



DÃY SỐ

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 5: DÃY SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, n \geq 1 \end{cases}$. Giá trị của n để $-u_n + 2017n + 2018 = 0$ là

Lời giải

Trả lời: 2018

Ta có:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + 2.1 + 1$$

$$u_3 = u_2 + 2.2 + 1$$

$$u_4 = u_3 + 2.3 + 1$$

....

$$u_n = u_{n-1} + 2(n-1) + 1$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được:

$$u_n = 2(1+2+3+\dots+n-1) + n = 2 \cdot \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} + n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Do đó: } -u_n + 2017n + 2018 = 0 \Leftrightarrow -n^2 + 2017n + 2018 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 2018 \end{cases}$$

Vậy $n = 2018$.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, (n \geq 1) \end{cases}$. Giá trị của n để $-u_n + 2022n + 2023 = 0$ là

Lời giải

Trả lời: 2023

Ta có:



$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + 2.1 + 1$$

$$u_3 = u_2 + 2.2 + 1$$

$$u_4 = u_3 + 2.3 + 1$$

....

$$u_n = u_{n-1} + 2(n-1) + 1$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được:

$$u_n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) + n = 2 \cdot \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} + n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Do đó: } -u_n + 2022n + 2023 = 0 \Leftrightarrow -n^2 + 2022n + 2023 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 2023 \end{cases}.$$

Vậy $n = 2023$.

Câu 3: Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = \sqrt{5}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 4}$. Tính u_{2024} làm tròn đến hàng đơn vị.

Lời giải

Trả lời: 90

Ta có

$$u_1 = \sqrt{5} = \sqrt{4.1 + 1}$$

$$u_2 = \sqrt{9} = \sqrt{4.2 + 1}$$

$$u_3 = \sqrt{13} = \sqrt{4.3 + 1}$$

$$u_4 = \sqrt{17} = \sqrt{4.4 + 1}$$

$$\Rightarrow \text{Dự đoán: } u_n = \sqrt{4n + 1}$$

Chứng minh: Bằng phương pháp quy nạp toán học ta được $u_n = \sqrt{4n + 1}$.

$$\text{Suy ra } u_{2024} = \sqrt{4.2024 + 1} = \sqrt{8097} \approx 90$$

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{11n-10}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hỏi từ số hạng thứ mấy của dãy số (u_n) thì các số hạng của dãy số lớn 10?

Lời giải

Trả lời: 111

$$\text{Ta có: } u_n > 10 \Leftrightarrow \frac{11n-100}{n+1} > 10 \Leftrightarrow 11n-100 > 10n+10 \Leftrightarrow n > 110.$$

Vậy từ số hạng thứ 111 thì các số hạng của dãy số lớn 10.

Câu 5: Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n-2}$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Lời giải

Trả lời: 3

$$\text{Ta có: } u_n = 2 + \frac{5}{n-2}.$$



u_n là số nguyên khi $\frac{5}{n-2}$ là số nguyên.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} n-2 = \pm 1 \\ n-2 = \pm 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3 \\ n=1 \\ n=7 \\ n=-3 \end{cases}.$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên có 3 giá trị của n thỏa mãn. Vậy dãy số có 3 số hạng là số nguyên.

Câu 6: Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 - n + 1}{n + 2}$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Lời giải

Trả lời: 1

$$\text{Ta có: } u_n = \frac{n^2 - n + 1}{n + 2} = n - 3 + \frac{7}{n + 2}.$$

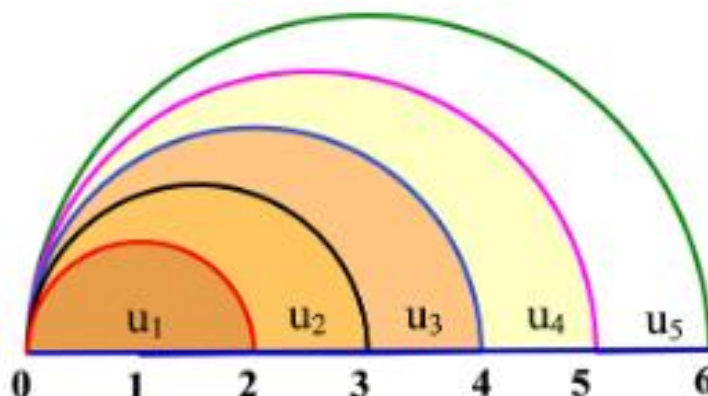
Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên u_n là số nguyên khi và chỉ khi $\frac{7}{n + 2}$ là số nguyên.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} n+2 = 1 \\ n+2 = -1 \\ n+2 = 7 \\ n+2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = -3 \\ n = 5 \\ n = -9 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$ suy ra chỉ có giá trị $n = 5$ thỏa mãn.

