



DÃY SỐ

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 6: CẤP SỐ NHÂN



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2.5^n$.

- a) Số hạng đầu $u_1 = 10$.
- b) Số hạng $u_5 = 160$.
- c) (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 5$ và số hạng đầu $u_1 = 2$.
- d) (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = 10$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) **Đúng** : Ta có $u_1 = 10$.

b) **Sai** : Số hạng $u_5 = 2.5^5 = 6250$.

c) **Sai** : Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2.5^{n+1}}{2.5^n} = 5$ nên (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = 10$.

d) **Đúng** :

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

- a) Số hạng $u_2 = -1$.
- b) Số hạng $u_3 = -\frac{1}{2}$.
- c) Số hạng tổng quát $u_n = -2^{1-n}$.
- d) Tỷ số $\frac{u_3}{u_7} = 16$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) **Đúng**: Số hạng $u_2 = u_1.q = -2.\frac{1}{2} = -1$.

b) **Đúng**: Số hạng $u_3 = u_1.q^2 = -2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$.



c) Sai: Số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -2^{2-n}$.

d) Đúng: Tỉ số $\frac{u_3}{u_7} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{32}} = 16$.

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 1$, $u_2 \cdot u_4 = 81$ và công bội $q > 0$.

- a) Số hạng $u_3 = 8$.
- b) Số hạng $u_2 = 9$.
- c) Công bội của cấp số nhân bằng $q = 3$.
- d) Số 59049 là số hạng thứ 10 của cấp số nhân.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

Ta có $u_2 = u_1 q$, $u_4 = u_1 q^3 \Rightarrow u_2 \cdot u_4 = 81 \Leftrightarrow u_1^2 \cdot q^4 = 81 \Leftrightarrow q = 3$.

Do đó $u_n = u_1 q^{n-1} = 3^{n-1}$.

- a) Sai: Số hạng $u_3 = 3^2 = 9$.
- b) Sai: Số hạng $u_2 = (3)^1 = 3$.
- c) Đúng: $q = 3$.
- d) Sai: Xét phương trình $u_n = 59049 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^{10} \Leftrightarrow n = 11$.

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_4 = 40$ và $u_6 = 160$.

- a) Số hạng $u_5^2 = 4$.
- b) Số hạng $u_3 = 20$.
- c) Công bội của cấp số nhân bằng $q = -2$.
- d) Số hạng $u_{2n} > 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

Ta có $u_4 = u_1 q^3$, $u_6 = u_1 q^5 \Rightarrow \frac{u_6}{u_4} = q^2 \Leftrightarrow q^2 = 4 \Leftrightarrow q = \pm 2$,

Với $q = 2$ thì $u_1 = 5$. Do đó: $u_n = u_1 q^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$.

Với $q = -2$ thì $u_1 = -5$. Do đó: $u_n = u_1 q^{n-1} = -5 \cdot (-2)^{n-1}$.

- a) Sai: Số hạng $u_5^2 = u_4 \cdot u_6 = 2400$.
- b) Sai: Số hạng $u_3 = \pm 5 \cdot 4 = \pm 20$.
- c) Sai: $q = \pm 2$.

d) Đúng: $u_{2n} = \frac{5}{2} \cdot 4^n > 0$

Câu 5: Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$.

- a) Số hạng $u_2 = 6$.
- b) Số hạng tổng quát $u_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$.



c) Biết $S_n = 765$ thì $n = 8$.

d) Số hạng $u_{2n} > 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Ta có $u_4 = u_1 q^3, u_6 = u_1 q^5 \Rightarrow \frac{u_6}{u_4} = q^2 \Leftrightarrow q^2 = 4 \Leftrightarrow q = \pm 2$,

Với $q = 2$ thì $u_1 = 5$. Do đó: $u_n = u_1 q^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$.

