



DÃY SỐ

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 6: CẤP SỐ CỘNG



I LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số không đổi d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Đặc biệt, khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

Nhận xét: Từ định nghĩa, ta có:

1) Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d , ta có công thức truy hồi

$$u_{n+1} = u_n + d, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

2) Cấp số cộng (u_n) là một dãy số tăng khi và chỉ khi công sai $d > 0$.

3) Cấp số cộng (u_n) là một dãy số giảm khi và chỉ khi công sai $d < 0$.

NHẬN XÉT

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, chúng ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n$ là một hằng số với mọi số nguyên dương n .



VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số cộng: $-2; 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19$.

Lời giải

$$\text{Vì } 1 = -2 + 3; \quad 4 = 1 + 3; \quad 7 = 4 + 3; \quad 10 = 7 + 3;$$

$$13 = 10 + 3; \quad 16 = 13 + 3; \quad 19 = 16 + 3.$$

Nên theo định nghĩa cấp số cộng, dãy số $-2; 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19$ là một cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Ví dụ 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) Dãy số (a_n) , với $a_n = 4n - 3$. b) Dãy số (b_n) , với $b_n = \frac{2-3n}{4}$.

Lời giải



a) Ta có $a_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n + 1$ nên $a_{n+1} - a_n = (4n + 1) - (4n - 3) = 4, \forall n \geq 1$.

Do đó (a_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $a_1 = 1$ và công sai $d = 4$.

b) Ta có $b_{n+1} = \frac{2-3(n+1)}{4} = \frac{-1-3n}{4}$ nên $b_{n+1} - b_n = \frac{-1-3n}{4} - \frac{2-3n}{4} = -\frac{3}{4}, \forall n \geq 1$.

Suy ra (b_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $b_1 = -\frac{1}{4}$ và công sai $d = -\frac{3}{4}$.

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) có 7 số hạng với số hạng đầu $u_1 = \frac{2}{3}$ và công sai $d = -\frac{4}{3}$. Viết dạng khai triển của cấp số cộng đó.

Lời giải

Ta có $u_2 = u_1 + d = -\frac{2}{3}$; $u_3 = u_2 + d = -2$; $u_4 = u_3 + d = -\frac{10}{3}$

$u_5 = u_4 + d = -\frac{14}{3}$; $u_6 = u_5 + d = -6$; $u_7 = u_6 + d = -\frac{22}{3}$.

Vậy dạng khai triển của cấp số cộng (u_n) là $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2; -\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; -6; -\frac{22}{3}$.

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ CỘNG.

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 2$ (2).

NHẬN XÉT

Từ kết quả của định lý 1, ta rút ra nhận xét sau:

Cho cấp số cộng (u_n) biết hai số hạng u_p và u_q thì số hạng đầu và công sai được tính theo công thức:

$$(1): d = \frac{u_p - u_q}{p - q}.$$

$$(2): u_1 = u_p - (p-1)d$$



VÍ DỤ.

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và $d = -5$.

a) Tìm u_{20} .

b) Số -2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng?

Lời giải

a) Ta có $u_{20} = u_1 + (20-1)d = 2 + 19 \cdot (-5) = -93$. $u_{20} = u_1 + 19d = 2 + 19 \cdot (-5) = -93$.

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 - 5n$.

Vì $u_n = -2018$ nên $2 - 5n = -2018 \Leftrightarrow n = 405$.

Do $n = 405$ là số nguyên dương nên số -2018 là số hạng thứ 405 của cấp số cộng đã cho.



Chú ý : Trong một cấp số cộng (u_n) , mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$. (3)

NHẬN XÉT

Một cách tổng quát, ta có:

Nếu (u_n) là cấp số cộng thì $u_p = \frac{u_{p-k} + u_{p+k}}{2}, 1 \leq k < p$



VÍ DỤ.

- a) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{99} = 101$ và $u_{101} = 99$. Tìm u_{100} .
 b) Cho cấp số cộng $-2; x; 6; y$ Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

- a) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $u_{100} = \frac{u_{99} + u_{101}}{2}$ nên $u_{100} = 100$.
 b) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x = \frac{-2+6}{2} = 2$ và $6 = \frac{x+y}{2}$.

Vì $x = 2$ nên $y = 10$.

Vậy $P = x^2 + y^2 = 2^2 + 10^2 = 104$. $P = x^2 + y^2 = 2^2 + 10^2 = 104$.

3. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ CỘNG.