Vậy dãy số (u_n) có 1 số hạng là số nguyên.

Câu 7: Dựng các nửa đường tròn có bán kính từ nhỏ đến lớn như hình vẽ. Gọi u_1 là diện tích của nửa đường tròn nhỏ nhất, u_2 là diện tích của phần hình nằm giữa đường tròn thứ nhất và thứ hai, ..., u_k là diện tích phần hình nằm giữa đường tròn thứ $(k-1)$ và đường tròn thứ k . Tính u_{15} ? (làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 12,17

Gọi r_k và S_k lần lượt là bán kính và diện tích của nửa đường tròn thứ k .

Ta có: $r_1 = 1$



$$r_2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = r_1 + \frac{1}{2}$$

$$r_3 = 2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = r_2 + \frac{1}{2}$$

$$r_4 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = r_3 + \frac{1}{2}$$

$$r_5 = 3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = r_4 + \frac{1}{2}$$

.....

Tổng quát: $r_n = r_{n-1} + \frac{1}{2}$.

Lại có: $r_n = r_{n-1} + \frac{1}{2} = \left(r_{n-2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = r_{n-2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \left(r_{n-3} + \frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} = r_{n-3} + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$$= \dots = r_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow r_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{1}{2} \pi r_n^2 = \frac{1}{8} \pi (n+1)^2.$$

$$\Rightarrow u_k = S_k - S_{k-1} = \frac{1}{8} \pi (k+1)^2 - \frac{1}{8} \pi k^2 = \frac{1}{8} \pi (2k+1).$$

Vậy $u_{15} = \frac{31}{8} \pi \approx 12,17$.

Câu 8: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (2-a)n + a - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số giá trị nguyên dương của a để dãy số (u_n) là dãy tăng.

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có: $u_{n+1} = (2-a)(n+1) + a - 2$.

Suy ra: $u_{n+1} - u_n = (2-a)(n+1) + a - 2 - [(2-a)n + a - 2] = 2 - a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(u_n) là dãy tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2 - a > 0 \Leftrightarrow a < 2$.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{na+3}{2n+3}$. Số giá trị nguyên của a trong khoảng $(-2023; 2023)$ để (u_n) là dãy số giảm là

Lời giải

Trả lời: 2024



Ta có: $u_n = \frac{na+3}{2n+3} = \frac{a}{2} + \frac{3-\frac{3a}{2}}{2n+3}$.

$$u_{n+1} = \frac{a}{2} + \frac{3-\frac{3a}{2}}{2(n+1)+3} = \frac{a}{2} + \frac{3-\frac{3a}{2}}{2n+5}$$

Xét $u_{n+1} - u_n = \frac{3-\frac{3a}{2}}{2n+5} - \frac{3-\frac{3a}{2}}{2n+3} = \left(3-\frac{3a}{2}\right) \left(\frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+3}\right) = \left(3-\frac{3a}{2}\right) \frac{-2}{(2n+5)(2n+3)}$

Để (u_n) là dãy số giảm thì $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{3a}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{3a}{2} < 3 \Leftrightarrow a < 2$

Mà a nguyên và a thuộc khoảng $(-2023; 2023)$ nên $a \in \{-2022; -2021; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có $1 - (-2022) + 1 = 2024$ giá trị nguyên của a .

Câu 10: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2au_n + 3 \forall n \geq 1 \end{cases}$. Số giá trị nguyên của a trong khoảng $(-2025; 2025)$ để (u_n) là dãy số tăng?

Lời giải

Trả lời: 2024

Ta có: $u_{n+1} - u_n = (2au_n + 3) - (2au_{n-1} + 3) = 2a(u_n - u_{n-1}) \forall n \geq 2$.

$$\Rightarrow u_3 - u_2 = 2a(u_2 - u_1) = 2a(6a + 3 - 2) = 2a \cdot 6a = 3 \cdot (2a)^2$$

$$\Rightarrow u_4 - u_3 = 2a(u_3 - u_2) = 2a \cdot 3 \cdot (2a)^2 = 3 \cdot (2a)^3$$

...

