

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0$ trên $[-360^\circ; 360^\circ]$.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = -1$

$\Leftrightarrow x + 30^\circ = 180^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = 150^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0$ trên $[-360^\circ; 360^\circ]$ là 2

Câu 2: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos(75^\circ - x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ trên $[0^\circ; 720^\circ]$.

Lời giải

Trả lời: 4

Ta có: $\cos(75^\circ - x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(75^\circ - x) = \cos 135^\circ$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 75^\circ - x = 135^\circ + k360^\circ \\ 75^\circ - x = -135^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -60^\circ - k360^\circ \\ x = 210^\circ - k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos(75^\circ - x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ trên $[0^\circ; 720^\circ]$ là 4

Câu 3: Tìm số nghiệm của phương trình: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ trên $[-2\pi; 4\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 12

Ta có: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ trên $[-2\pi; 4\pi]$ 12.

Câu 4: Tìm số nghiệm của phương trình: $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ trên $[0^\circ; 720^\circ]$.



Lời giải

Trả lời: 13

$$\text{Ta có: } \tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = k60^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ trên $[0^\circ; 720^\circ]$ là 13.

Câu 5: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cot\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{3}$ trên $[-2\pi; 5\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 7

$$\text{Ta có: } \cot\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cot\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{3}$ trên $[-2\pi; 5\pi]$ là 7.

Câu 6: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3$ trên $[-2\pi; 4\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 9

$$\text{Ta có: } \sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi x}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{\pi x}{2} = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} + 2k (k \in \mathbb{Z}).$$

Trên $[-2\pi; 4\pi]$, ta có

$$-2\pi \leq \frac{2}{3} + 2k \leq 4\pi \Leftrightarrow -2\pi - \frac{2}{3} \leq 2k \leq 4\pi - \frac{2}{3} \Leftrightarrow -3,5 \leq k \leq 5,9$$

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-3; -2; \dots; 4; 5\}$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3$ trên $[-2\pi; 4\pi]$ là 9.

Câu 7: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cot 3x = \cot(\pi - x)$ trên $[-2\pi; 4\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 18

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin(\pi - x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{3} \\ x \neq \pi - l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Ta có: } \cot 3x = \cot(\pi - x) \Leftrightarrow 3x = \pi - x + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm phương trình là:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$



Vậy số nghiệm của phương trình: $\cot 3x = \cot(\pi - x)$ trên $[-2\pi; 4\pi]$ là 18

Câu 8: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \sin x = 0$ trên $[-2\pi; 5\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 14

$$\begin{aligned} \sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) = -\sin x \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) = \sin(-x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{3} = -x + k2\pi \\ 2x - \frac{1}{3} = \pi + x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{1}{3} + \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \sin x = 0$ trên $[-2\pi; 5\pi]$ là 14

Câu 9: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin(\pi - x) - \cos x = 0$ trên $[-\pi; 10\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 11

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) - \cos x = 0 &\Leftrightarrow \sin(\pi - x) = \cos x \Leftrightarrow \sin(\pi - x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \pi - x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \pi - x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x = \frac{\pi}{4} - k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin(\pi - x) - \cos x = 0$ trên $[-\pi; 10\pi]$ là 11

Câu 10: Tìm số nghiệm của phương trình: $\tan 3x = \cot x$ trên $[-\pi; 10\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 44

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \\ x \neq l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Ta có: } \tan 3x = \cot x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\tan 3x = \cot x$ trên $[-\pi; 10\pi]$ là 44

Câu 11: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{18}\right) = 0$ trên $[-\pi; 10\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 23



$$\sin x \sin \left(x - \frac{\pi}{18} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{18} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x - \frac{\pi}{18} = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin x \sin \left(x - \frac{\pi}{18} \right) = 0$ trên $[-\pi; 10\pi]$ là 23

Câu 12: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 10\pi \right]$.

