



DÃY SỐ

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 5: DÃY SỐ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn.

Kí hiệu:

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n).$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots,$$

trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n) , và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

Chú ý: Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = c$ thì u_n là dãy số không đổi.

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2. CÁC CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

a) Dãy số cho bằng liệt kê các số hạng

b) Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

c) Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

d) Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Cách cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

Cho số hạng đầu.

Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng đứng trước nó.

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.



Chú ý: Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, \dots$ không tăng cũng không giảm.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Lưu ý: + Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi u_1

+ Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi u_1



HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ

Bài toán 1: Cho dãy số $(u_n): u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k .



PHƯƠNG PHÁP.

Tự luận: Thay trực tiếp $n = k$ vào u_n .

MTCT: Dùng chức năng CALC:

Nhập: $f(x)$

Bấm r nhập $X = k$

Bấm $= \rightarrow$ Kết quả



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$. Tìm số hạng u_6 .

Lời giải

Cách 1: Giải theo tự luận:



Thế trực tiếp: $u_6 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^6 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^6 = 8.$

Cách 2: Dùng chức năng CALC của máy tính cầm tay:

Nhập: $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x \right]$

Bấm **CALC** nhập $X = 6$

Máy hiện: 8

Câu 2: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

Lời giải

Cách 1: Giải theo tự luận:

Giả sử $u_n = \frac{167}{84} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250.$

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

Cách 2: Sử dụng MTCT:

Nhập: $\frac{2x+1}{x+2}$

Bấm **CALC** nhập $X = 250$

Máy hiện: $\frac{167}{84}$

Bài toán 2: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .



PHƯƠNG PHÁP.

Tự luận: Tính lần lượt $u_2; u_3; \dots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2 , thế u_2 vào u_3 , ..., thế u_{k-1} vào u_{k+1} .

MTCT: Cách lập quy trình bấm máy:

- Nhập giá trị của số hạng u_1 : $a =$

- Nhập biểu thức của $u_{n+1} = f(u_n)$

- Lặp dấu = lần thứ $k-1$ cho ra giá trị của số hạng u_k .



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 3: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_{10} .

Lời giải

Cách 1: Giải theo tự luận:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1 + 2}{u_1 + 1} = \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2} & ; & \quad u_3 = \frac{u_2 + 2}{u_2 + 1} = \frac{\frac{3}{2} + 2}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{7}{5} & ; & \quad u_4 = \frac{u_3 + 2}{u_3 + 1} = \frac{\frac{7}{5} + 2}{\frac{7}{5} + 1} = \frac{17}{12} & ; \\ u_5 &= \frac{u_4 + 2}{u_4 + 1} = \frac{\frac{17}{12} + 2}{\frac{17}{12} + 1} = \frac{41}{29} & ; & \quad u_6 = \frac{u_5 + 2}{u_5 + 1} = \frac{\frac{41}{29} + 2}{\frac{41}{29} + 1} = \frac{99}{70} & ; & \quad u_7 = \frac{u_6 + 2}{u_6 + 1} = \frac{\frac{99}{70} + 2}{\frac{99}{70} + 1} = \frac{239}{169} \\ u_8 &= \frac{u_7 + 2}{u_7 + 1} = \frac{\frac{239}{169} + 2}{\frac{239}{169} + 1} = \frac{577}{408} & ; & \quad u_9 = \frac{u_8 + 2}{u_8 + 1} = \frac{\frac{577}{408} + 2}{\frac{577}{408} + 1} = \frac{1393}{985} & ; & \quad u_{10} = \frac{u_9 + 2}{u_9 + 1} = \frac{\frac{1393}{985} + 2}{\frac{1393}{985} + 1} = \frac{3363}{2378} \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng MTCT:

Lập quy trình bấm phím tính số hạng của dãy số như sau:

Nhập: 1 [=] (u_1)

Nhập $\frac{\boxed{\text{ANS}} + 2}{\boxed{\text{ANS}} + 1}$

Lắp dấu [=] ta được giá trị số hạng $u_{10} = \frac{3363}{2378}$.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$. Tìm số hạng u_{50} .