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3 \cdot (2a)^n$$

Để dãy số (u_n) tăng thì $u_{n+1} - u_n = 3 \cdot (2a)^n > 0 \forall n \geq 1$.

Suy ra $a > 0$.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)u_n \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Số giá trị nguyên của a trong khoảng $(-2026; 2026)$ để (u_n) là dãy số tăng?

Lời giải

Trả lời: 2024

Xét hiệu $u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + (1-a)u_n - u_{n+1} = (a-1)(u_{n+1} - u_n)$



$$\Rightarrow u_3 - u_2 = (a-1)(u_2 - u_1) = (a-1)$$

$$\Rightarrow u_4 - u_3 = (a-1)(u_3 - u_2) = (a-1)^2$$

...

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = (a-1)^{n-1} > 0$$

Để dãy số (u_n) tăng suy ra $a > 1$.

Câu 12: Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của a thuộc đoạn $[-5; 5]$ sao cho dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{a \cdot n^4 + 2}{2n^4 + 5}; n \in \mathbb{N}^*$$
 là một dãy số tăng. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

Trả lời: 5

$$\text{Ta có: } u_n = \frac{a \cdot n^4 + 2}{2n^4 + 5} = \frac{a}{2} + \frac{4-5a}{2(2n^4 + 5)}; n \in \mathbb{N}^*.$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4-5a}{2[2(n+1)^4 + 5]} - \frac{4-5a}{2[2n^4 + 5]} = \frac{4-5a}{2} \left[\frac{1}{2(n+1)^4 + 5} - \frac{1}{2n^4 + 5} \right].$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{4-5a}{2} \frac{2n^4 + 5 - 2(n+1)^4 - 5}{[2(n+1)^4 + 5][2n^4 + 5]}.$$

$$= (4-5a) \frac{n^4 - (n+1)^4}{[2(n+1)^4 + 5][2n^4 + 5]}.$$

$$\text{Mà: } \frac{n^4 - (n+1)^4}{[2(n+1)^4 + 5][2n^4 + 5]} < 0; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Nên: } (u_n) \text{ tăng} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0; \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 4-5a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{4}{5}.$$

Câu 13: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{2a \cdot n^2 + 1}{n^2 + 3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $a \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in [-10; 10]$ sao cho (u_n) là một dãy số giảm?

Lời giải

Trả lời: 11

$$\text{Ta có: } u_n = 2a + \frac{1-6a}{n^2 + 3}.$$

$$\text{Xét hiệu } u_{n+1} - u_n = 2a + \frac{1-6a}{(n+1)^2 + 3} - 2a + \frac{1-6a}{n^2 + 3} = (1-6a) \left[\frac{1}{(n+1)^2 + 3} - \frac{1}{n^2 + 3} \right].$$

$$(u_n) \text{ là dãy số giảm khi và chỉ khi } u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 1-6a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{6}$$



Mà $a \in [-10; 10]$ và a là số nguyên nên $a \in \{-10; -9; -8; \dots; 0\}$.

Vậy có 11 giá trị a .

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an^2 + 2}{n^2 + 3}$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-10; 10]$ để (u_n) là dãy số giảm.

Lời giải

Trả lời: 11

$$u_n = \frac{an^2 + 2}{n^2 + 3} = a + \frac{2 - 3a}{n^2 + 3}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - 3a}{(n+1)^2 + 3} - \frac{2 - 3a}{n^2 + 3} = (2 - 3a) \left[\frac{1}{(n+1)^2 + 3} - \frac{1}{n^2 + 3} \right]$$

Ta có $\frac{1}{(n+1)^2 + 3} < \frac{1}{n^2 + 3}$ nên (u_n) là dãy số giảm khi và chỉ khi $2 - 3a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{2}{3}$.

Các số nguyên $a \in [-10; 10]$ thỏa mãn là: -10; -9; -8; ...; 0.

Vậy có 11 số.

Câu 15: Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n$. Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm là bao nhiêu theo đơn vị triệu đồng. (làm tròn đến hàng triệu)

Lời giải

Trả lời: 106

Số tiền ông An nhận được sau 1 năm là $A_{12} = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{12} = 106$ triệu đồng.

Câu 16: Bác Thanh gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Số tiền của bác Thanh thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,065}{12} \right)^n$. Tính số tiền bác Thanh nhận được sau 3 tháng theo đơn vị triệu đồng.