Lời giải

Trả lời: 15

Ta có: $a = \sqrt{3}, b = -1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Chia hai vế phương trình cho 2, ta được:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 3x \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 10\pi \right]$ là 15

Câu 13: Tìm số nghiệm của phương trình: $\tan x + 2 \cot x = 3$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 10\pi \right]$.

Lời giải

Trả lời: 20

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình tương đương

$$\tan x + 2 \frac{1}{\tan x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \end{cases}$$

Với $\tan x = 1$ thì $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ (thỏa mãn điều kiện).

Với $\tan x = 2$ thì $x \approx 1, 1 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số nghiệm của phương trình: $\tan x + 2 \cot x = 3$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 10\pi \right]$ là 20

Câu 14: Tìm số nghiệm của phương trình: $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi \right]$.

Lời giải

Trả lời: 17



Ta có $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $\sin x = 1$ thì $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy số nghiệm của phương trình: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ là 17.

Câu 15: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin 2x - \cos x - 2\sin x + 1 = 0$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$.

Lời giải

Trả lời: 17

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x - 2\sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - (2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - 1 = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Với $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$;

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin 2x - \cos x - 2\sin x + 1 = 0$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ là 17

Câu 16: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$.

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có: $a = \sqrt{3}, b = -1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Vậy phương trình tương đương:

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 10\pi\right]$ là 5

Câu 17: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$ trên $[-6\pi; 12\pi]$.



Lời giải

Trả lời: 28

$$\text{Ta có: } \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 1) - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$ trên $[-6\pi; 12\pi]$ là 28

Câu 18: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin 7x \cdot \sin x = \sin 5x \cdot \sin 3x$ trên $[-6\pi; 12\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 73

$$\text{Ta có: } \sin 7x \sin x = \sin 5x \sin 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2x + k2\pi \\ 6x = -2x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \frac{\pi}{2} \\ x = k \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin 7x \cdot \sin x = \sin 5x \cdot \sin 3x$ trên $[-6\pi; 12\pi]$ là 73

Câu 19: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 15

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = -x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi + x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 15

Câu 20: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 7

$$\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - x + k2\pi \\ x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 0x = \frac{\pi}{12} + k2\pi (VL) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 7

Câu 21: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 14

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x - \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ -x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} - k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 14

Câu 22: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 28

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} - 2x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi (VL) \\ 4x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 28

Câu 23: Tìm số nghiệm của phương trình: $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.



Lời giải

Trả lời: 7

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} - x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{6} - m\pi \end{cases}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$PT \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy số nghiệm của phương trình: $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 7

Câu 24: Tìm số nghiệm của phương trình: $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 7

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} + x \neq m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{2\pi}{3} + m\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

$$PT \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy số nghiệm của phương trình: $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 7

Câu 25: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 21

$$\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot\left(-2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 21

Câu 26: Tìm số nghiệm của phương trình: $4\sin^2 x - 1 = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải



Trả lời: 14

$$4\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $4\sin^2 x - 1 = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 14

Câu 27: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos^2 2x = \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 17

$$\cos^2 2x = \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 4x = 1 - \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\pi - 4x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{6} - k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos^2 2x = \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 17

Câu 28: Tìm số nghiệm của phương trình: $|\cos 2x| = 1$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 14

$$|\cos 2x| = 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $|\cos 2x| = 1$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 14

Câu 29: Tìm số nghiệm của phương trình: $\left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 14



$$\left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 14

Câu 30: Tìm số nghiệm của phương trình: $2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 28

$$2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 28

Câu 31: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos^2 x = \sin^2 x$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 14

$$\cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos^2 x = \sin^2 x$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 14

Câu 32: Tìm số nghiệm của phương trình: $3 \sin x = 4 \sin^3 x$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 21

$$3 \sin x = 4 \sin^3 x \Leftrightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $3 \sin x = 4 \sin^3 x$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 21

Câu 33: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos x = 1 + 4 \cos^3 x$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 11

$$\cos x = 1 + 4 \cos^3 x \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = \pi + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos x = 1 + 4 \cos^3 x$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 11

