

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Mỗi ngày, người ta quan sát thấy mặt trời mọc đầu tiên tại Mỹ là tại vùng núi đảo ở Maine. Thời điểm mặt trời mọc được biểu diễn theo công thức $t(m) = 1,665 \sin(m+3) + 5,485$, với t là thời điểm (được tính từ nửa đêm) và m là tháng (tính từ tháng 1). Hãy cho biết vào tháng 3 thì mặt trời mọc lúc mấy giờ? (đơn vị giờ, làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có: $t(3) = 1,665 \sin(3+3) + 5,485 \approx 5,0197 \approx 5$ giờ.

Vậy vào tháng 3 thì mặt trời mọc lúc khoảng 5 giờ.

Câu 2: Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức

$$B(t) = a + b \sin \frac{\pi t}{12}, (a, b > 0)$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thủy ngân). Biết huyết áp tâm trương thấp nhất là 78mmHg và huyết áp tâm trương lớn nhất là 92mmHg, hỏi huyết áp tâm trương của người đó vào thời điểm 2 giờ 30 phút chiều là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Trả lời: 80,7

Vì $a, b > 0$ và $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{12} \leq 1$ nên $B(t)_{\max} = a + b, B(t)_{\min} = a - b$ nên ta có

$$\begin{cases} a + b = 92 \\ a - b = 78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 85 \\ b = 7 \end{cases}.$$

Tại thời điểm 2 giờ 30 phút chiều thì thời gian $t = 14,5$ giờ.

Huyết áp tâm trương của người đó là $B(14,5) = 85 + 7 \sin \frac{\pi \cdot 14,5}{12} \approx 80,7 \text{ mmHg}$.

Câu 3: Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(cm)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t \leq 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10$. Hỏi vào thời điểm nào trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất? (đơn vị giờ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải



Trả lời: 20

Ta có $3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10 \leq 13$

Mà $3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10 = 13 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = 24k - 4 (k \in \mathbb{Z})$ nên

$$0 \leq 24k - 4 \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = 20.$$

Vậy vào thời điểm $20h$ trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất là $13(cm)$.

Câu 4: Mực nước lên xuống của thủy triều trong một ngày tại một cửa biển được tính theo công thức $y = \sin\left(\frac{\pi}{180}(x+73)\right) + 1$ với x là giờ ($0 \leq x \leq 24$), y tính theo đơn vị m so với mực nước biển. Hỏi vào lúc $17h$ thì mực nước ở độ cao bao nhiêu so với mực nước biển?

Lời giải

Trả lời: 2

Thay $x = 17$ vào công thức $y = \sin\left(\frac{\pi}{180}(x+73)\right) + 1$ ta có $y = \sin\left(\frac{\pi}{180}(17+73)\right) + 1 = 2$.

Vậy vào lúc $x = 17$ thì mực nước ở độ cao $2m$ so với mực nước biển.

Câu 5: Số giờ có ánh sáng mặt trời của Thủ đô Hà Nội năm 2018 được cho bởi công thức $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right) + 13$ với $1 \leq x \leq 365$ là số thứ tự của ngày trong năm. Ngày nào sau đây của năm 2018 thì số giờ có ánh sáng mặt trời của Hà Nội lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 30

Để số giờ có ánh sáng mặt trời lớn nhất thì hàm số $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right) + 13$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right) = 1 \Leftrightarrow x = 30 + k360, k \in \mathbb{Z}$. Vì $1 \leq x \leq 365$ nên ta có

$$1 \leq 30 + k360 \leq 365 \Leftrightarrow -0,08 \leq k \leq 0,93 \Rightarrow k = 0.$$

Do đó $x = 30$ (tháng đầu tiên của năm)

Câu 6: Tập giá trị của hàm số: $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ có dạng: $T = [a; b]$. Tính $P = 2a + b$

Trả lời: 13

Lời giải

$$y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x.$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x = 5 + 2 \sin 4x.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin 4x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7.$$

Vậy giá trị của hàm số là $T = [3; 7]$.