Lời giải

Trả lời: 203

Ta có:

Số tiền bác Thanh nhận được sau 3 tháng là $A_3 = 200 \left(1 + \frac{0,065}{12} \right)^3 = 203,27$.



Câu 17: Bác Thanh gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Số tiền của bác Thanh thu được sau n tháng được cho bởi công thức $A_n = 200 \left(1 + \frac{0,065}{12} \right)^n$. Tính số tiền lãi bác Thanh nhận được sau 7 tháng.

Lời giải

Trả lời: 7,71

Ta có:

$$\text{Số tiền bác Thanh nhận được sau 8 tháng là } A_7 = 200 \left(1 + \frac{0,065}{12} \right)^7 = 207,71$$

$$\text{Số tiền lãi bác Thanh nhận được sau 7 tháng là } 207,71 - 200 = 7,71.$$

Câu 18: Bác Thanh gửi tiết kiệm A triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Số tiền của bác Thanh thu được sau n tháng được cho bởi công thức $A_n = A \left(1 + \frac{0,065}{12} \right)^n$. Hỏi bác Thanh cần gửi vào ngân hàng số A là bao nhiêu để sau 4 tháng bác Thanh nhận được 204,37 triệu đồng.

Lời giải

Trả lời: 200 triệu

$$\text{Số tiền bác Thanh nhận được sau 4 tháng là } A_4 = A \left(1 + \frac{0,065}{12} \right)^4 = 204,37.$$

$$\Rightarrow A = 200.$$

Câu 19: Bác Thanh gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Số tiền của bác Thanh thu được sau n tháng được cho bởi công thức $A_n = 200 \left(1 + \frac{0,065}{12} \right)^n$. Bác Thanh cần gửi ít nhất bao nhiêu tháng để nhận được số tiền cả gốc và lãi là 208,81 triệu đồng.

Lời giải

Trả lời: 8

Ta có:

$$\text{Số tiền bác Thanh nhận được sau } n \text{ tháng là } A_n = 200 \left(1 + \frac{0,065}{12} \right)^n = 208,81.$$

Suy ra $n = 8$. Vậy bác Thanh cần gửi 8 tháng.

Câu 20: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 5% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng người đó gửi thêm 100 triệu đồng với hình thức và lãi suất như trên. Hỏi sau đúng một năm tính từ lần gửi đầu tiên người đó nhận được số tiền theo đơn vị triệu đồng, làm tròn đến hàng phần mười?



Lời giải

Trả lời: 231,2 triệu

Sau đúng 6 tháng người đó thu được số tiền cả vốn lẫn lãi là $M_1 = 100(1 + 5\%)^2$.

Sau một năm tính từ lần gửi đầu tiên người đó nhận được cả vốn lẫn lãi là:

$$M_2 = (100 + M_1)(1 + 5\%)^2 = 231,8.$$

Câu 21: Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi quý số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho quý tiếp theo. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền theo đơn vị triệu đồng?

Lời giải

Trả lời: 212

Số tiền nhận về sau 1 năm của 100 triệu gửi trước là $100(1 + 2\%)^4$ triệu.

Số tiền nhận về sau 6 tháng của 100 triệu gửi sau là $100(1 + 2\%)^2$ triệu.

Vậy tổng số tiền là $100(1 + 2\%)^4 + 100(1 + 2\%)^2 = 212,283216 (\approx 212,283)$ triệu.

Câu 22: Sinh nhật bạn của An vào ngày 27 tháng 5. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 1000 đồng vào ngày 01 tháng 5 năm 2023, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 1000 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Trả lời: 351 nghìn đồng

Số ngày bạn An để dành tiền là 26 ngày.

Số tiền bỏ ống heo ngày đầu tiên là: $u_1 = 1000$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ hai là: $u_2 = 1000 + 1.1000$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ ba là: $u_3 = 1000 + 2.1000$.

...

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ n là: $u_n = u_1 + (n-1)d = 1000 + (n-1)1000 = 1000n$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ 26 là: $u_{26} = 1000.26 = 26000$.

Sau 26 ngày thì số tiền An tích lũy được là tổng của 26 số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1000$, công sai $d = 1000$.

Vậy số tiền An tích lũy được là $S_{26} = \frac{26}{2}(u_1 + u_{26}) = 13(1000 + 26000) = 351.000$ đồng.