Câu 34: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 3

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 3

Câu 35: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin^4 x - \cos^4 x + 1 = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 8

$$\sin^4 x - \cos^4 x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin^4 x - \cos^4 x + 1 = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 8

Câu 36: Tìm số nghiệm của phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{2} = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 14

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{2} = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 14

Câu 37: Tìm số nghiệm của phương trình: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 7

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 7

Câu 38: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 13

Ta đưa phương trình đã cho về dạng phương trình cơ bản sau:

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -(x + \frac{\pi}{6}) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$



Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 13

Câu 39: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos^2 x + \cos x = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 11

$$\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos^2 x + \cos x = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 11

Câu 40: Tìm số nghiệm của phương trình: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 13

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x - (\sin x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 13

Câu 41: Tìm số nghiệm của phương trình: $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 14

$$\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \tan x = t, \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 + (\sqrt{3} - 1)t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\sqrt{3}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Với } t = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So với điều kiện phương trình nhận cả hai nghiệm.

$$\text{Nghiệm của phương trình: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 14

Câu 42: Tìm số nghiệm của phương trình: $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 14



$$\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3 \quad (1)$$

(1). Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \cot^2 x = \cot x + 3 \Leftrightarrow \cot^2 x - \cot x - 2 = 0 \quad (1')$$

Đặt $t = \cot x$. Phương trình (1') trở thành: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 2$

$$\text{Với } t = -1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \cot x = 2 \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (với } \tan \alpha = 2 \text{)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 14

Câu 43: Tìm số nghiệm của phương trình: $\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 6

$$\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin \frac{x}{3} \neq 0 \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} \neq k\pi \\ \frac{x}{2} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k3\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \cot \frac{x}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} = 1 \\ \cot \frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa mãn phương trình có nghiệm:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 6

Câu 44: Tìm số nghiệm của phương trình: $\cos x \cdot \cos 5x = \cos 2x \cdot \cos 4x$ trên $[-\pi; 6\pi]$.

Lời giải

Trả lời: 29

$$\cos x \cdot \cos 5x = \cos 2x \cdot \cos 4x \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + k2\pi \\ 4x = -2x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy số nghiệm của phương trình: $\cos x \cdot \cos 5x = \cos 2x \cdot \cos 4x$ trên $[-\pi; 6\pi]$ là 29

Câu 45: Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

Trả lời: 3

Lời giải

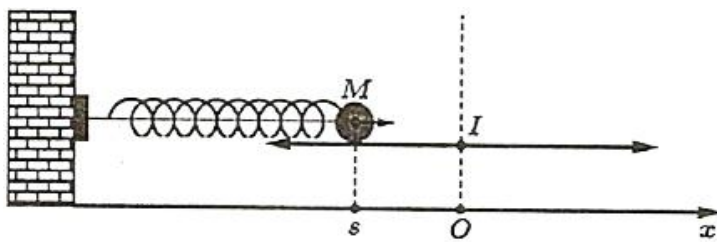


Ta có: $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $-1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Vậy có 3 giá trị nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 46: Một vật M được gắn vào đầu lò xo và dao động quanh vị trí cân bằng I , biết rằng O là hình chiếu vuông góc của I trên trục Ox , tọa độ điểm M trên Ox tại thời điểm t (giây) là đại lượng s (đơn vị: cm) được tính bởi công thức $s = 8,6 \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm khoảng cách từ vật đến vị trí cân bằng tại thời điểm $t = 3$ giây. (Các kết quả gần đúng trong bài được làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: $3,65cm$

Khi $t = 3$ thì $s = 8,6 \sin\left(8 \cdot 3 + \frac{\pi}{2}\right) \approx 3,65(cm)$.

Vậy vật cách vị trí cân bằng một khoảng xấp xỉ $3,65cm$.

