



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



### LÝ THUYẾT.

#### 1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

- Hai phương trình được gọi là *tương đương* khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình  $f(x) = 0$  tương đương với phương trình  $g(x) = 0$  thì ta viết

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

#### 2. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$ (1).

+ Trường hợp  $|m| > 1$ , phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp  $|m| \leq 1$ , tồn tại duy nhất một số  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  thỏa mãn  $\sin \alpha = m$ . Ta có

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu số thực  $\alpha$  thỏa mãn:  $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = m \end{cases}$  thì ta viết  $\alpha = \arcsin m$ . Ta có

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

#### Chú ý:

+ Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$



+ Phương trình  $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Trong một công thức về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

### 3. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$ (1).

+ Trường hợp  $|m| > 1$  phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp  $|m| \leq 1$ , khi đó: Tồn tại duy nhất một số thực  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sao cho  $\cos \alpha = m$ .

Ta có

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

.Nếu số thực  $a$  thỏa mãn:  $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \pi \\ \cos \alpha = a \end{cases}$  thì ta viết  $\alpha = \arccos a$ . Ta có:

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Chú ý:**

+ Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

+ Phương trình  $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Trong một công thức nghiệm về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.



#### 4. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$ (1) VÀ $\cot x = m$ (2).

### I LÝ THUYẾT.

|                       | $\tan x = m(1)$                                                                                                                                                                                                       | $\cot x = m(2)$                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Điều kiện             | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                                                  | $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                                                                                  |
| Tổng quát             | Tồn tại một số $\alpha$ sao cho $m = \tan \alpha$<br>$(1) \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                              | Tồn tại một số $\alpha$ sao cho $m = \cot \alpha$<br>$(2) \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                              |
| Chú ý 1:<br>Đặc biệt: | $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ | $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$<br>$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ |
| Chú ý 2:              | Số thực $\alpha$ thỏa mãn: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan \alpha = m \end{cases}$ ta viết<br>$\alpha = \arctan m$ .<br>$(1) \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$   | Số thực $\alpha$ thỏa mãn: $\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cot \alpha = m \end{cases}$ ta viết<br>$\alpha = \operatorname{arccot} m$ .<br>$(2) \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$              |
| Chú ý 3:              | $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                                                                      | $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                                                                                      |

**Chú ý 4 :** Trong một công thức nghiệm về phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

### II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

#### DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

**Câu 1:** Giải các phương trình sau

a.  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b.  $\sin x = \frac{1}{4}$ .

c.  $\sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2}$ .

d.  $\sin x = 1$ .

e.  $\sin 3x = -\frac{4}{3}$ .

f.  $\sin(2019x + 2020) = 2$ .

g.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$ .

h.  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

i.  $2\sin(3x + 1) = 1$ .

j.  $\sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$ .

k.  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .



l.  $\sin^2 3x = \frac{3}{4}$ .

m.  $\sin 2x - \cos x = 0$ .

n.  $\sin 3x + \sin x = 0$ .

o.  $\sin x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

### Lời giải

a.  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

b.  $\sin x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

c.  $\sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - 60^\circ) = \sin 30^\circ$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 60^\circ = 30^\circ + k360^\circ \\ x - 60^\circ = 150^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ x = 210^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

d.  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

e. Ta có  $\sin 3x \in [-1; 1] \Rightarrow \sin 3x = -\frac{4}{3}$  vô nghiệm.

f. Ta có:  $\sin(2019x + 2020) \in [-1; 1] \Rightarrow \sin(2019x + 2020) = 2$  vô nghiệm

g.  $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

h.  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4\pi}{3} + k4\pi \\ x = 2\pi + k4\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$



$$i. 2 \sin(3x+1) = 1 \Leftrightarrow \sin(3x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x+1) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x+1 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} - 1 + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} - 1 + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$j. \sin \left[ \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \in [-1; 1]$  và  $k \in \mathbb{Z}$  nên ta có  $k = 0$ .

$$\Rightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$k. \text{ Ta có } \sin \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$l. \text{ Ta có } \sin^2 3x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$m. \text{ Ta có } \sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

n. Ta có  $\sin 3x + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = -\sin x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -x + k2\pi \\ 3x = \pi + x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

o. Ta có  $\sin x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} - 2x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 2:** Tìm nghiệm của phương trình  $\sin x = -\frac{1}{2}$  trên khoảng  $(0; \pi)$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Theo đề bài:

$$0 < -\frac{\pi}{6} + k2\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{7}{12} \Rightarrow \text{không tồn tại } k.$$

$$0 < \frac{7\pi}{6} + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12} < k < -\frac{1}{12} \Rightarrow \text{không tồn tại } k.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 3:** Tìm nghiệm của phương trình  $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$  trên khoảng  $(-180^\circ; 180^\circ)$ .

