khí đạt giá trị lớn nhất là  $t = 1,5$  giây.

**Câu 10:** Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hóa bởi hàm số  $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$ , trong đó  $h(t)$  là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t$  giây.

- a) Độ cao trên mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t = 5$  giây là 0 cm .  
 b) Chu kì của sóng là 20 (giây).  
 c) Chiều cao của sóng (khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng) là 90 cm .  
 d) Số lần xuất hiện đỉnh sóng trong một phút là 3.

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|
|---------|---------|--------|---------|

Độ cao trên mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t = 5$  giây là  $h(5) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  cm .

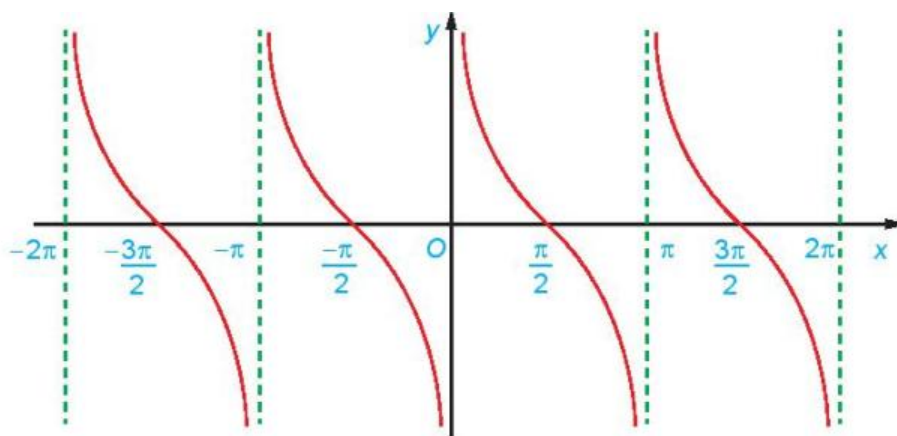
Hàm số  $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$  tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$  nên chu kì của sóng là 20 giây.

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$  lần lượt là 90 và -90 nên chiều cao của sóng là  $90 - (-90) = 180$  cm .

Số lần xuất hiện đỉnh sóng trong một phút (60 giây) là  $60 : 20 = 3$ .

- a) Đúng: Độ cao trên mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t = 5$  giây là 0 cm .  
 b) Đúng: Chu kì của sóng là 20 (giây).  
 c) Sai: Chiều cao của sóng là 180 cm .  
 d) Đúng: Số lần xuất hiện đỉnh sóng trong một phút là 3.

**Câu 11:** Đường cong trong hình dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số:  $y = \sin x$  ,  $y = \cos x$  ,  $y = \tan x$  ,  $y = \cot x$  .



- a) Đường cong trong hình trên là đồ thị của hàm số  $y = \tan x$ .
- b) Tập xác định của hàm số đó là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- c) Các giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  để hàm số đó nhận giá trị bằng 0 là  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- d) Các giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  để hàm số đó nhận giá trị dương là  $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

### Lời giải

Đường cong trong hình trên là đồ thị của hàm số  $y = \cot x$ .

Hàm số  $y = \cot x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Các giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  để hàm số  $y = \cot x$  nhận giá trị bằng 0 là  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Các giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  để hàm số  $y = \cot x$  nhận giá trị dương là  $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

- a) Sai: Đường cong trong hình trên là đồ thị của hàm số  $y = \cot x$ .
- b) Đúng: Hàm số  $y = \cot x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- c) Sai: Các giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  để hàm số  $y = \cot x$  nhận giá trị bằng 0 là  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- d) Đúng: Các giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  để hàm số  $y = \cot x$  nhận giá trị dương là  $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $f(x) = \tan 2x - 1$ .