Câu 47: Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

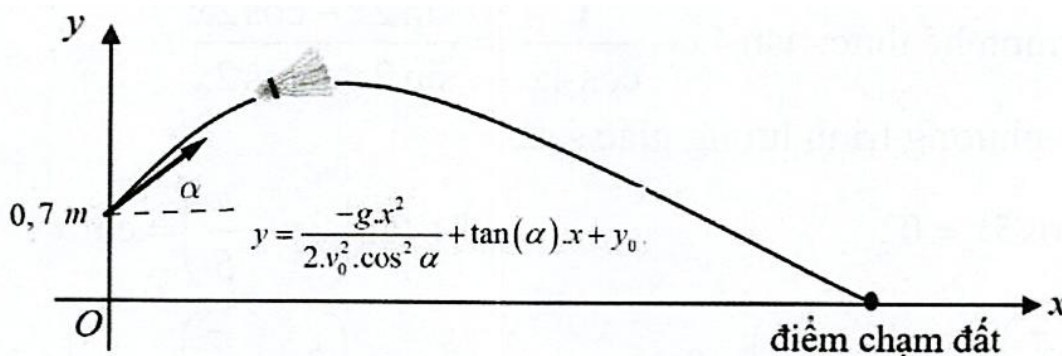
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , chọn điểm có tọa độ $(O; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình

quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là: $y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$; trong đó:

- g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8m/s^2$);
- α (độ) là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.

Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68m$. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất (giả thiết $\alpha > 30^\circ$)? (biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7m$ so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là $8m/s$, bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng). (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 54°

Với $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, vận tốc ban đầu $v_0 = 8 \text{ m/s}$, phương trình quỹ đạo của cầu:

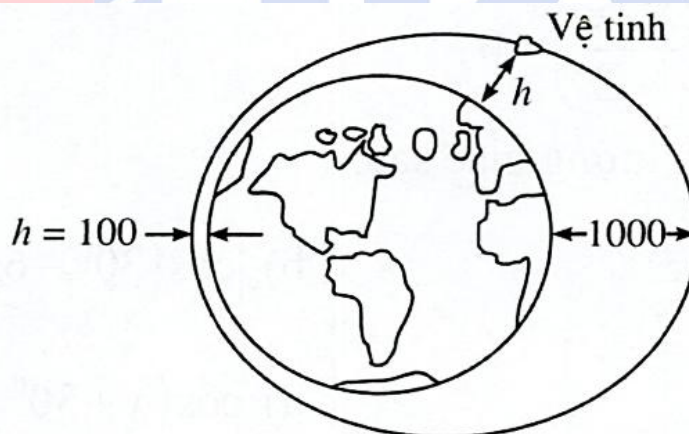
$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

Khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68 \text{ m}$; nghĩa là $x = 6,68 \text{ m}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128} (1 + \tan^2 \alpha) + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan \alpha \approx 1,378 \\ \tan \alpha \approx 0,576 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx 54,04^\circ \\ \alpha \approx 29,97^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy người chơi đã phát cầu một góc gần 54° .

Câu 48: Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức

$h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ

đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó? (đơn vị phút, kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Trả lời: 36,6

$$\text{Ta có phương trình: } 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t = 250 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -\frac{2}{3}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{50}t \approx 2,3 + k2\pi \\ \frac{\pi}{50}t \approx -2,3 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 36,61 + k100 \\ t \approx -36,61 + k100 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, tại thời điểm $t \approx 36,6$ (phút) thì ta có thể thực hiện thí nghiệm đó.

Câu 49: Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình lượng giác sau có nghiệm:
 $2\sin 3x = m - 1$.

Lời giải

Trả lời: 5

$$2\sin 3x = m - 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{m-1}{2}.$$

Điều kiện có nghiệm: $-1 \leq \frac{m-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$.

Câu 50: Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình lượng giác sau có nghiệm:
 $3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0$.

Lời giải

Trả lời: 1

$$3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cos x = 3m+2.$$

Trường hợp 1: $m = 1, \cos x = 2$ (loại).