Cho một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad (4) \text{ hoặc } S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \quad (5)$$



VÍ DỤ.

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và $d = 3$.

- a) Tính tổng của 25 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
 b) Biết $S_n = 6095374$, tìm n .

Lời giải

$$\text{Ta có } S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -2n + \frac{3(n^2 - n)}{2} = \frac{n(3n-7)}{2}$$

$$\text{a) Ta có } S_{25} = \frac{25(3 \cdot 25 - 7)}{2} = 850. S_{25} = \frac{25(3 \cdot 25 - 7)}{2} = 850.$$

$$\text{b) Vì } S_n = 6095374 \text{ nên } \frac{n(3n-7)}{2} = 6095374 \Leftrightarrow 3n^2 - 7n - 12190748 = 0 \text{ Giải phương trình bậc hai trên với } n \text{ nguyên dương, ta tìm được } n = 2017.$$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_8 = 26$. Tìm công sai d

Lời giải

$$u_8 = u_1 + 7d \Leftrightarrow 26 = \frac{1}{3} + 7d \Leftrightarrow d = \frac{11}{3}.$$

Câu 2: Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Tìm n .

Lời giải

$$\text{Ta có } S_n = \frac{n(2u_1 + (n-1)d)}{2} \Leftrightarrow \frac{n(2.3 + (n-1).4)}{2} = 253$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 506 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -\frac{23}{2} (L) \end{cases}$$

Câu 3: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_8 = 26$. Tìm công sai

Lời giải

$$\text{Ta có } u_8 = u_1 + 7d \Leftrightarrow 26 = \frac{1}{3} + 7d \Leftrightarrow d = \frac{11}{3}.$$

Câu 4: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Lời giải

* Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 80.000$, công sai $d = 5.000$ ta được số tiền phải trả khi khoan đến mét thứ n là

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

* Khi khoan đến mét thứ 50, số tiền phải trả là

$$S_{50} = \frac{50[2.80000 + (50-1).5000]}{2} = 10.125.000 \text{ đồng.}$$

Câu 5: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$$

Suy ra $d = 3$ là công sai của cấp số cộng.



Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$, $u_6 = 27$. Tính công sai d .

Lời giải

$$\text{Ta có } u_6 = u_1 + 5d = 27 \Rightarrow d = 6.$$

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$, $u_6 = 27$. Tính công sai d .

Lời giải

$$\text{Ta có } u_6 = u_1 + 5d = 27 \Rightarrow d = 6.$$

Câu 8: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n .

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{50} = \frac{50}{2}(2u_1 + 49d) = 5150 \Rightarrow d = 4.$$

$$\text{Số hạng tổng quát của cấp số cộng bằng } u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + 4n.$$

Câu 9: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ có công sai là

Lời giải

Gọi d là công sai.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Vậy công sai $d = 3$.

Câu 10: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Lời giải

Gọi u_1 , d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -35 \\ d = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S_{10} = \frac{10}{2} \cdot (2u_1 + 9d) = 5 \cdot [2 \cdot (-35) + 9 \cdot 5] = -125.$$

Câu 11: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

Lời giải

$$\text{Gọi } d \text{ là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có } \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, } S_{16} = \frac{(2u_1 + 15d) \cdot 16}{2} = 8(-42 + 45) = 24.$$



Câu 12: Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1, 3, 5, ... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp - mô hình như hình bên). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



Lời giải

Cách 1: p dụng công thức tính tổng n số hạng liên tiếp của CSC:

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] \Leftrightarrow 900 = \frac{n}{2} [2.1 + (n-1).2] \Leftrightarrow n^2 = 900 \Rightarrow n = 30.$$

Vậy $u_{30} = 1 + 29 \cdot 2 = 59$.

Cách 2: Áp dụng công thức $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$, suy ra $n = 30$.

Vậy $2n-1 = 59$.

Câu 13: Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây....Số hàng cây trong khu vườn là

Lời giải

Cách trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như trên lập thành một cấp số cộng (u_n) với số u_n là số cây ở hàng thứ n và $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

$$\text{Tổng số cây trồng được là: } S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 465 \Leftrightarrow n^2 + n - 930 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 30 \\ n = -31(l) \end{cases}$$

Như vậy số hàng cây trong khu vườn là 30.

Câu 14: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của (u_n) đều lớn hơn 2018?

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + 7(n-1) = 7n-4; u_n > 2018 \Leftrightarrow 7n-4 > 2018 \Leftrightarrow n > \frac{2022}{7}$$

Vậy $n = 289$.