Câu 23: Để chuẩn bị cho việc mua nhà, chị An thực hiện việc tiết kiệm bằng cách mỗi tháng gửi đều đặn vào ngân hàng 20 triệu đồng/tháng. Biết rằng trong thời gian chị An gửi tiền thì ngân hàng áp dụng mức lãi suất 0,65 % tháng và chị An không rút lãi lần nào. Hỏi chị An phải gửi tối thiểu bao nhiêu tháng để có được số tiền 100 triệu đồng bao gồm cả tiền gốc và tiền lãi?

Lời giải

Trả lời: 5

Chị An hàng tháng gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là A đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất $r\%$ một tháng.

Cuối tháng thứ 1, chị An có số tiền là: $P_1 = A + A.r = A(1+r)$

Đầu tháng thứ 2, chị An có số tiền là:

$$P_1 + A = A(1+r) + A = A + A(1+r) = A[1+(1+r)]$$

Cuối tháng thứ 2, chị An có số tiền là:

$$P_2 = P_1 + P_1.r = A + A(1+r) + [A + A(1+r)].r = A[(1+r)^2 + (1+r)]$$

Đầu tháng thứ 3, chị An có số tiền là:

$$P_2 + A = A[(1+r) + (1+r)^2] + A = A[1 + (1+r) + (1+r)^2]$$

Cuối tháng thứ 3, chị An có số tiền là:

$$P_3 = P_2 + P_2.r = A[1 + (1+r) + (1+r)^2] + A[1 + (1+r) + (1+r)^2].r = A[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)]$$

..... WE COACH. WE INSPIRE

Cuối tháng thứ n , chị An có số tiền là:

$$P_n = A \left[\underbrace{(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r)^2 + (1+r)}_{S_n} \right] = A(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

trong đó $A = 20$, $r = 0,65\%$ và n là số tháng gửi.

$$\text{Theo giả thiết } P_n = 500 \Leftrightarrow A(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 100 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{100r}{A(1+r)} + 1 \Leftrightarrow n = 5.$$

Vì n nguyên dương nên $n = 5$.

Vậy phải gửi tối thiểu 5 tháng thì chị An mới có được số tiền 100 triệu đồng.

Câu 24: Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: “Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay”. Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên:



ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Hỏi sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả bao nhiêu điều ước

Lời giải

Trả lời: 3069

Ngày thứ nhất Aladin ước 3 điều.

Ngày thứ hai Aladin ước 2.3 điều.

Ngày thứ ba Aladin ước $2.2.3 = 2^2.3$ điều.

Ngày thứ tư Aladin ước $2.2^2.3 = 2^3.3$ điều.

...

Ngày thứ 10 Aladin ước $2^9.3$ điều.

Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: $3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9) = 3\left(\frac{1-2^{10}}{1-2}\right) = 3069$ điều.

Câu 25: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái Đất nóng lên. Theo OECD, khi nhiệt độ Trái Đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm $t^\circ\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k.a^t$, trong đó k, a , là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu $^\circ\text{C}$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%?

Lời giải

Trả lời: 6,7

Theo đề bài $\begin{cases} k.a^2 = 3\% \\ k.a^5 = 10\% \end{cases}$. Ta cần tìm t sao cho $k.a^t = 20\%$

$$\text{Từ } \Rightarrow k = \frac{3\%}{a^2} \text{ và } a^3 = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{10}{3}}$$

$$\text{Thay vào } \Rightarrow \frac{3\%}{a^2} . a^t = 20\% \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{10}{3}}\right)^{t-2} = \frac{20}{3} \Rightarrow t \approx 6,7^\circ\text{C}$$

Vậy nhiệt độ Trái đất tăng thêm gần $6,7^\circ\text{C}$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%.

Câu 26: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

Lời giải

Trả lời: 250

$$\text{Ta có: } u_n = \frac{167}{84}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84.(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$$



Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

Câu 27: Dãy số $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ bị chặn trên bởi a . Khi đó $a = ?$

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: $u_n > 1$,

Giả sử tồn tại $u_n \geq 2 \Rightarrow \sqrt{u_{n-1} + 2} \geq 2 \Rightarrow u_{n-1} \geq 2$.

Nếu tồn tại $u_n \geq 2$ thì suy ra $u_{n-1} \geq 2$, từ đó suy ra được $u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_2, u_1 \geq 2$ vô lý

Do $u_1 = \sqrt{2} < 2$. Nên điều giả sử là sai. Suy ra: $u_n < 2$

Xét $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} > 0$

Suy ra: $u_{n+1} > u_n$ nên u_n là dãy tăng.

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên bởi 2.