Lời giải

Cách 1: Giải theo tự luận:

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= u_1 + 2 \\ u_3 &= u_2 + 2 \\ &\dots \\ u_{50} &= u_{49} + 2 \end{aligned}$$



Cộng theo về các đẳng thức trên, ta được:

$$u_{50} = 1 + 2.49 = 99$$

Cách 2: Sử dụng MTCT:

Lập quy trình bấm phím tính số hạng của dãy số như sau:

Nhập: 1 [=] (u_1)

Nhập [=] + 2

Lặp dấu [=] ta được giá trị số hạng $u_{50} = 99$.

Bài toán 3: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

1 PHƯƠNG PHÁP.

Tự luận: Tính lần lượt $u_3; u_4; \dots; u_k$ bằng cách thế u_1, u_2 vào u_3 ; thế u_2, u_3 vào u_4 ; ...; thế u_{k-2}, u_{k-1} vào u_k .

MTCT: Cách lập quy trình bấm máy:

- Nhập $C = c.B + d.A + e : A = B : B = C$
- Bấm r nhập $B = b$, ấn =, nhập $A = a$ ấn =
- Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-2$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k .

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_8 .

Lời giải

Cách 1: Giải theo tự luận:

$$u_3 = 2u_2 + 3u_1 + 5 = 12 \quad u_4 = 2u_3 + 3u_2 + 5 = 35 \quad u_5 = 2u_4 + 3u_3 + 5 = 111$$

$$u_6 = 2u_5 + 3u_4 + 5 = 332 \quad u_7 = 2u_6 + 3u_5 + 5 = 1002 \quad u_8 = 2u_7 + 3u_6 + 5 = 3005$$

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay:

Sử dụng 3 ô nhớ: [A]: chứa giá trị của u_n

[B]: chứa giá trị của u_{n+1}



$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+2}

Lập quy trình bấm máy:

Nhập: $C = 2B + 3A + 5 : A = B : B = C$

Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $B = 2$, ấn $\boxed{=}$, nhập $A = 1$ ấn $\boxed{=}$

Lặp dấu $\boxed{=}$ cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 6 thì đó là giá trị của số hạng u_8 bằng 3005.

Bài toán 4: Cho dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(n, u_n) \end{cases}$. Trong đó $f(n, u_n)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n . Hãy tìm số hạng u_k .



PHƯƠNG PHÁP.

Tự luận: Tính lần lượt $u_2; u_3; \dots; u_k$ bằng cách thế $\{1, u_1\}$ vào u_2 ; thế $\{2, u_2\}$ vào u_3 ; ...; thế $\{k-1, u_{k-1}\}$ vào u_k .

MTCT: Cách lập quy trình bấm máy:

- Sử dụng 3 ô nhớ: $\boxed{A}$: chứa giá trị của n

$\boxed{B}$: chứa giá trị của u_n

$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+1}

- Lập công thức tính u_{n+1} thực hiện gán $\boxed{A} := \boxed{A} + 1$ và $\boxed{B} := \boxed{C}$ để tính số hạng tiếp theo của dãy

- Lặp phím dấu $\boxed{=}$ cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ $k-1$ thì đó là giá trị của số hạng u_k .



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_{11} .

Lời giải

Cách 1: Giải theo tự luận:

$$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + 1) = \frac{1}{2} \quad u_3 = \frac{2}{3}(u_2 + 1) = 1 \quad u_4 = \frac{3}{4}(u_3 + 1) = \frac{3}{2} \quad u_5 = \frac{4}{5}(u_4 + 1) = 2$$



$$u_6 = \frac{5}{6}(u_5 + 1) = \frac{5}{2} \quad u_7 = \frac{6}{7}(u_6 + 1) = 3 \quad u_8 = \frac{7}{8}(u_7 + 1) = \frac{7}{2} \quad u_9 = \frac{8}{9}(u_8 + 1) = 4$$

$$u_{10} = \frac{9}{10}(u_9 + 1) = \frac{9}{2} \quad u_{11} = \frac{10}{11}(u_{10} + 1) = 5$$

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay:

Sử dụng 3 ô nhớ: $\boxed{A}$: chứa giá trị của n

$\boxed{B}$: chứa giá trị của u_n

$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+1}

Lập quy trình bấm máy:

$$\text{Nhập: } C = \frac{A}{A+1}(B+1); A = A + 1; B = C$$

Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $A = 1$, ấn $=$, nhập $B = 0$ ấn $=$

Lặp dấu $=$ cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 10 thì đó là giá trị của số hạng u_{11} bằng 5.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$$
. Tìm số hạng u_{50} .