- a) Giá trị của hàm số tại  $x = \frac{\pi}{8}$  bằng 0



- b) Giá trị của hàm số tại  $x = \frac{\pi}{3}$  bằng  $-\sqrt{3} - 1$   
 c) Có ba giá trị  $x$  thuộc  $[0; \pi]$  khi hàm số đạt giá trị bằng  $-2$ .  
 d) Hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

a) b) Ta có:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\sqrt{3} - 1$$

c) Ta có:  $f(x) = -2 \Leftrightarrow \tan 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow \tan 2x = -1$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in [0; \pi]$  nên  $x \in \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right\}$  (khi đó  $k = 1; k = 2$ ).

d) Tập xác định hàm số là:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

Với mọi  $x \in D$ , ta có:  $x \pm \frac{\pi}{2} \in D$  và

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \tan(2x + \pi) - 1 = \tan 2x - 1 = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

**Câu 13:** Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t$  (giây) của mỗi con sóng được cho bởi hàm số  $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$ , trong đó  $h(t)$  được tính bằng centimet.

- a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng  $69,3(cm)$   
 b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng  $75(cm)$   
 c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc  $t = 0$  giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây  
 d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc  $t = 0$  giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây  
 (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)



### Lời giải

| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|
|---------|---------|--------|--------|

a) Khi  $t = 5$ , ta có:  $h(5) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{8}\right) \approx 69,3(cm)$ .

b) Khi  $t = 20$ , ta có:  $h(20) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 20}{8}\right) = 75(cm)$ .

c) d) Ta có:  $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Rightarrow 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 75$  hay  $h(t) \leq 75$ .

Giá trị lớn nhất của  $h(t)$  là 75, khi đó  $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{8} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow t = 4 + 16k (k \in \mathbb{Z})$ . Vì  $t \in [0; 30] \Rightarrow t \in \{4; 20\}$  (ứng với  $k$  bằng 0 và 1).

Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì con sóng đạt chiều cao cực đại (là 75 cm).

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

a) Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4

d) Tập giá trị của hàm số là  $T = [2; 4]$

### Lời giải

| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|---------|---------|---------|
|---------|---------|---------|---------|

$$y = 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ta có: hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

$$-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow 4 \geq 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 2 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq 2$$

Vậy giá trị của hàm số là  $T = [2; 4]$ .

**Câu 15:** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t$  (giờ) được cho bởi công thức  $h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14$ .



a) Hàm số  $h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ .

b) Chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11m.

c) Chiều sâu của mực nước cao nhất là 14m.

d) Thời gian để mực nước cao nhất là  $t = 9$ .

### Lời giải

a) Sai. Công thức tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ .

Công thức có dạng  $y = \cos(ax + b)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  nên chu kỳ cần tìm là

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12.$$

b) Đúng. Chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11m.

Ta có

$$\begin{aligned} \forall t: -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow 11 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14 \leq 17 \\ &\Leftrightarrow 11 \leq h \leq 17. \text{ Vậy chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11m.} \end{aligned}$$

c) Sai. Chiều sâu của mực nước cao nhất là 14m.

Ta có

$$\begin{aligned} \forall t: -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow 11 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14 \leq 17 \\ &\Leftrightarrow 11 \leq h \leq 17. \text{ Chiều sâu của mực nước cao nhất là 17m.} \end{aligned}$$

d) Đúng. Thời gian để mực nước cao nhất là  $t = 9$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \forall t: -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow 11 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14 \leq 17 \\ &\Leftrightarrow 11 \leq h \leq 17. \text{ Chiều sâu của mực nước cao nhất là 17m.} \end{aligned}$$

$$\text{Max } h = 17 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow t = -3 + 12k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì thời gian không âm và  $k \in \mathbb{Z}$  nên ta chọn  $t = 1$ .

Vậy thời gian ngắn nhất  $t = -3 + 12 = 9$ .

**Câu 16:** Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức  $h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12}(t - 9)$ , với  $h$  tính bằng độ C và  $t$  là thời gian trong ngày tính bằng giờ.

a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là vào 12 giờ trưa.

b) Trong ngày có 8 giờ nhiệt độ từ  $30,5^\circ\text{C}$  trở lên.

c) Nhiệt độ trong ngày luôn dao động từ  $29^\circ\text{C}$  đến  $32^\circ\text{C}$ .



d) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là vào 3 giờ sáng.

### Lời giải

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| a) S | b) Đ | c) S | d) Đ |
|------|------|------|------|

a) Ta có:  $-1 \leq \sin \frac{\pi}{12} \cdot (t-9) \leq 1, \forall t$ .

Suy ra:  $29 + 3 \cdot (-1) \leq 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t-9) \leq 29 + 3 \cdot 1$

Hay:  $26 \leq 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t-9) \leq 32$ .