**Lời giải**

Ta có

$$2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Theo đề bài:

$$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0.$$

$$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm  $x = 20^\circ$  và  $x = 80^\circ$ .

**Câu 4:** Tìm nghiệm của phương trình  $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$  trên đoạn  $[2\pi; 4\pi]$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + l2\pi (l \in \mathbb{Z})$

Khi đó

$$\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện ta được:

$$\begin{cases} x = m2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + m\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + m\pi \end{cases} (m \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in [2\pi; 4\pi]$  nên  $x \in \left\{ 2\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3} \right\}$ .

**DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH  $\cos x = m$  (1).**

**Câu 5:** Giải các phương trình sau

a.  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

b.  $\cos(x - 2) = \frac{2}{5}.$

c.  $\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}.$

d.  $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0.$

e.  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$

f.  $2\cos x = -1.$

g.  $2019.\cos(x + 30^\circ) = 2020.$

h.  $\cos(3x + 10^\circ) = -1.$

i.  $\sin 3x - \cos 2x = 0.$

j.  $\cos(\cos(x + 2)) = 1.$

**Lời giải**



a. Ta có  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{-7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b. Ta có  $\cos(x - 2) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x - 2 = \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + 2 + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

c. Ta có  $\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x + 50^\circ) = \cos 60^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 50^\circ = 60^\circ + k.360^\circ \\ 2x + 50^\circ = -60^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^\circ + k.180^\circ \\ x = -55^\circ + k.180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

d. Ta có  $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\cos x = 0 \\ 3 - \cos x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

e. Ta có  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

f. Ta có  $2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

g. Ta có  $2019.\cos(x + 30^\circ) = 2020 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = \frac{2020}{2019} > 1$  ( vô nghiệm).

h. Ta có  $\cos(3x + 10^\circ) = -1 \Leftrightarrow 3x + 10^\circ = 180^\circ + k.360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{170^\circ}{3} + k.120^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

i. Ta có  $\sin 3x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

j. Ta có  $\cos[\cos(x + 2)] = 1 \Leftrightarrow \cos(x + 2) = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vì:  $-1 \leq \cos(x + 2) \leq 1$  nên  $k = 0$ .



Khi đó:

$$\cos(x+2)=0 \Leftrightarrow x+2=\frac{\pi}{2}+m\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-2+m\pi, (m \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 6:** Phương trình  $\sqrt{2} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1$  có bao nhiêu nghiệm thỏa mãn  $0 \leq x \leq 2\pi$ ?

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{2} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Với  $0 \leq x \leq 2\pi$  ta có

$$\begin{cases} 0 \leq -\frac{\pi}{12}+k2\pi \leq 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{24} \leq k \leq \frac{25}{24} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k=1 \text{ nghiệm là } x=\frac{23\pi}{12}.$$

$$\begin{cases} 0 \leq -\frac{7\pi}{12}+k2\pi \leq 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{24} \leq k \leq \frac{31}{24} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k=1 \Rightarrow x=\frac{17\pi}{12}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH  $\tan x = m$  (1) VÀ  $\cot x = m$  (2).**

**Câu 7:** Giải các phương trình sau

a.  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}.$

b.  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}.$

c.  $\tan(3x-30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

d.  $\tan^2 x = 1.$

e.  $\tan 2x = 0.$

f.  $\cot\left(4x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}.$

g.  $\left(\cot \frac{x}{2}-1\right)\left(\cot \frac{x}{2}+1\right)=0.$

h.  $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2 \tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1.$

i.  $\tan(x-30^\circ) \cdot \cos(2x-150)=0.$  j.  $(3 \tan x+\sqrt{3})(2 \sin x-1)=0.$

k.  $\tan x \cdot \tan 2x = -1.$

l.  $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1.$

m.  $\sin 2x \cdot \cot x = 0.$

**Lời giải**

a. Ta có  $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$



b. Ta có  $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

c. Ta có  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ)$

$$\Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

d. Ta có  $\tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

e. Ta có  $\tan 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

f. Ta có  $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

g. Điều kiện:  $\sin \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq l\pi \Leftrightarrow x \neq l2\pi, l \in \mathbb{Z}.$