Lời giải

Cách 1: Giải theo tự luận:

Từ giả thiết ta có:

$$u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = u_1 + 2.2$$

$$u_3 = u_2 + 2.3$$

...

$$u_{50} = u_{49} + 2.50$$

Cộng theo về các đẳng thức trên, ta được:

$$u_{50} = \frac{1}{2} + 2.(2 + 3 + \dots + 50) = \frac{1}{2} + 2.\sum_{x=2}^{50} x = 2548,5$$

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay:

$$\text{Nhập: } C = B + 2A; A = A + 1; B = C$$

Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $B = \frac{1}{2}$, ấn $=$, nhập $A = 1$ ấn $=$



Lập dấu = cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 49 thì đó là giá trị của số hạng u_{50} bằng 2548,5.

DẠNG 2: XÉT TÍNH TĂNG, GIẢM CỦA DÃY SỐ



PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1: Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

Nếu $u_{n+1} - u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.

Nếu $u_{n+1} - u_n < 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2 : Khi $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3 : Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n \forall n \in \mathbb{N}^*$

*** Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số**

Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ tăng khi $a > 0$ và giảm khi $a < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$

Không tăng, không giảm khi $q < 0$

Giảm khi $0 < q < 1$

Tăng khi $q > 1$

Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn+d > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Tăng khi $ad - bc > 0$

Giảm khi $ad - bc < 0$

Dãy số đan dấu cũng là dãy số không tăng, không giảm

Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $(q^n \cdot u_n)$ không tăng, không giảm

Dãy số (u_n) có $u_{n+1} = au_n + b$ tăng nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$; giảm nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$ và không tăng không giảm nếu $a < 0$



Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ tăng nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$ và giảm nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$

Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ không tăng không giảm nếu $ad - bc < 0$

Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow \\ (v_n) \uparrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \uparrow$	Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow \\ (v_n) \downarrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \downarrow$
Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow; u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \uparrow; v_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì dãy số $(u_n \cdot v_n) \uparrow$	Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow; u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \downarrow; v_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì dãy số $(u_n \cdot v_n) \downarrow$
Nếu $(u_n) \uparrow$ và $u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt{u_n}) \uparrow$ và dãy số $((u_n)^m) \uparrow \forall m \in \mathbb{N}^*$	Nếu $(u_n) \downarrow$ và $u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt{u_n}) \downarrow$ và dãy số $((u_n)^m) \downarrow \forall m \in \mathbb{N}^*$
Nếu $(u_n) \uparrow$ và $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\frac{1}{u_n}\right) \downarrow$	Nếu $(u_n) \downarrow$ và $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\frac{1}{u_n}\right) \uparrow$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 8: Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) biết $u_n = 3n + 6$.

Lời giải

Ta có $u_n = 3n + 6 \Rightarrow u_{n+1} = 3(n+1) + 6 = 3n + 9$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = (3n + 9) - (3n + 6) = 3 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng

Giải nhanh: Dãy này có dạng $u_n = an + b$; $a = 3 > 0$ nên dãy số tăng

Câu 9: Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{n+5}{n+2}$.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{n+5}{n+2} = 1 + \frac{3}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{3}{n+3}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} = \frac{-3}{(n+2)(n+3)} < 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số giảm



Giải nhanh: Dãy này có dạng $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$

Mẫu $n+2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $ad-bc = 2-5 = -3 < 0$ nên (u_n) là dãy số giảm

Câu 10: Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{5^n}{n^2}$.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{5^n}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}$

$$\begin{aligned} \text{Xét tỉ số } \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{5^n} = \frac{5n^2}{n^2+2n+1} = \frac{n^2+2n+1+4n^2-2n-1}{n^2+2n+1} \\ &= 1 + \frac{2n(n-1)+2n^2-1}{n^2+2n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng

Câu 11: Cho dãy số (u_n) biết $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \frac{3u_{n-1}+1}{4} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Lời giải