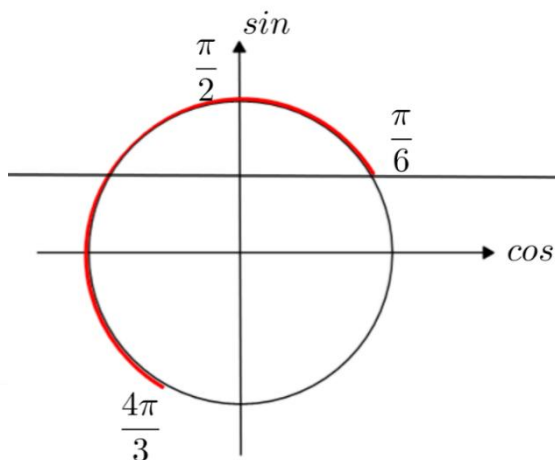
Trường hợp 2: $m \neq 1, \cos x = \frac{3m+2}{m-1}$.

$$\left| \frac{3m+2}{m-1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow (3m-2)^2 - (m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq m \leq \frac{-1}{4}.$$

Câu 51: Tìm m để phương trình $(m+1)\sin 2x = 1 - 2m - \sin 2x$ có đúng 2 nghiệm thuộc $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{2\pi}{3} \right)$.

Lời giải

Trả lời: 1



Dựa vào đường tròn lượng giác ta thấy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc

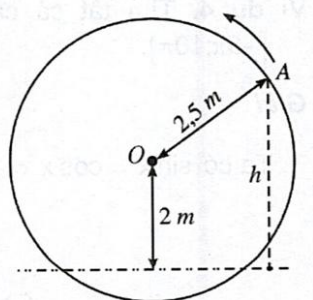


$$\left[\frac{\pi}{12}; \frac{2\pi}{3} \right) \text{ khi } \frac{1}{2} \leq \frac{1-2m}{m+2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2m}{m+2} < 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1-2m}{m+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+3m}{m+2} > 0 \\ \frac{5m}{m+2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < -2 \\ -2 < m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m \leq 0.$$

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{3}; 0 \right]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 52: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right)$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gàu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gàu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

Khi nào chiếc gàu ở vị trí cao nhất lần đầu tiên?

Lời giải

Trả lời: 0,5

$$\forall t \quad -1 \leq \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 1 \text{ nên } -2,5 \leq 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 2,5 \text{ và do đó ta có}$$

$$-0,5 = 2 - 2,5 \leq 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 2 + 2,5 = 4,5 \forall x \in \mathbb{R}.$$

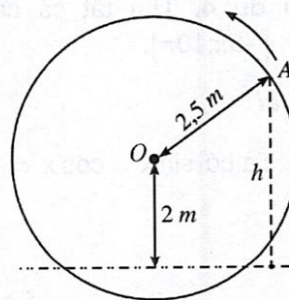
Suy ra, gàu ở vị trí cao nhất khi

$$\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy gàu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm $\frac{1}{2}$ phút.

Câu 53: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right)$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gàu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gàu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

Khi nào chiếc gầu ở vị trí thấp nhất?

Lời giải

Trả lời: 0

Vì $-1 \leq \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 1$ nên $-2,5 \leq 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 2,5$ và do đó ta có

$$-0,5 = 2 - 2,5 \leq 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 2 + 2,5 = 4,5 \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra, gầu ở vị trí thấp nhất khi và chỉ khi

$$\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm $0, 1, 2, 3, \dots$ phút.

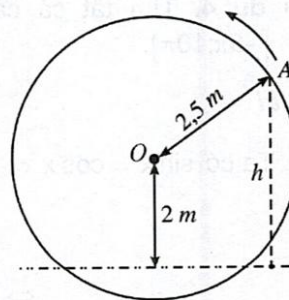
b) Gầu cách mặt nước $2m$ khi $2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = 2$

$$\Leftrightarrow \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy chiếc gầu cách mặt nước $2m$ lần đầu tiên tại thời điểm $x = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 54: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $2,5m$; trục của nó đặt cách mặt nước $2m$ (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right)$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

Chiếc gầu cách mặt nước $2m$ lần đầu tiên khi nào?