Với $q = -2$ thì $u_1 = -5$. Do đó: $u_n = u_1 q^{n-1} = -5 \cdot (-2)^{n-1}$.

a) Sai: Số hạng $u_5^2 = u_4 \cdot u_6 = 2400$.

b) Sai: Số hạng $u_3 = \pm 5 \cdot 4 = \pm 20$.

c) Đúng: Áp dụng công thức của cấp số nhân ta có: $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{3 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 765 \Leftrightarrow n = 8$.

d) Đúng: $u_{2n} = \frac{5}{2} \cdot 4^n > 0$

Câu 6: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4, u_4 = 9$.

a) Số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$

b) Số hạng $u_5 = \frac{27}{2}$

c) $-\frac{2187}{32}$ là số hạng thứ 8

d) Cấp số nhân có công bội $q = -\frac{3}{2}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

Ta có: $u_2 = u_1 q = 4, u_4 = u_1 q^3 = 9 \Rightarrow \frac{u_4}{u_2} = \frac{u_1 q^3}{u_1 q} \Rightarrow \frac{9}{4} = q^2 \Rightarrow q = -\frac{3}{2} (q < 0)$.

Thay $q = -\frac{3}{2}$ vào u_2 , ta được: $u_1 \left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \Rightarrow u_1 = -\frac{8}{3}$.

Vậy cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$ và công bội $q = -\frac{3}{2}$.

Khi đó $u_n = -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Vậy $u_5 = -\frac{27}{2}$

$-\frac{2187}{32} \neq -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^7$ nên không phải là số hạng thứ 8

Câu 7: Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$.

a) Số hạng $u_1 = 3$

b) Số hạng $u_4 = 48$



- c) Số 12288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n)
 d) Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: 765.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Nhận xét: Nếu $u_1 = 0$ hay $q = 0$ thì (1) và (2) đều không thỏa mãn, vì vậy ta có $u_1 q \neq 0$. Chia theo vế (2) cho (1), ta được: $q = 2$.

Thay $q = 2$ vào (1) suy ra $u_1 = \frac{51}{1+2^4} = 3$.

Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

b) $u_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$

c) Xét $u_n = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13$.

Vậy 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

d) Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: $S_8 = \frac{u_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{3 \cdot (1-2^8)}{1-2} = 765$.

Câu 8:

Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_4 = \frac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$.

a) Số hạng $u_1 = 2; u_2 = \frac{2}{3}$

b) $u_5 - u_3 = -\frac{16}{81}$

c) Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 8 của cấp số nhân

d) Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là số lớn hơn 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ u_1 q^2 = 243 \cdot u_1 q^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ q^5 = \frac{1}{243} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Năm số hạng đầu của (u_n) là: $u_1 = 2; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{2}{9}; u_4 = \frac{2}{27}; u_5 = \frac{2}{81}$.

c) Số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{2}{3^{n-1}}$.

Xét $u_n = \frac{2}{6561} \Rightarrow \frac{2}{3^{n-1}} = \frac{2}{6561}$



$$\Rightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9.$$

Vậy $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số nhân (u_n) .

$$d) \text{ Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là: } S_9 = \frac{u_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{3}} \approx 2,99985 < 3.$$

Câu 9: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$.

- Số hạng $u_1 = 2$
- Gọi q là công bội của cấp số nhân, thì ba số $q; 1; 3$ tạo thành một cấp số cộng
- Số -486 là số hạng thứ 5 của cấp số nhân
- Tổng của 21 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng 5230176602

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Gọi q là công bội và S_{21} là tổng của 21 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_3 + u_5)q = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 180q = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1(-3)^2 + u_1(-3)^4 = 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1(9 + 81) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Số $-486 = 2 \cdot (-3)^5$ nên số -486 là số hạng thứ 6

$$\text{Suy ra } S_{21} = \frac{u_1(1-q^{21})}{1-q} = \frac{2[1-(-3)^{21}]}{1-(-3)} = \frac{1+3^{21}}{2}.$$

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) biết rằng $u_1 + u_2 + u_3 = 168$ và $u_4 + u_5 + u_6 = 21$.

- Số hạng $u_1 = 90$
- Công bội của cấp số nhân bằng 2
- Số 24 là số hạng thứ 3 của cấp số nhân
- Tổng của 10 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng $\frac{3069}{16}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 168 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 168 \\ u_1 \cdot q^3 + u_1 \cdot q^4 + u_1 \cdot q^5 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 168 \\ u_1 q^3(1+q+q^2) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{168}{1+q+q^2} \\ q^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 96 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}.$$



Ta có $24 = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$

Ta có $S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{96\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3069}{16}$

Câu 11: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội nguyên và các số hạng thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$

- Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 9
- Công bội của cấp số nhân $q = 3$
- Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599
- Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) b) Ta có: $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q (q^2 - 1) = 54 \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 108 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{54}{q(q^2-1)} \\ \frac{1}{q} = \frac{54}{108} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{54}{2(2^2-1)} \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$

c) Ta có: $S_n = 4599 \Leftrightarrow \frac{u_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} = 4599 \Leftrightarrow \frac{9 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 4599$

$\Leftrightarrow -9 \cdot (1-2^n) = 4599 \Leftrightarrow 1-2^n = -511 \Leftrightarrow 2^n = 512 \Leftrightarrow n = 9$

Vậy tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599.

d) Ta có: $u_k = 576 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{k-1} = 576 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^{k-1} = 576 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 64 \Leftrightarrow k-1 = 6 \Leftrightarrow k = 7$

Vậy số 576 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 3u_n + 4$ với mọi $n \geq 1$.

- Số hạng $u_2 = 7$.
- Số hạng $u_5 = 119$.
- Đặt $v_n = u_n + a$. Khi $a = -2$ thì (v_n) lập thành một cấp số nhân.
- Số hạng tổng quát $u_n = 3^n - 2 (n \geq 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Ta có $u_{n+1} = 3u_n + 4 \Leftrightarrow u_{n+1} + 2 = 3(u_n + 2)$.

Đặt $v_n = u_n + 2$, ta có $v_{n+1} = 3v_n$.

Do đó (v_n) là một CSN với $v_1 = u_1 + 2 = 3$ và công bội $q = 3$.

Do đó số hạng tổng quát của dãy (v_n) là $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \Rightarrow u_n = 3^n - 2$.

a) Đúng: Số hạng $u_2 = 7$.



b) Sai: Số hạng $u_5 = 3^5 - 2 = 241$.

c) Sai: $v_n = u_n + 2$.

d) Đúng.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$.

a) Số hạng $u_2 = 2$.

b) Tỉ số $\frac{u_{2023}}{u_{2024}} = 2$.

c) Số hạng $u_{2024} = \frac{1}{2^{2024}}$.

d) Tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10}$ bằng $\frac{1023}{256}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Theo đề ta có: $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{u_n}{n}$.

Đặt $v_n = \frac{u_n}{n}$ thì $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

Do đó (v_n) là một CSN với $v_1 = \frac{u_1}{1} = 2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Số hạng tổng quát của dãy (v_n) là $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \Rightarrow u_n = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

a) Đúng: Số hạng $u_2 = 2$.

b) Sai: Ta có: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n}{n+1} \Rightarrow \frac{u_{2023}}{u_{2024}} = \frac{2 \cdot 2023}{2024} = \frac{2023}{1012}$.

c) Sai: $u_{2024} = 2024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} = 253 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2019}$.

d) Đúng. $v_n = \frac{u_n}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ là một CSN với $v_1 = \frac{u_1}{1} = 2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Khi đó $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10} = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \frac{1023}{256}$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

a) (u_n) là cấp số nhân có công bội là $q = 3$.

b) $u_n = 2 \cdot 3^n$.

c) $S_7 = 2189$.

d) 39366 là số hạng thứ 10 của cấp số nhân.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Ta có $u_{n+1} = 3u_n (\forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có công bội là $q = 3$.



$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$S_7 = u_1 \frac{1-q^7}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-3^7}{1-3} = 2186$$

$$u_n = 2 \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow n = 10$$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 1 \end{cases}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$).

a) Số hạng thứ năm của dãy số là 685.

b) Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ Ta có (v_n) là cấp số nhân.

c) Số hạng tổng quát $u_n = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} + \frac{1}{3}$.

Ta có $S_8 = 58256$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 1 \end{cases}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$). Số hạng thứ năm của dãy số là 683.

♦ Ta có: $u_2 = 4u_1 - 1 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11$. $u_3 = 4u_2 - 1 = 4 \cdot 11 - 1 = 44 - 1 = 43$.

$u_4 = 4u_3 - 1 = 4 \cdot 43 - 1 = 172 - 1 = 171$. $u_5 = 4u_4 - 1 = 4 \cdot 171 - 1 = 684 - 1 = 683$.