Ta có

$$\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{2} = 1 \\ \cot \frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}(TM).$$

h. Ta có

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \cot x - 2\cot x = 1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

i. Điều kiện  $\cos(x - 30^\circ) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 120^\circ + l180^\circ, l \in \mathbb{Z}.$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x - 30^\circ) = 0 \\ \cos(2x - 150^\circ) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 30^\circ = k180^\circ \\ 2x - 150^\circ = 90^\circ + k180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k180^\circ \\ x = 120^\circ + k90^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \{30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

j. Điều kiện  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbb{Z}.$



Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3 \tan x + \sqrt{3} = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

k. Điều kiện  $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2} \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\tan 2x = -\frac{1}{\tan x} \Leftrightarrow \tan 2x = -\cot x \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho vô nghiệm.

l. Điều kiện  $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq l\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{8} + l\frac{\pi}{4} \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\tan 4x = \frac{1}{\cot 2x} \Leftrightarrow 4x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho vô nghiệm.

m. Điều kiện:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l\pi, l \in \mathbb{Z}.$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$2 \sin x \cos x \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm  $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 8:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$  trên khoảng  $\left( \frac{\pi}{4}; 2\pi \right)$ .



### Lời giải

Ta có  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{11} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Với  $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ , ta có  $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{44} < k < \frac{19}{11}$  suy ra  $k \in \{0; 1\}.$

Vậy trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ , phương trình đã cho có hai nghiệm.



## BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

**Câu 9:** Giải phương trình  $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

**Giải:**

Ta có:  $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có một họ nghiệm  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 10:** Giải phương trình  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Giải:**

Ta có  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ) \Leftrightarrow x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có một họ nghiệm  $x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 11:** Giải phương trình  $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

**Giải:**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} - x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{6} - m\pi \end{cases}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra phương trình có một họ nghiệm  $x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 12:** Giải phương trình  $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$

**Giải:**



$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} + x \neq m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{2\pi}{3} + m\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 13:** Giải phương trình  $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  với  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$

**Giải:**

$$\text{Phương trình tương đương với } \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{2}{3}$$

Do  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{-1; 0\}$ .

Với  $k = -1$  thì  $x = -\frac{\pi}{6}$ , với  $k = 0$  thì  $x = \frac{\pi}{3}$ .

Vậy  $x = -\frac{\pi}{6}$  và  $x = \frac{\pi}{3}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 14:** Giải phương trình  $\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 0$ .

**Đáp số**  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 15:** Giải phương trình  $\left(\cot\frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot\frac{x}{2} + 1\right) = 0$  (1)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin\frac{x}{3} \neq 0 \\ \sin\frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} \neq k\pi \\ \frac{x}{2} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k3\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cot\frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \cot\frac{x}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot\frac{x}{3} = 1 \\ \cot\frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa.

Vậy phương trình có nghiệm:  $x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 16:** Giải phương trình  $\tan(x - 30^\circ) \cos(2x - 150^\circ) = 0$  (1)



Điều kiện:  $\cos(x - 30^\circ) \neq 0 \Leftrightarrow x - 30^\circ \neq 90^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x \neq 120^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$ .

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x - 30^\circ) = 0 \\ \cos(2x - 150^\circ) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 30^\circ = k180^\circ \\ 2x - 150^\circ = 90^\circ + k360^\circ \\ 2x - 150^\circ = -90^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k180^\circ \\ x = 120^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = 30^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

So với điều kiện nghiệm  $x = 120^\circ + k180^\circ$  loại.

Vậy phương trình có nghiệm:  $x = 30^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 17:** Giải phương trình  $(3 \tan x + \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0$  (1).

Điều kiện  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \tan x + \sqrt{3} = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa.

Vì tập các giá trị  $\left\{x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$  là tập con của tập các giá trị  $\left\{x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

Vậy phương trình có các nghiệm:  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 18:** Giải phương trình  $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$  (1)

Điều kiện  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

**Câu 19:**  $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  (\*) (CD CNTP khối A\_2007)

Điều kiện:  $\cos x \neq 0, \sin x \neq 0$

Với điều kiện trên, (\*)  $\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) = \sin 2x(\cos x + \sin x)$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1$



$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình là:  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 20:**  $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$  (ĐH D-2011)

Điều kiện:  $\begin{cases} \tan x \neq -\sqrt{3} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Với điều kiện trên, phương trình  $\Leftrightarrow \sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos x - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

So với điều kiện, nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**Câu 21:**  $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$  (\*) (ĐH A-2009)

Điều kiện:  $\begin{cases} 1+2\sin x \neq 0 \\ 1-\sin x \neq 0 \end{cases}$  (1)

Với điều kiện trên, (\*)  $\Leftrightarrow (1-2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện (1), nghiệm phương trình là  $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$