



DÃY SỐ

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 6: CẤP SỐ NHÂN



LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA: Cấp số nhân là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q .

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q , ta có công thức truy hồi: $u_{n+1} = u_n q$ [với] $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặc biệt:

- Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q , cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ [với] } n \geq 2.$$

Chú ý: Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ [với] } k \geq 2.$$

3. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ NHÂN

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Khi đó
$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$ khi đó $S_n = nu_1$.



II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

Dạng 1: Chứng minh một dãy (u_n) là cấp số nhân.

Dạng 2. Xác định các đại lượng của cấp số nhân

Dạng 3. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Dạng 4. Một số bài toán liên quan đến cấp số nhân

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY (u_n) LÀ CẤP SỐ NHÂN.

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Chứng minh $u_{n+1} = u_n q, \forall n \in \mathbb{N}^*$ trong đó q là một số không đổi.

+ Nếu $u_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì u_n là **một cấp số nhân** $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q : \text{const} \forall n \in \mathbb{N}^*$

+ Để chứng minh dãy (u_n) không phải là cấp số nhân, ta chỉ cần chỉ ra ba số hạng liên tiếp

không tạo thành cấp số nhân, chẳng hạn $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

+ Để chứng minh a, b, c theo thứ tự đó lập thành CSN, ta chứng minh

$ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Chứng minh rằng dãy số $(v_n) : v_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Lời giải

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(-1)^{n+1} 3^{2(n+1)}}{(-1)^n 3^{2n}} = -9, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy } (v_n) : v_n = (-1)^n \cdot 3^{2n} \text{ là một cấp số nhân.}$$

Câu 2: Giá trị của a để $\frac{-1}{5}; a; \frac{-1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{125}\right) = \frac{1}{625} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{25}$$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH CÁC ĐẠI LƯỢNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Vận dụng các công thức ở định nghĩa, số hạng tổng quát, tính chất của cấp số nhân.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.



Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4, u_4 = 9$. Tìm u_1 .

Lời giải

Vì $q < 0, u_2 > 0$ nên $u_3 < 0$. Do đó $u_3 = -\sqrt{u_2 \cdot u_4} = -\sqrt{4 \cdot 9} = -6$;

$$u_2^2 = u_1 \cdot u_3 \Rightarrow u_1 = \frac{u_2^2}{u_3} = \frac{4^2}{-6} = -\frac{8}{3}. \text{ Chọn đáp án A}$$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$. Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân (u_n) ?

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \end{cases} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3 \Rightarrow u_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$\text{Mặt khác } u_n = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13.$$

Câu 5: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_4 = \frac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$.

a) Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân:

b) Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số?

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ u_1 q^2 = 243 \cdot u_1 q^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ q^5 = \frac{1}{243} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

a) Năm số hạng đầu của cấp số là: $u_1 = 2, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{2}{9}; u_4 = \frac{2}{27}, u_5 = \frac{2}{81}$.

b) Ta có: $u_n = \frac{2}{3^{n-1}} \Rightarrow u_n = \frac{2}{6561} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9$

Vậy $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số.

Câu 6: Cho tứ giác ABCD có 4 góc tạo thành 1 cấp số nhân có công bội bằng 2. Tìm 4 góc ấy

Lời giải



$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 360^0 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 \frac{1-q^4}{1-q} = 360^0 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = 24^0 \\ q = 2 \end{cases}$$

Vậy 4 góc là: 24, 48, 96, 192.

Câu 7: Cho 5 số lập thành một cấp số nhân. Biết công bội bằng một phần tư số hạng đầu tiên và tổng 2 số hạng đầu bằng 8.

Lời giải

$$\begin{cases} U_1 + U_2 = 8 \\ q = \frac{1}{4}U_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1^2 + 4U_1 = 32 \\ q = \frac{1}{4}U_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = -8 \\ U_1 = 4 \\ q = -2 \\ q = 1 \end{cases}$$

Vậy CSN là: -8, 16, -32, 64, -128; 4,4,4,4,4

DẠNG 3: TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ NHÂN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Ghi nhớ công thức

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}, (q \neq 1).$$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 8: Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

Lời giải

$$u_1 = 18, u_2 = 54 \Rightarrow q = 3.$$

$$u_n = 39366 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 18 \cdot 3^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^7 \Leftrightarrow n = 8.$$

$$\text{Vậy } S_8 = 18 \cdot \frac{1-3^8}{1-3} = 59040.$$

Câu 9: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_4 = \frac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số;

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số. Theo giả thiết ta có:



$$\begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ u_1 q^2 = 243 u_1 q^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ q^5 = \frac{1}{243} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Tổng 10 số hạng đầu của cấp số

$$S_{10} = u_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \right] = \frac{59048}{19683}.$$

Câu 10: Tính các tổng sau: $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$

Lời giải.