♦ Vậy số hạng thứ năm của dãy số là $u_5 = 683$.

b) Ta có $u_{n+1} = 4u_n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{1}{3} = 4 \left(u_n - \frac{1}{3} \right)$

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{3}$. Ta có $v_{n+1} = 4v_n$. Suy ra (v_n) là cấp số nhân

c) Ta có: $v_{n+1} = 4v_n$. Suy ra (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} q = 4 \\ v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$

Suy ra: $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} + \frac{1}{3}$.

d) Ta có $S_8 = u_1 + u_2 + \dots + u_8 = \frac{8}{3} \cdot (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^7) + \frac{1}{3} \cdot 8 = 58256$.

Câu 16: Tương truyền rằng nhà vua Ấn Độ cho phép người phát minh ra bàn cờ vua được lựa chọn phần thưởng tùy theo sở thích. Người đó xin nhà vua: “Bàn cờ có 64 ô, với ô thứ nhất thần xin nhận 1 hạt thóc, ô thứ hai thì gấp đôi ô đầu, ô thứ ba thì lại gấp đôi ô thứ hai, ... cứ như vậy ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước và thần xin nhận tổng số các hạt thóc ở 64 ô”. Biết rằng khối lượng của 100 hạt thóc là 20 gam.

a) Số hạt thóc ở 64 ô là một cấp số nhân có $u_1 = 1; q = 2$.

b) Số hạt thóc ở ô thứ tám là 2^8 .

c) Tổng khối lượng thóc của 64 ô trên bàn cờ là 364 tỉ tấn.

d) Giả sử người đó muốn chở số thóc ở trên 32 ô đầu tiên về bằng tàu thủy, biết rằng mỗi chuyến tàu chở tối đa 10 tấn hàng hóa. Khi đó, người đó cần tối thiểu 85 chuyến tàu để chở hết số thóc đó.



Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

Số hạt thóc ở 64 ô là một cấp số nhân có $u_1 = 1; q = 2$, khi đó số hạt thóc ở ô thứ tám là $u_8 = u_1 q^7 = 2^7$.

Tổng số hạt thóc của 64 ô là: $S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$ hạt thóc, do đó tổng khối lượng thóc trên 64 ô trên bàn cờ là: $(2^{64} - 1) \cdot \frac{20}{100} \approx 3.69 \times 10^8 (g) = 369$ (tấn).

Tương tự, ta có khối lượng thóc của 32 ô đầu tiên là $(2^{32} - 1) \cdot \frac{20}{100} = 858993459 \approx 859$ (tấn),

Mỗi tàu chở tối đa 10 tấn hàng hóa thì cần tối thiểu 86 chuyến tàu để có thể chở hết số thóc trên.

Câu 17: Vào năm con gái được 4 tuổi, một người chuẩn bị gửi tiết kiệm đầu mỗi năm một số tiền x (triệu đồng) ($x \in \mathbb{N}$) để đến năm 18 tuổi sẽ có được 200 triệu cho con gái đi học đại học. Hiện tại lãi suất tiền gửi hàng năm là 4,8% /năm. Giả sử lãi suất này được giữ ổn định.

a) Tổng số tiền thu về sau 14 năm là một cấp số nhân có $q = (1 + 4,8\%)$.

b) Tổng số tiền thu về sau 14 năm là một cấp số nhân có $u_1 = x$.

c) $x = 10$ (triệu đồng)

d) Đến năm con gái được 10 tuổi, người này dự định khi con gái được 18 tuổi sẽ mua thêm cho con gái một chiếc xe máy trị giá 50 triệu đồng. Do đó, kể từ thời điểm đầu năm con gái được 10 tuổi người này cần gửi tiết kiệm y triệu đồng đến khi con gái 18 tuổi ($y \in \mathbb{N}$). Giá trị nhỏ nhất của $y = 15$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

Số tiền người đó nhận được sau năm thứ nhất là: $A_1 = x(1 + 4,8\%)$.

Số tiền người đó nhận được sau năm thứ hai là: $A_2 = x(1 + 4,8\%) + x(1 + 4,8\%)^2$.

Số tiền người đó nhận được sau năm thứ 14 là: $A_{14} = x(1 + 4,8\%) + x(1 + 4,8\%)^2 + \dots + x(1 + 4,8\%)^{14}$.

Khi đó: A_{14} có $\begin{cases} u_1 = x(1 + 4,8\%) \\ q = (1 + 4,8\%) \end{cases}$ nên $A_{14} = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = x(1 + 4,8\%) \frac{(1 + 4,8\%)^{14} - 1}{4,8\%}$.