Ta dự đoán dãy số giảm sau đó ta sẽ chứng minh nó giảm

$$\text{Ta có } u_n - u_{n-1} = \frac{3u_{n-1}+1}{4} - u_{n-1} = \frac{1-u_{n-1}}{4}$$

Do đó, để chứng minh dãy (u_n) giảm ta chứng minh $u_n > 1 \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy

Với $n=1 \Rightarrow u_1 = 2 > 1$

$$\text{Giả sử } u_k > 1 \Rightarrow u_{k+1} = \frac{3u_k+1}{4} > \frac{3+1}{4} = 1$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có $u_n > 1 \forall n \geq 1$

Suy ra $u_n - u_{n-1} < 0 \Leftrightarrow u_n < u_{n-1} \quad \forall n \geq 2$ hay dãy (u_n) giảm

Giải nhanh: Dãy (u_n) có dạng $u_{n+1} = au_n + b$

Ở đây $a = \frac{3}{4} > 0$ và $u_2 - u_1 = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4} < 0$ Suy ra dãy số giảm



Tổng quát ta có thể chứng minh dãy số (u_n) :
$$\begin{cases} u_1 = c > 1 \\ u_n = \frac{au_{n-1} + b}{a + b}, (a, b > 0) \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$
 giảm tương tự như trên.

DẠNG 3: XÉT TÍNH BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ



PHƯƠNG PHÁP.

Phương pháp 1: Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Cách 1: Dãy số (u_n) có $u_n = f(n)$ là hàm số đơn giản.

Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $u_n = f(n) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hoặc $u_n = f(n) \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Cách 2: Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_k + \dots + v_n$

Ta làm trội $v_k \leq a_k - a_{k+1}$

Lúc đó $u_n \leq (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1})$

Suy ra $u_n \leq a_1 - a_{n+1} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Cách 3: Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot \dots \cdot v_n$ với $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta làm trội $v_k \leq \frac{a_{k+1}}{a_k}$

Lúc đó $u_n \leq \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Suy ra $u_n \leq \frac{a_{n+1}}{a_1} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Phương pháp 2: Dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh

Chú ý: Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên, dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới

*** Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số bị chặn**

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ ($|q| \leq 1$) bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ ($q < -1$) không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ với $q > 1$ bị chặn dưới

Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$



Dãy số (u_n) có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$ và bị chặn trên nếu $a_m < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = q^n (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0)$ với $a_m \neq 0$ và $q < -1$ không bị chặn

Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt[3]{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$ và bị chặn trên nếu $a_m < 0$

Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$

Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 12: Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{-1}{2n+3}$.

Lời giải

Ta có $2n+3 \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq \frac{-1}{2n+3} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow -\frac{1}{5} \leq u_n < 0$$

Suy ra dãy số (u_n) bị chặn

Giải nhanh: dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên bị chặn

Câu 13: Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{4n+5}{n+1}$.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{4n+5}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{4n+5}{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{n+1} = 4 + \frac{1}{n+1} \leq 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow u_n \leq \frac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$



Suy ra $0 < u_n \leq \frac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn

Giải nhanh: dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử bằng bậc của mẫu nên bị chặn

Câu 14: Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{n^3}{n^2 + 1}$.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{n^3}{n^2 + 1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới

Câu 15: Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Lời giải

Xét $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2$

Suy ra $u_n < \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 0 < u_n < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) bị chặn

DẠNG 4: TÍNH TỔNG CỦA DÃY SỐ

Dạng 4.1: Tính tổng của dãy số cách đều



PHƯƠNG PHÁP.

Giải sử cần tính tổng: $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Trong đó: $a_n = a_{n-1} + d$

- Tự luận:

Ta có: $2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$

Từ đó suy ra: $S = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

- Trắc nghiệm:

Công thức tính nhanh:

+ Số hạng tổng quát của dãy số cách đều là: $u_n = u_1 + (n-1)d$ với d là khoảng cách giữa 2 số hạng



+ Số số hạng $=: + 1$

+ Tổng $= \bullet: 2$

- Casio

Bước 1: Từ công thức của tổng tìm số hạng tổng quát của tổng và số số hạng.