Câu 7: Tập giá trị của hàm số: $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ có dạng: $T = [a; b]$. Tính $P = 8a + 4b$

Trả lời: 6

Lời giải

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x$$



Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\text{Do } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}.$$

Vậy giá trị của hàm số là $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Câu 8: Tập giá trị của hàm số: $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$ có dạng: $T = [a; b]$. Tính $P = 2a + b$

Trả lời: 7

Lời giải

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$$

$$\text{Ta có } y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3 = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) + 3 = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$$

Vậy giá trị của hàm số là $T = [1; 5]$.

Câu 9: Tập giá trị của hàm số: $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ có dạng: $T = [a; b]$. Tính $P = 2a + b$

Trả lời: 4

Lời giải

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$$

$$\begin{aligned} \text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 4 \geq -(\sin x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của hàm số là $T = [0; 4]$.

Câu 10: Tập giá trị của hàm số: $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ có dạng: $T = [a; b]$. Tính

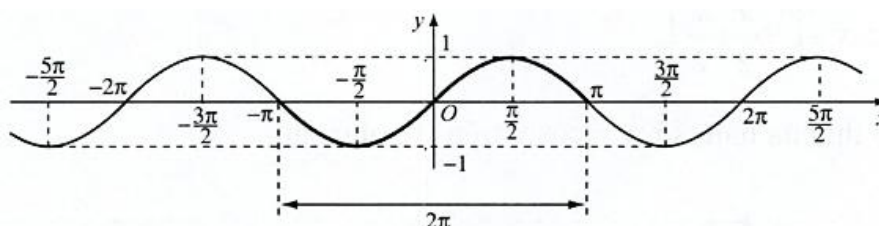
$$P = 12\sqrt{3}a + 4b$$

Trả lời: -14

Lời giải

$$y = \sin x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ như sau:





Dựa vào đồ thị trên, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ xét trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ là:

x	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy tập giá trị của hàm số là $T = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

Câu 11: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4}$. có dạng: $T = [a; b]$. Tính $P = 121ab$

Trả lời: -55

Lời giải

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4} \Leftrightarrow y(\sin x + 2 \cos x + 4) = 2 \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (y-2) \sin x + (2y-1) \cos x = -4y.$$

Điều kiện để tồn tại cặp $(x; y)$ là $(y-2)^2 + (2y-1)^2 \geq (-4y)^2$

$$\Leftrightarrow -11y^2 - 8y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{71}}{11} \leq y \leq \frac{-4 + \sqrt{71}}{11}.$$

Vậy miền giá trị hàm số là $T = \left[\frac{-4 - \sqrt{71}}{11}; \frac{-4 + \sqrt{71}}{11}\right]$.

Câu 12: Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2}$.

Trả lời: 3

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-2) \sin x - (y+3) \cos x = 1-2y.$$

Điều kiện để tồn tại cặp số $(x; y)$ là $(y-2)^2 + (y+3)^2 \geq (1-2y)^2$

$$\Leftrightarrow -2y^2 + 6y + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \leq y \leq \frac{3 + \sqrt{33}}{2}.$$

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $\frac{3 - \sqrt{33}}{2} + \frac{3 + \sqrt{33}}{2} = 3$.

Câu 13: Tính tổng giá trị lớn nhất (Max y) và giá trị nhỏ nhất (Min y) của hàm số $y = \sin^2 x + \sin x - 3$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời: -4,3

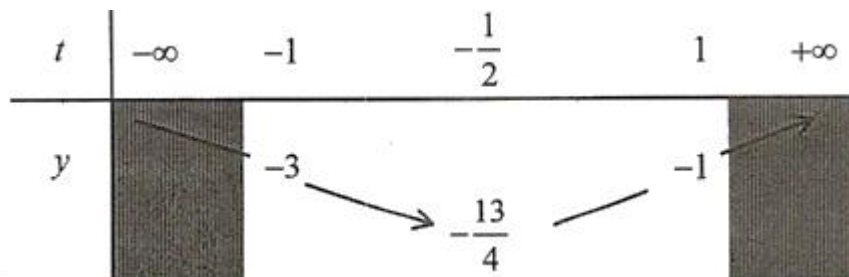
Lời giải

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Ta có: $y = t^2 + t - 3$.