Suy ra: $x = \frac{200 \cdot 4,8\%}{(1 + 4,8\%) (1 + 4,8\%)^{14} - 1} \approx 9,873336$ 10 (triệu đồng).

Khi $x = 10$ (triệu đồng).

Gọi $z = y - x$ là số tiền mà người đó phải gửi thêm mỗi năm kể từ năm con gái 10 tuổi (năm thứ 6) và $P_8 = z(1 + 4,8\%) + z(1 + 4,8\%)^2 + \dots + z(1 + 4,8\%)^8$ là số tiền nhận được sau 8 năm.

Khi đó để nhận được số tiền 250 triệu đồng vào năm con gái 18 tuổi (8 năm kể từ con gái 10 tuổi) thì:

$$P_8 = 250 - 10(1 + 4,8\%) \frac{(1 + 4,8\%)^{14} - 1}{4,8\%} \approx 47,43 \text{ (triệu đồng)}.$$



$$\text{Suy ra } z = \frac{47,43.4,8\%}{(1+4,8\%)(1+4,8\%)^8 - 1} \approx 4,77 \quad 5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy $y = 15$ (triệu đồng).

Câu 18: Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Gọi u_n (ghế) là tổng số ghế ở hàng thứ n .

- a) $u_2 = 18$.
- b) Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 2$.
- c) Số ghế ở hàng thứ 20 nhỏ hơn 54.
- d) Tổng số ghế trong nhà hát nhiều hơn 1000.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

Số ghế trong các dãy ghế liên tiếp lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$.

$u_2 = u_1 + d = 16 + 2 = 18$. Vậy a) và b) đúng.

Ta có $u_{20} = u_1 + 19d = 16 + 19.2 = 54$. Suy ra c) sai.

Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$S_{25} = u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = \frac{25}{2} [2u_1 + (25-1)d] = \frac{25}{2} (2.16 + 24.2) = 1000. \text{ Suy ra d) sai.}$$

Câu 19: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau: **Phương án 1:** Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu. **Phương án 2:** Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

- a) Trong phương án 1: dãy số tiền lương là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $u_1 = 120$, công sai $d_1 = 18$.
- b) Trong phương án 1: tiền lương người lao động nhận được trong năm thứ ba là 174 triệu.
- c) Trong phương án 1: tổng tiền lương người lao động nhận được trong ba năm là 414 triệu.
- d) Nếu kí hợp đồng lao động trong ba năm, với mong muốn nhận được tổng số tiền lương cao nhất thì người lao động nên chọn phương án 1.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Trong phương án 1: dãy số tiền lương là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $u_1 = 120$, công sai $d_1 = 18$ là mệnh đề đúng.

b) Trong phương án 1: $u_3 = 120 + 2.18 = 156$ triệu. Do đó **mệnh đề b) sai**.

c) Trong phương án 1: tổng tiền lương người lao động nhận được trong ba năm là

$$S_3 = \frac{(u_1 + u_3).3}{2} = \frac{(120 + 156).3}{2} = 414 \text{ triệu. Do đó mệnh đề c) đúng.}$$

d) Trong phương án 2: Dãy số tiền lương là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $v_1 = 24$, công sai $d_2 = 1,8$, lương tăng theo quý. Ba năm tương ứng với 12 quý.

Ta có $v_{12} = 24 + 11.1,8 = 43,8$ triệu.



Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{(v_1 + v_{12}) \cdot 12}{2} = (24 + 43,8) \cdot 6 = 406,8 \text{ triệu.}$$

Ta nhận thấy $406,8 < 414$.

Vậy nếu kí hợp đồng lao động trong ba năm, với mong muốn nhận được tổng số tiền lương cao nhất thì người lao động nên chọn phương án 1.

Do đó mệnh đề 4 đúng.

Câu 20: Trong hội chợ tết, một công ty sữa muốn xếp 1000 hộp sữa theo thứ tự từ trên xuống dưới như sau: Hàng thứ nhất có 1 hộp sữa, hàng thứ hai có 3 hộp sữa, hàng thứ ba có 5 hộp sữa, ... cứ như thế, số lượng hộp sữa của hàng sau lớn hơn số lượng hộp sữa của hàng trước nó là 2 hộp sữa (mô hình như hình dưới).