Do đó:  $h(t) \leq 32$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\sin \frac{\pi}{12} (t-9) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} (t-9) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t-9 = 6 + 24k \Leftrightarrow t = 15 + 24k$$

Mà  $t \in [0; 24]$  nên  $t = 15$ .

b) Xét:  $h(t) \geq 30,5 \Leftrightarrow 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t-9) \geq 30,5 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{12} (t-9) \geq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq \frac{\pi}{12} (t-9) \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow 2 + k24 \leq t-9 \leq 10 + k24$$

$$\Leftrightarrow 11 + 24k \leq t \leq 19 + 24k$$

Mà  $t \in [0; 24]$  nên  $k = 0$ . Suy ra:  $11 \leq t \leq 19$ .

Vậy trong ngày có 8 giờ nhiệt độ từ  $30,5^\circ\text{C}$  trở lên từ 11h đến 19h.

c) Ta có:  $26 \leq h(t) \leq 32$ .

Xét:  $h(t) = 32 \Leftrightarrow t = 15$  (TM).

$$\text{Xét } h(t) = 26 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{12} (t-9) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} (t-9) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow t-9 = -6 + 24k \Leftrightarrow t = 3 + 24k \Rightarrow t = 3 \text{ (thỏa mãn vì } t \in [0; 24] \text{ )}.$$

Nên nhiệt độ trong ngày luôn dao động từ  $26^\circ\text{C}$  đến  $32^\circ\text{C}$ .

d) Ta có:  $h(t) = 26 \Leftrightarrow t = 3$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2 \sin x + \sin 2x}{1 + \cos x}$ .

a) Tập xác định của hàm số:  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

b) Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là 2.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .



### Lời giải

a) Sai.

Điều kiện  $1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq (2k+1)\pi$ .

Tập xác định của hàm số:  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

b) Đúng.

Với mọi  $x \in D$ , ta có  $-x \in D$ . Khi đó

$$f(-x) = \frac{2\sin(-x) + \sin(-2x)}{1 + \cos(-x)} = -\frac{2\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x} = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Đúng.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2\sin x + 2\sin x \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2\sin x(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = 2\sin x.$$

Vì  $x \in D$  nên  $0 \leq f(x) \leq 2$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là 2.

d) Sai.

Hàm số không liên tục trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$  nên không nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Câu 18:** Cho hàm số  $f(x) = \sin 2x + \sin x$ .

a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .

b)  $f(0) = 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ .

c)  $f(x)$  là hàm số chẵn.

d) Trong  $[0; 2\pi]$ , đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt và tổng các hoành độ của các giao điểm đó là  $5\pi$ .

### Lời giải

a) Đúng

b) Đúng.

$$\text{Vì } f(0) = 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

c) Sai. Vì  $f(-x) = \sin(-2x) + \sin(-x) = -f(x)$  nên  $f(x) = \sin 2x + \sin x$  là hàm số lẻ.

$$\text{d) Đúng. Vì } \sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x + k2\pi \\ 2x = \pi + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



\* Với  $x = \frac{k2\pi}{3} \in [0; 2\pi]$  suy ra  $x \in \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}$

\* Với  $x = \pi + k2\pi \in [0; 2\pi]$  suy ra  $x = \pi$

Vậy tổng hoành độ các giao điểm là:  $0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + 2\pi + \pi = 5\pi$ .

**Câu 19:** Cho hàm số  $f(x) = \tan x + 2$ .

- a) Hàm số  $f(x)$  là hàm số lẻ.
- b) Tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- c)  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ .
- d) Hàm số  $f(x)$  có giá trị lớn nhất là 1.

**Lời giải**

Hàm số  $f(x) = \tan x + 2$

ĐK:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \text{TXĐ } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

a) Sai.

Ta có TXĐ  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\forall x \in D$  thì  $-x \in D$  khi đó  $f(-x) = \tan(-x) + 2 = -\tan x + 2 \neq \pm f(x)$

Hàm số không có tính chẵn lẻ

b) Sai.

Vì TXĐ  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Đúng.

Ta có  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} + 2 = 3$ .

d) Sai.

Vì hàm số  $f(x) = \tan x + 2$  không có GTLN, GTNN