Đây là hàm bậc hai với $a = 1, b = 1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$. Vì $a > 0$ nên bề lõm parabol tương ứng sẽ hướng lên trên.



Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: Max $y = -1$, khi đó $t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

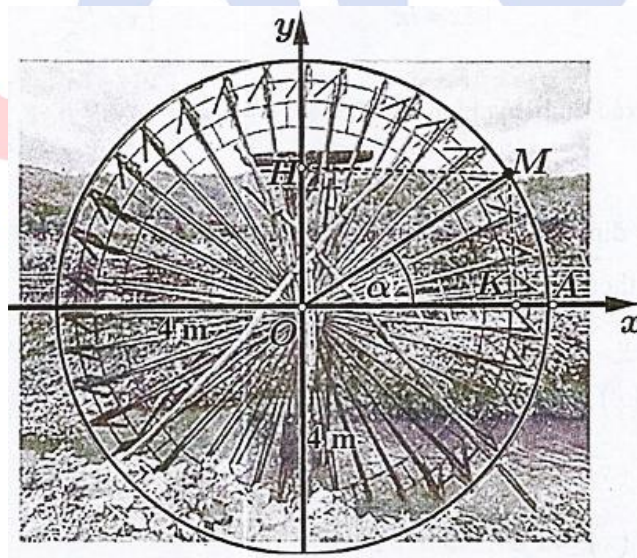
Tương tự Min $y = -\frac{13}{4}$, khi đó $t = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 14: Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (OA, OM)$.

Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Trả lời: 10 (giây).

Lời giải

Ta có: $h(x) = 4 + 4\sin \alpha$.

Khi M ở vị trí cao nhất so với mặt nước (tức là $h(x) = 8$) thì $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ (vì chỉ xét 1 vòng quay đầu tiên).

Thời gian thực hiện của guồng nước là: $t = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 40}{2\pi} = 10$ (giây).



Câu 15: Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Trả lời: 353

Lời giải

$$\text{Do } \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \geq -1 \Rightarrow 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \geq -3$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \geq 9 \Rightarrow d(t) \geq 9.$$

Vậy thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow t-80 = 182\left(-\frac{1}{2} + 2k\right) \Leftrightarrow t = 364k - 11, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Mặt khác: } 0 \leq 364k - 11 \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} \leq k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 (\text{do } k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow t = 364 - 11 = 353$$

Vậy thành phố T có ít giờ ánh sáng Mặt Trời nhất là 9 giờ khi $t = 353$, tức là vào ngày thứ 353 trong năm.

Câu 16: Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

Trả lời: -2

Lời giải

$$y = f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

$$\text{TXD: } D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có: } -1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\text{Max}}(x) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f_{\text{Min}}(x) = -3 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 17: Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời: -2,6

Lời giải

$$y = f(x) = \sqrt{1 + \sin x} - 3.$$

$$\text{Do } \sin x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên tập xác định của hàm số là } D = \mathbb{R}.$$



Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{1 + \sin x} - 3 \leq \sqrt{2} - 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq \sqrt{2} - 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\min}(x) = -3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f_{\max}(x) = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 18: Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = 2 + 2\cos x + \cos^2 x$

Trả lời: 4

Lời giải

$$y = f(x) = 2 + 2\cos x + \cos^2 x = (\cos x + 1)^2 + 1$$

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Nên } 0 \leq 1 + \cos x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq (1 + \cos x)^2 + 1 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\min}(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f_{\max}(x) = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 19: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$.

Trả lời: -2

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos^2 x \geq 0 \Rightarrow -\cos^2 x \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \cos^2 x} \leq 1 \Leftrightarrow -3\sqrt{1 - \cos^2 x} \geq -3 \Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow y \geq -2.$$

$$(\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2.