- a) Gọi u_n là số hộp sữa ở hàng thứ n thì (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.
- b) Số hộp sữa của hàng thứ 10 là 20 hộp sữa.
- c) Để xếp được 20 hàng thì cần 400 hộp sữa.
- d) Hàng cuối cùng có 900 hộp sữa.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Gọi u_n là số hộp sữa ở hàng thứ n thì (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

b) Số hộp sữa của hàng thứ 10 là $u_{10} = u_1 + 9d = 1 + 9 \cdot 2 = 19$ hộp sữa.

c) Để xếp được 20 hàng thì số hộp sữa cần có là

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2u_1 + 19 \cdot d) = \frac{20}{2}(2 \cdot 1 + 19 \cdot 2) = 400 \text{ hộp sữa}$$

d) Ta có $S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2] = n^2$.

Giả sử với 1000 hộp sữa ta chỉ xếp được nhiều nhất n hàng thì n là số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình $S_n \leq 1000 \Leftrightarrow n^2 \leq 1000 \Leftrightarrow -10\sqrt{10} \leq n \leq 10\sqrt{10}$. Suy ra $n = 31$.

Vậy, hàng cuối cùng có $u_{31} = \frac{31}{2}(2u_1 + 30 \cdot d) = \frac{31}{2}(2 \cdot 1 + 30 \cdot 2) = 961$ hộp sữa.

Câu 21: Một sinh viên sau khi ra trường và xin vào làm cho một trung tâm với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Cứ sau mỗi năm, trung tâm trả thêm cho sinh viên 20 triệu đồng. Gọi u_n (triệu đồng) là số tiền lương mà sinh viên đó nhận được ở năm thứ n .

a) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ hai là 120 triệu đồng.

b) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ 10 là 300 triệu đồng.



c) Dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 120$ và công sai $d = 20$.

d) Giả sử, mỗi năm bạn sinh viên chi tiêu tiết kiệm hết 70 triệu đồng. Vậy sau ít nhất 12 năm thì sinh viên đó mua được căn chung cư 2 tỉ đồng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

Ta thấy, số tiền lương năm sau hơn năm trước 20 triệu đồng nên (u_n) là cấp số cộng có

$u_1 = 100$ và công sai $d = 20$. Do đó: $u_n = u_1 + (n-1)d = 100 + (n-1).20 = 20n + 80$

a) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ hai là $u_2 = 120$ (triệu đồng).

Vậy mệnh đề 1 là đúng.

b) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ 10 là $u_{10} = 20.10 + 80 = 280$ (triệu đồng).

Vậy mệnh đề 2 là sai.

c) Mệnh đề c) là sai vì $u_1 = 100$.

d) Tổng số tiền bạn sinh viên tiết kiệm được sau n năm là:

$$S = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] - 70n = \frac{n}{2} [2.100 + (n-1).20] - 70n = 10n^2 + 20n \text{ (triệu đồng)}.$$

$$\text{Ta có: } S \geq 2000 \Leftrightarrow 10n^2 + 20n - 2000 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 13,1 \\ n \leq -15,1 \end{cases}$$

Do đó sau ít nhất sau 14 năm thì sinh viên đó có thể mua được chung cư 2 tỉ đồng.

Vậy mệnh đề 4 là sai.

Câu 22: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (đế tháp có diện tích là $12\,288\,m^2$).

a) Diện tích tầng 11 là $4(m^2)$.

b) Diện tích các tầng lập thành cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$.

c) Diện tích các tầng lập thành cấp số cộng có công sai $d = \frac{1}{2}$.

d) Cần $12\,282(m^2)$ gạch để lát nền từ tầng 1 đến hết tầng 11.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ tầng 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$ và

diện tích tầng 1 là $u_1 = \frac{12\,288}{2} = 6\,144$. Khi đó diện tích mặt trên cùng là

$$u_{11} = u_1 q^{10} = \frac{6\,144}{2^{10}} = 6(m^2).$$

Tổng diện tích từ tầng 1 đến hết tầng 11 là:

$$S_{11} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{11} = \frac{u_1(1-q^{11})}{1-q} = \frac{6\,144 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 12\,282(m^2).$$



Suy ra cần $12\,282(m^2)$ gạch để lát nền từ tầng 1 đến hết tầng 11.