Bước 2: Sử dụng công cụ tính: $\sum$ y nhập số hạng tổng quát của dãy số y nhập x chạy từ 1 tới $n =$ số số hạng $y =$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 16: Tính $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 4001$?

Lời giải

Ta có: $2S = (1 + 4001) + (3 + 3999) + (5 + 3997) + \dots + (4001 + 1) = 4002 \cdot 2001$

$$\Rightarrow S = \frac{4002 \cdot 2001}{2} = 4004001$$

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:

$$\text{Số số hạng: } n = \frac{4001 - 1}{2} + 1 = 2001$$

$$\text{Tổng: } S = \frac{(1 + 4001) \cdot 2001}{2} = 4004001$$

+) Giải theo Casio

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = u_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$

Số số hạng của dãy là 2001

Nhập máy tính cho ta kết quả: 4004001

+) Những sai lầm thường gặp:

- Tính sai số số hạng của dãy
- Tìm sai công thức số hạng tổng quát của dãy số khi làm với máy tính Casio

Lời bình: Nhận thấy việc tìm số hạng tổng quát của dãy đối với HS trung bình, yếu là tương đối khó khăn. Vì thế ta nên sử dụng công thức giải nhanh để tìm số số hạng và tổng của dãy một cách nhanh chóng. Ở bài tập này thì việc vận dụng công thức tính nhanh sẽ nhanh hơn Casio nhé các em!

Câu 17: Cho tổng $S(n) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$. Khi đó S_{30} bằng?

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{30} = 2 + 4 + 6 + \dots + 60$$

$$2S = (2 + 60) + (4 + 58) + (6 + 56) + \dots + (60 + 2)$$



$$S(n) = \frac{(2+60) \cdot 30}{2} = 930$$

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:

Số hạng thứ 30: $u_{30} = 2 \cdot 30 = 60$ Số số hạng: $n = 30$ Tổng: $S = \frac{(2+60) \cdot 30}{2} = 930$

+) Giải theo Casio

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: $2n$

Số số hạng của dãy là: 30

Nhập máy tính cho ta kết quả: 930

Những sai lầm thường gặp:

- Tìm sai số hạng thứ n .

Lời bình: Trong bài tập này HS cần chú ý tới số hạng tổng quát trong dãy đã cho sẵn. Từ đó sử dụng để tìm số hạng thứ n hoặc sử dụng trong việc bấm máy tính Casio một cách nhanh chóng tìm được kết quả.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 150$ và $u_n = u_{n-1} - 3$ với mọi $n \geq 2$ Khi đó tổng 100 số hạng đầu tiên là:

Lời giải

+) Giải tự luận:

Ta có:

$$u_2 = u_1 - 3 = 150 - 3 = 150 - 1 \cdot 3 = 147$$

$$u_3 = u_2 - 3 = 150 - 3 - 3 = 150 - 2 \cdot 3 = 144$$

$$u_{100} = u_{99} - 3 = 150 - 99 \cdot 3 = -147$$

$$S_{100} = 150 + 147 + 144 + \dots + (-147)$$

$$2S_{100} = (150 - 147) + (147 - 144) + (144 - 141) + \dots + (-147 + 150)$$

$$S_{100} = \frac{(150 - 147) \cdot 100}{2} = 150$$

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:

Số hạng thứ 100: $u_{100} = u_1 + (n-1)d = 150 + 99 \cdot (-3) = -147$

Số số hạng: $n = 100$

Tổng: $S = \frac{(150 - 147) \cdot 100}{2} = 150$

+) Giải theo Casio

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = 150 - 3(n-1) = -3n + 153$

Số số hạng của dãy là: $n = 100$

Nhập máy tính cho ta kết quả: 150



Những sai lầm thường gặp:

- Tìm sai số hạng thứ n của dãy
- Tìm sai công thức số hạng tổng quát của dãy số khi làm với máy tính Casio

Lời bình: HS cần ghi nhớ công thức số hạng tổng quát của dãy số cách đều để sử dụng tìm số hạng thứ n và rút ra công thức số hạng tổng quát của dãy một cách nhanh chóng để xử lý bài toán.