Lời giải

Trả lời: 0,25



Gầu cách mặt nước $2m$ khi $2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = 2$

$$\Leftrightarrow \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy chiếc gầu cách mặt nước $2m$ lần đầu tiên tại thời điểm $x = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 55: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số $L(t) = 12 + 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right)$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày thứ bao nhiêu trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Trả lời: 353

Vì $-1 \leq \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right) \leq 1$ nên $-2,83 \leq 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right) \leq 2,83$, do đó

$$9,17 = 12 - 2,83 \leq 12 + 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right) \leq 12 + 2,83 = 14,83 \forall t \in \mathbb{R}$$

Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin \left[\frac{2\pi}{365}(t-80) \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{45}{4} + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 1$, suy ra $t = -\frac{45}{4} + 365 = 353,75$. Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm.

Câu 56: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số $L(t) = 12 + 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right)$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Trả lời: 171

Vì $-1 \leq \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right) \leq 1$ nên $-2,83 \leq 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right) \leq 2,83$, do đó

$$9,17 = 12 - 2,83 \leq 12 + 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right) \leq 12 + 2,83 = 14,83 \forall t \in \mathbb{R}$$

Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin \left[\frac{2\pi}{365}(t-80) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 171,25 + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$, suy ra $t = 171,25$. Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm.

Câu 57: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số $L(t) = 12 + 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right)$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm lần đầu thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải



Trả lời: 34

Vì $-1 \leq \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 1$ nên $-2,83 \leq 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 2,83$, do đó

$$9,17 = 12 - 2,83 \leq 12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 12 + 2,83 = 14,83 \forall t \in \mathbb{R}$$

Thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$$12 + 2,83 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = 10 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = -\frac{200}{283} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{365}(t-80) \approx -0,78 + k2\pi \\ \frac{2\pi}{365}(t-80) \approx 3,93 + k2\pi \end{cases}$$

Từ đó ta được $\begin{cases} t \approx 34,69 + 365k \\ t \approx 308,30 + 365k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$ suy ra $t \approx 34,69$ hoặc $t \approx 308,30$. Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm.

Câu 58: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$, ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo giây. Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100mmHg.

Lời giải

Trả lời: 2

Huyết áp là 100mmHg khi và chỉ khi

$$P(t) = 100 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3k}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3k}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\} \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 mmHg.

Câu 59: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$, ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo giây. Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120mmHg.

Lời giải

Trả lời: 1



Huyết áp là 120mmHg khi và chỉ khi

$$P(t) = 120 \Leftrightarrow 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0 \text{ vì } k \in \mathbb{Z}$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 mmHg .

Câu 60: Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(\text{cm})$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t \leq 24$) cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10$. Hỏi vào thời điểm nào trong ngày mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 20

$$\text{Ta có } 3\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10 \leq 13$$

$$\text{Mà } 3\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10 = 13 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = 24k - 4 (k \in \mathbb{Z}) \text{ nên}$$

$$0 \leq 24k - 4 \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = 20.$$

Vậy vào thời điểm $20h$ trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất là $13(\text{cm})$.

Câu 61: Số giờ có ánh sáng mặt trời của Thủ đô Hà Nội năm 2023 được cho bởi công thức $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{180}(x + 60)\right) + 13$ với $1 \leq x \leq 365$ là số thứ tự của ngày trong năm. Ngày nào sau đây của năm 2023 thì số giờ có ánh sáng mặt trời của Hà Nội lớn nhất?



Lời giải

Trả lời: 30

Để số giờ có ánh sáng mặt trời lớn nhất thì hàm số $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{180}(x + 60)\right) + 13$ đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó $\sin\left(\frac{\pi}{180}(x + 60)\right) = 1 \Leftrightarrow x = 30 + k360, k \in \mathbb{Z}$. Vì $1 \leq x \leq 365$ nên ta có



$$1 \leq 30 + k360 \leq 365 \Leftrightarrow -0,08 \leq k \leq 0,93 \Rightarrow k = 0.$$

Do đó $x = 30$ (tháng đầu tiên của năm).