Câu 23: Để tích lũy cho việc học đại học của cậu con trai đầu lòng, cô Lan quyết định hằng tháng bỏ ra 600 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi cậu con trai tròn ba tuổi và gửi tiền vào đầu mỗi tháng.

- a) Đến lần gửi khoản tiền thứ 180 thì cậu con trai tròn 18 tuổi.
 b) Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 2 là $0,6(1+0,5\%)$ triệu đồng.
 c) Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 5 (làm tròn đến hàng nghìn) là 3.030.000 đồng.
 d) Số tiền của cô Lan có trong chương trình vào thời điểm cậu con trai đầu lòng tròn 18 tuổi nhỏ hơn 160 triệu đồng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Lan có trong chương trình tích lũy ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n). Kí hiệu $a = 0,6$ triệu đồng, $r = 0,5\%$.

Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ nhất là: $u_1 = a$.

Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 2 là:

$$u_2 = a(1+r) + a = 0,6(1+0,5\%) + 0,6.$$

Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 3 là: $u_3 = a(1+r)^2 + a(1+r) + a$.

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ n là:

$$u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a = a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Số tiền của cô Lan có trong chương trình ở đầu tháng thứ 5 là:

$$u_5 = a \cdot \frac{(1+r)^5 - 1}{r} = 0,6 \cdot \frac{(1+0,5\%)^5 - 1}{0,5\%} \approx 3,03 \text{ triệu đồng} = 3.030.000 \text{ đồng}.$$

Vào thời điểm cậu con trai đầu lòng tròn 18 tuổi là thời điểm gửi khoản tiền thứ 180.

$$\text{Lúc đó cô sẽ tích lũy được } u_{180} = a \cdot \frac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 0,6 \cdot \frac{(1+0,5\%)^{180} - 1}{0,5\%} \approx 174,49 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 24: Anh Bình là nhân viên của một công ty **A**. Từ ngày 1/2/2024 anh Bình được nâng lương lên bậc 4, mức lương anh hiện hưởng là 11.718.750 đồng mỗi tháng (chưa trừ thuế và bảo hiểm). Theo quy định của công ty, nếu không bị kỉ luật, không có khen thưởng đặc biệt thì cứ sau 3 năm anh Bình sẽ được nâng một bậc lương, tăng thêm 25% so với bậc lương trước, tối đa là bậc 7. Khi hết bậc 7 sẽ chuyển sang vượt khung. Lương vượt khung năm sau cao hơn năm trước 1% và vẫn nhận hàng tháng. Lương bậc 1 sẽ được tính sau khi hết đúng 1 năm tập sự. Anh Bình là người rất nghiêm túc, không vi phạm kỉ luật. Anh dự định sẽ làm việc 30 năm ở công ty này rồi nghỉ hưu. (làm tròn đến đồng)

- a) Lương bậc 5 của anh Bình sẽ là 14.500.000 đồng.
 b) Lương bậc 1 của anh Bình là 6.000.000 đồng.
 c) Lương bậc 7 anh Bình là 23.250.000.
 d) Tổng tiền lương anh Bình nhận được kể từ khi hết tập sự đến khi nghỉ hưu là $= 5.554.357.709$



Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

Gọi u_n là lương bậc n của anh Bình hàng tháng. Ta có $u_{n+1} = u_n + 25\%u_n = u_n \cdot 1,25$ ($n \leq 7$)

u_n là cấp số nhân có công bội $q = 1,25$.

+) Ta có $u_4 = 11.718.750$ nên $u_5 = u_4 \times 1,25 = 14.648.437,5$ đồng nên mệnh đề **a)** sai.

+) $u_4 = u_1 \times q^3 \Leftrightarrow u_1 = \frac{u_4}{q^3} = 6.000.000$ nên mệnh đề **b)** đúng.

+) $u_7 = u_1 \times q^6 = 6.000.000 \times 1,25^6 = 22.888.184$ đồng nên mệnh đề **c)** sai.

+) Khi vượt khung, lương mỗi khung %, là cấp số nhân v_n , ($1 \leq n \leq 8$) có số hạng đầu là

$v_1 = u_7 + 1\%u_7 = 1,01u_7$, công bội là $q' = 1,01$.