Dạng 4.2: Tính tổng của dãy số bằng phương pháp khử liên tiếp

1 PHƯƠNG PHÁP.

Giả sử cần tính tổng: $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

- Tự luận:

Bước 1: Ta tìm cách tách: $a_1 = b_1 - b_2$; $a_2 = b_2 - b_3$;

Bước 2: Rút gọn: $S = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \dots + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$

- Trắc nghiệm:

+ Một số công thức tách thường sử dụng:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{a}{n(n+a)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} \quad \bullet \frac{2a}{n(n+a)(n+2a)} = \frac{1}{n(n+a)} - \frac{1}{(n+a)(n+2a)} \\ \bullet \frac{2na+a^2}{n^2(n+a)^2} &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+a)^2} \quad \bullet n.n! = (n+1)! - n! \end{aligned}$$

+ Nhận định kết quả của tổng là: $S = b_1 - b_{n+1}$

- Casio:

Làm tương tự như dạng 1

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 19: Tính tổng sau: $S = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{97.99}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$; ...

Do đó: $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:



Nhận thấy: $\frac{1}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}; \frac{1}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}; \dots$

Nhận định: $S = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$

+) Giải bằng Casio

Số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

Số số hạng của dãy là: $n = 49$ ($2n-1 = 97 \Leftrightarrow n = 49$)

Nhập máy tính cho ta kết quả: $S = \frac{98}{99}$

Những sai lầm thường gặp:

- Tách sai các số hạng
- Tìm sai số hạng tổng quát của dãy số

Lời bình: Học sinh cần chuyển các số hạng của dãy về đúng dạng và tách theo công thức:

• $\frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$. Ở bài tập này việc làm bằng máy tính Casio là khó khăn và phức tạp hơn vì chưa có sẵn số hạng tổng quát và số số hạng.

Câu 20: Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Khi đó công thức của S_n là:

Lời giải

Ta có: $\frac{2.1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}; \frac{2.1}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}; \dots$

Suy ra:

$$2S_n = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\text{Vậy: } S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:

Nhận thấy: $\frac{2.1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}; \frac{2.1}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}; \dots$

$$\text{Nhận định: } S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Những sai lầm thường gặp:

- Tách sai các số hạng

Lời bình: Học sinh cần chuyển các số hạng của dãy về đúng dạng và tách theo công thức:



$$\bullet \frac{2a}{n(n+a)(n+2a)} = \frac{1}{n(n+a)} - \frac{1}{(n+a)(n+2a)}$$

Câu 21: Cho tổng $S_n = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$. Tính S_{10}

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } \frac{3}{(1.2)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4}; \frac{5}{(2.3)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}; \dots$$

$$\text{Suy ra: } S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$\text{Vậy: } S_{10} = \frac{10(10+2)}{(10+1)^2} = \frac{120}{121}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } S_{10} = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{21}{(10.11)^2}$$

$$\text{Suy ra: } S_{10} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{11^2} = \frac{120}{121}$$

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:

$$\text{Nhận thấy: } \frac{3}{(1.2)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4}; \frac{5}{(2.3)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}; \dots$$

$$\text{Nhận định: } S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}. \text{ Suy ra: } S_{10} = \frac{10(10+2)}{(10+1)^2} = \frac{120}{121}$$

+) Casio

$$\text{Công thức số hạng tổng quát của dãy là: } u_n = \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

Số số hạng của dãy là: $n=10$

$$\text{Nhập máy tính cho ta kết quả: } \frac{120}{121}$$

Những sai lầm thường gặp:

- Tách sai các số hạng

Lời bình: Học sinh cần chuyển các số hạng của dãy về đúng dạng và tách theo công thức:

$$\bullet \frac{2na+a^2}{n^2(n+a)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+a)^2}.$$



Dạng 4.3: Tính tổng bằng cách chuyển về phương trình có ẩn là tổng cần tính

1 PHƯƠNG PHÁP.

Giả sử cần tính tổng: $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

- **Tự luận:**

Sơ đồ giải: Từ công thức của tổng S ta chuyển về phương trình chứa ẩn S Giải pt S

- **Trắc nghiệm:**

Tổng có dạng: $S = u_1 + u_1a + u_1a^2 + \dots + u_1a^n \Rightarrow S = \frac{u_1(a^{n+1} - 1)}{a - 1}$ với $a \neq 1$

- **Casio:**

Làm tương tự như dạng 1

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 22: Tính tổng: $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{50}$?