$$\begin{aligned} S_n &= 2^2 + \frac{1}{2^2} + 2 + 2^4 + \frac{1}{2^4} + 2 + \dots + 2^{2n} + \frac{1}{2^{2n}} + 2 \\ &= (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}\right) + 2n \\ &= 4 \cdot \frac{1 - 4^n}{1 - 4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} + 2n = \frac{4^n - 1}{3} \left(4 - \frac{1}{4^n}\right) + 2n. \end{aligned}$$

Câu 11: $S_n = 8 + 88 + 888 + \dots + \underbrace{88\dots8}_{n \text{ số } 8}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{8}{9} \left(9 + 99 + 999 + \underbrace{99\dots9}_{n \text{ số } 9} \right) \\ &= \frac{8}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) \\ &= \frac{8}{9} \left[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n \right] \\ &= \frac{8}{9} \left(10 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n \right) = \frac{80(10^n - 1)}{81} - \frac{8}{9}n. \end{aligned}$$

DẠNG 4: MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CẤP SỐ NHÂN

Câu 12: Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày. Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau 7314 ngày.

Lời giải

Kí hiệu u_n là khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau n chu kì bán rã.



Ta có 7314 ngày gồm 53 chu kì bán rã. Theo đề bài ra, ta cần tính u_{53} .

Từ giả thiết suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = \frac{20}{2} = 10$ và công bội

$$q=0,5. \text{ Do đó } u_{53} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{52} \approx 2,22 \cdot 10^{-15}.$$

Câu 13: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Tính diện tích mặt trên cùng.

Lời giải

Diện tích bề mặt của mỗi tầng lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$ và

$$u_1 = \frac{12288}{2} = 6144. \text{ Khi đó diện tích mặt trên cùng là}$$

$$u_{11} = u_1 q^{10} = \frac{6144}{2^{10}} = 6.$$

Câu 14: Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

Lời giải

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \frac{u_1(1 - p^9)}{1 - p} = 10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 \cdot p^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên du khách thắng 20 000.

Câu 15: Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm lập thành CSN.
 $x^3 + (5 - m)x^2 + (6 - 5m)x - 6m = 0$

Lời giải

$$x^3 + (5 - m)x^2 + (6 - 5m)x - 6m = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Đề 3 nghiệm lập thành CSN xét 3 TH



$$\text{TH1: } -3 < m < -2 \Rightarrow m^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{6} \\ m = -\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow m = -\sqrt{6}$$

$$\text{TH2: } -3 < -2 < m \Rightarrow 4 = -3m \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$$

$$\text{TH3: } m < -3 < -2 \Rightarrow 9 = -2m \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2}$$

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn

Câu 16: Một người bắt đầu đi làm được nhận được số tiền lương là 7000000đ một tháng. Sau 36 tháng người đó được tăng lương 7%. Hằng tháng người đó tiết kiệm 20% lương để gửi vào ngân hàng với lãi suất 0,3%/tháng theo hình thức lãi kép. Biết rằng người đó nhận lương vào đầu tháng và số tiền tiết kiệm được chuyển ngay vào ngân hàng.

a) Hỏi sau 36 tháng tổng số tiền người đó tiết kiệm được là bao nhiêu?

b) Hỏi sau 60 tháng tổng số tiền người đó tiết kiệm được là bao nhiêu?

Lời giải

a) Đặt $a = 7.000.000$, $m = 20\%$, $n = 0,3\%$, $t = 7\%$.

Hết tháng thứ nhất, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là $T_1 = am(1+n)^1$.

Hết tháng thứ hai, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_2 = (T_1 + am)(1+n) = am(1+n)^2 + am(1+n)^1.$$

.

Hết tháng thứ 36, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{36} = am(1+n)^{36} + am(1+n)^{35} + \dots + am(1+n) = am \cdot (1+n) \frac{(1+n)^{36} - 1}{n}$$

Thay số ta được $T_{36} \approx 53\,297\,648,73$.

b) Hết tháng thứ 37, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{37} = [T_{36} + a(1+t)m](1+n) = T_{36} \cdot (1+n)^1 + a(1+t)m \cdot (1+n)$$

Hết tháng thứ 38, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{38} = [T_{37} + a(1+t)m](1+n) = T_{36} \cdot (1+n)^2 + a(1+t)m[(1+n)^2 + (1+n)].$$

.

Hết tháng thứ 60, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$\begin{aligned} T_{60} &= T_{36}(1+n)^{24} + a(1+t)m[(1+n)^{24} + (1+n)^{23} + \dots + (1+n)] \\ &= T_{36}(1+n)^{24} + a(1+t)m \cdot (1+n) \frac{(1+n)^{24} - 1}{n}. \end{aligned}$$



Thay số và tính ta được tổng số tiền tiết kiệm sau 60 tháng của người đó là:

$$T_{60} \approx 94\,602\,156,59.$$