Câu 15: Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tích của bốn số đó là :

Lời giải

Gọi 4 số cần tìm là $a-3r, a-r, a+r, a+3r$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a-3r+a-r+a+r+a+3r=28 \\ (a-3r)^2+(a-r)^2+(a+r)^2+(a+3r)^2=276 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ r^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ r=\pm 2 \end{cases}$$



Bốn số cần tìm là 1, 5, 9, 13 có tích bằng 585.

Câu 16: Chu vi một đa giác là 158cm , số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3\text{cm}$. Biết cạnh lớn nhất là 44cm . Số cạnh của đa giác đó là?

Lời giải

Giả sử đa giác đã cho có n cạnh thì chu vi của đa giác là: $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$ với u_1 là cạnh nhỏ

nhất. Suy ra: $158 = \frac{(u_1 + 44)n}{2} \Leftrightarrow 316 = (u_1 + 44)n \Leftrightarrow 2^2 \cdot 79 = (u_1 + 44)n$

Do đó $u_1 + 44$ là ước nguyên dương của $316 = 2^2 \cdot 79$ và đa giác có ít nhất ba cạnh nên

$$\frac{316}{3} > u_1 + 44 > 44. \text{ Suy ra: } u_1 + 44 = 79 \Leftrightarrow u_1 = 35.$$

Số cạnh của đa giác đã cho là: $\frac{44-35}{3} + 1 = 4$ (cạnh).

Câu 17: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng.

Lời giải

Ta có: $u_5 = 18 \Leftrightarrow u_1 + 4d = 18$ (1).

$$4S_n = S_{2n} \Leftrightarrow 4 \left[nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \right] = \left[2nu_1 + \frac{2n(2n-1)d}{2} \right] \Leftrightarrow 4u_1 + 2nd - 2d = 2u_1 + 2nd - d$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 - d = 0 \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $u_1 = 2; d = 4$.

Câu 18: Biết bốn số 5; x ; 15; y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng.

Lời giải

Ta có: $x = \frac{5+15}{2} = 10 \Rightarrow y = 20$. Vậy $3x + 2y = 70$.

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = -5$, $d = 2$. Số 81 là số hạng thứ bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 81 = -5 + (n-1)2 \Leftrightarrow n = 44$.

Vậy 81 là số hạng thứ 44.

Câu 20: Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n = 3n^2 + 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

Lời giải

Từ giả thiết ta có $S_1 = u_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 7$.



Ta có $S_n = 3n^2 + 4n = \frac{n(8+6n)}{2} = \frac{n(7+6n+1)}{2} \Rightarrow u_n = 6n+1 \Rightarrow u_{10} = 61$.

Câu 21: Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n = 4n^2 + 3n$, $n \in \mathbb{N}^*$ thì số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

Lời giải

Theo công thức ta có $\frac{n(u_1 + u_n)}{2} = 4n^2 + 3n \Leftrightarrow u_1 + u_n = 8n + 6 \Rightarrow u_n = -u_1 + 8n + 6$.

Mà $u_1 = S_1 = 7$ do đó $u_{10} = -7 + 8 \cdot 10 + 6 = 79$.

Câu 22: Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n = 4n^2 + 3n$, $n \in \mathbb{N}^*$ thì số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

Lời giải

Theo công thức ta có $\frac{n(u_1 + u_n)}{2} = 4n^2 + 3n \Leftrightarrow u_1 + u_n = 8n + 6 \Rightarrow u_n = -u_1 + 8n + 6$.

Mà $u_1 = S_1 = 7$ do đó $u_{10} = -7 + 8 \cdot 10 + 6 = 79$.

Câu 23: Người ta viết thêm 999 số thực vào giữa số 1 và số 2018 để được cấp số cộng có 1001 số hạng. Tìm số hạng thứ 501.

Lời giải

Áp dụng công thức cấp số cộng ta có:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_{1001} = u_1 + (1001-1)d \Leftrightarrow 2018 = 1 + (1001-1)d \Rightarrow d = \frac{2017}{1000}.$$

Vậy số hạng thứ 501 là $u_{501} = u_1 + (501-1)d = \frac{2019}{2}$.

Câu 24: Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là $S_n = -9800$. Giá trị n là

Lời giải

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = -9800 \Leftrightarrow n[2 - 2(n-1)] + 19600 = 0 \Leftrightarrow n = 100.$$