Lời giải

Ta có: $3S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{51}$

$\Rightarrow 3S - S = (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{51}) - (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{50})$

$\Rightarrow 2S = 3^{51} - 1 \Rightarrow S = \frac{3^{51} - 1}{2}$.

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:

Áp dụng công thức tính nhanh với $u_1 = 1; a = 3$ ta có: $S = \frac{3^{51} - 1}{2}$.

+) Giải theo Casio

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = 3^{n-1}$

Số số hạng của dãy là: $n = 51$

Nhập máy tính cho ta kết quả: $1,076846982 \cdot 10^{24}$.

Ta gán: $1,076846982 \cdot 10^{24} \rightarrow A$

Lấy từng kết quả ở 4 đáp án trừ cho A khi nào bằng 0 thì chọn đáp án đó.

+) Những sai lầm thường gặp:

- Tìm sai số hạng tổng quát của dãy số



Lời bình: Khi làm với máy tính Caiso các em cần tìm chính xác số hạng tổng quát của dãy số việc này quyết định máy có đưa ra được kết quả chính xác hay không. Ở bài tập này nếu các em thuộc được công thức tính nhanh thì ta có thể giải quyết bài toán hết sức nhanh chóng. Chú ý rằng bài toán này có thể hạn chế Casio bằng cách cho 2 đáp án ở “gần nhau” chẳng hạn phương án

B. $\frac{3^{51}}{2}$ thì khi làm bằng Casio sẽ có 2 đáp án không phân biệt được là

B và C

Câu 23: Tính tổng $S = 4 \cdot 5^{100} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \right) + 1$?

Lời giải

$$\text{Đặt: } M = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{100}}$$

$$\text{Ta có: } 5M = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{99}}$$

$$\Rightarrow 5M - M = \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{99}} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \right) = 1 - \frac{1}{5^{100}}$$

$$\Rightarrow 4M = 1 - \frac{1}{5^{100}} \Rightarrow M = \frac{5^{100} - 1}{4 \cdot 5^{100}}$$

$$\Rightarrow S = 4 \cdot 5^{100} \cdot \frac{5^{100} - 1}{4 \cdot 5^{100}} + 1 = 5^{100}$$

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:

$$\text{Đặt: } M = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{100}}$$

$$\text{Áp dụng công thức tính nhanh với: } u_1 = \frac{1}{5}; a = \frac{1}{5} \text{ ta có: } M = \frac{\frac{1}{5} \left(\left(\frac{1}{5} \right)^{100} - 1 \right)}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{5^{100} - 1}{4 \cdot 5^{100}}$$

$$\Rightarrow S = 4 \cdot 5^{100} \cdot \frac{5^{100} - 1}{4 \cdot 5^{100}} + 1 = 5^{100}$$

Câu 24: Tính tổng: $S = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(1 - \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$. Tính S_{10}

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } S_{10} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^3} \right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2^{10}} \right) = 10 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$\text{Đặt: } M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$$



Ta có: $2M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9}$

$$\Rightarrow 2M - M = M = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow S = 10 - 1 + \frac{1}{2^{10}} = 9 + \frac{1}{2^{10}}$$

Cách 2:

Ta có: $S_n = n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$

Đặt: $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$

Ta có: $2M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\Rightarrow 2M - M = M = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow S_n = n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow S_{10} = 10 - 1 + \frac{1}{2^{10}} = 9 + \frac{1}{2^{10}}$$

+) Giải theo phương pháp trắc nghiệm:

Ta có: $S_{10} = 10 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}\right)$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{10} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow S = 10 - 1 + \frac{1}{2^{10}} = 9 + \frac{1}{2^{10}}$$

+) Giải theo Casio

Nhận xét: $S_n = n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$

Nhập máy tính tổng $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$ với số hạng tổng quát: $u_n = \frac{1}{2^n}$, số số hạng: $u_n = 10$

ta được kết quả: $\frac{1023}{1024}$. Nhập tiếp: $10 - \text{Ans}$ được kết quả: $\frac{9217}{1024}$



Ta gán: $\frac{9217}{1024} \rightarrow A$

Lấy từng kết quả ở 4 đáp án trừ cho A khi nào bằng 0 thì chọn đáp án đó.

Dạng 4.4: Tính tổng bằng cách đưa về các tổng đã biết

1 PHƯƠNG PHÁP.

Giải sử cần tính tổng: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

- **Tự luận:**

Tìm cách tách: $S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$. Trong đó: $S_1; S_2; S_3 \dots$ đã biết công thức tính tổng.

- **Trắc nghiệm:**

Ta có thể dùng phương pháp thử giá trị n vào các đáp án để loại trừ và chọn ra đáp án đúng.

- **Casio:**

Làm tương tự như dạng 1

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 25: Tính: $S_n = 1.3 + 2.5 + 3.7 + \dots + n(2n+1)$. Biết rằng:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^n i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lời giải

$$S = \sum_{i=1}^n i(2i+1) = \sum_{i=1}^n (2i^2 + i) = 2 \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

Câu 26: Cho: $S_n = 1.2 + 3.4 + 5.6 + \dots + (2n-1).2n$. Tính S_{100} biết rằng:

$$\sum_{i=1}^n 2i = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1); \quad \sum_{i=1}^n i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lời giải

Ta

$$\text{có: } S_n = \sum_{i=1}^n 2i(2i-1) = \sum_{i=1}^n (4i^2 - 2i) = 4 \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n 2i = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

$$\Rightarrow S_{100} = \frac{100.(100+1)(4.100-1)}{3} = 1343300$$

Câu 27: Cho tổng: $S_n = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + n.(3n+1)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Biết: $S_k = 294$. Giá trị của k là:

Lời giải



$$\text{Ta có: } S_n = \sum_{i=1}^n i(3i+1) = \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)^2$$

$$\Rightarrow S_k = k(k+1)^2 = 294 \Leftrightarrow k^3 + 2k^2 + k = 294 \Leftrightarrow (k-6)(k^2 + 8k + 49) = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

DẠNG 5: XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

1

PHƯƠNG PHÁP.

Nếu (u_n) có dạng $u_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ thì biến đổi a_k thành hiệu của hai số hạng, dựa vào đó thu gọn u_n .

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi, tính vài số hạng đầu của dãy số, từ đó dự đoán công thức tính u_n theo n , rồi chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp.

Ngoài ra cũng có thể tính hiệu $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó để tìm công thức tính (u_n) theo n .

2

BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 28: Cho dãy số (a_n) có $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$. Đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Xác định công thức tính (u_n) theo n .

Lời giải

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, do đó:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Câu 29: Xác định công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có:

$$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

$$u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$$

$$u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$$

$$u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11.$$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$$u_n = 2n + 1 \quad \forall n \geq 1 (*)$$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh công thức $(*)$ đúng.



Với $n=1; u_1 = 2.1+1=3$. Vậy (*) đúng với $n=1$.

Giả sử (*) đúng với $n=k$. Có nghĩa ta có: $u_k = 2k+1$ (2)

Ta cần chứng minh (*) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$$u_{k+1} = 2(k+1)+1 = 2k+3.$$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$$u_{k+1} = u_k + 2 = 2k+1+2 = 2k+3.$$

Vậy (*) đúng khi $n=k+1$. Kết luận (*) đúng với mọi số nguyên dương n .

Câu 30: Xác định công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = u_n + n^3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = n^3$.

Từ đó suy ra:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 - u_1 = 1^3$$

$$u_3 - u_2 = 2^3$$

$$u_4 - u_3 = 3^3$$

.....

$$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^3$$

$$u_n - u_{n-1} = (n-1)^3$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên:

$$u_1 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \dots + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1} = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-2)^3 + (n-1)^3$$

$$\Leftrightarrow u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-2)^3 + (n-1)^3.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4}$

$$\text{Vậy } u_n = 1 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

Mở rộng phương pháp:



Nếu dãy số (u_n) được cho dưới dạng liệt kê thì ta có thể thử giá trị n vào từng đáp án.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi tính vài số hạng đầu của dãy số sau đó ta có thể thử giá trị n vào từng đáp án.