Anh Bình làm việc 30 năm liên tục, trong đó 1 năm tập sự, 21 năm lương theo bậc, 8 năm vượt khung. Mỗi bậc lương anh Bình nhận 36 tháng, lương vượt khung mỗi khung % anh nhận 12 tháng. Tổng lương anh Bình nhận được kể từ khi hết tập sự đến khi nghỉ hưu là

$$S = 36u_1 \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1} + 12v_1 \cdot \frac{q'^8 - 1}{q' - 1} = 5.554.357.709 \text{ đồng. Vậy mệnh đề d) đúng.}$$

Câu 25: Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2.

- Số đo góc nhỏ nhất bằng 24°
- Số đo góc lớn nhất bằng 196°
- Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng 220°
- Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng 168°

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Đặt $u_1; u_2; u_3; u_4$ theo thứ tự là số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$, gọi q là công bội của cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; u_4 \Rightarrow q = 2$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1 - q^4}{1 - q} = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 24^\circ \\ q = 2 \end{cases}$$

Vậy số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là: $24^\circ; 48^\circ; 96^\circ; 192^\circ$.

Câu 26: Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Khi đó:

- Ngày thứ hai Aladin ước 6 điều.
- Ngày thứ ba Aladin ước 12 điều.
- Ngày thứ tư Aladin ước 48 điều.
- Sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả 3269 điều ước



Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ngày thứ nhất Aladin ước 3 điều.

Ngày thứ hai Aladin ước $2 \cdot 3$ điều.

Ngày thứ ba Aladin ước $2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ điều.

Ngày thứ tư Aladin ước $2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$ điều.

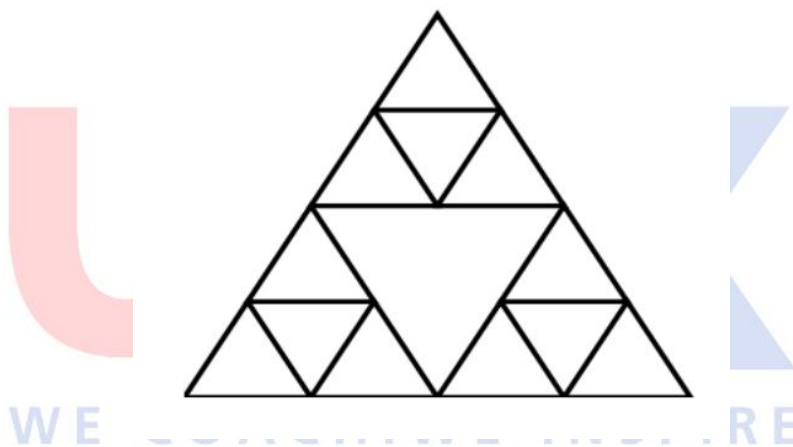
Ngày thứ 10 Aladin ước $2^9 \cdot 3$ điều.

Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: $3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9) = 3 \left(\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \right) = 3069$ điều.

Câu 27: Tam giác Sierpinski được nhà toán học người Ba Lan **Franciszek Sierpiński** giới thiệu năm 1915 và là một trong những ví dụ kinh điển về cấu trúc Fractal. Tam giác Sierpinski được xây dựng như sau

+ Bắt đầu từ tam giác đều cạnh bằng 1. Tiếp đến chia tam giác nhỏ này thành 4 tam giác bằng nhau bằng cách nối trung điểm các cạnh, sau đó loại bỏ tam giác nhỏ ở giữa. Ta được tam giác Sierpinski thứ nhất.

+ Lặp lại quy trình trên cho vô hạn lần.



a) Diện tích tam giác đều ban đầu là $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

b) Sau mỗi quy trình thì số lượng tam giác nhiều gấp 3 lần so với ngay trước khi thực hiện quy trình đó.

c) Giả sử S_n là diện tích tam giác Sierpinski sau n quy trình. Khi đó S_n là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{3}$.

d) Tổng cấp số nhân lùi vô hạn $S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \sqrt{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng, Ta có $S_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

b) Đúng, Số lượng mỗi tam giác sau mỗi quy trình là 1;3;9;...



c) Đúng, ta có $S_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{16} \text{ cm}^2$; $S_2 = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{64} \text{ cm}^2$; ..., suy ra S_n là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{3}{4}$.

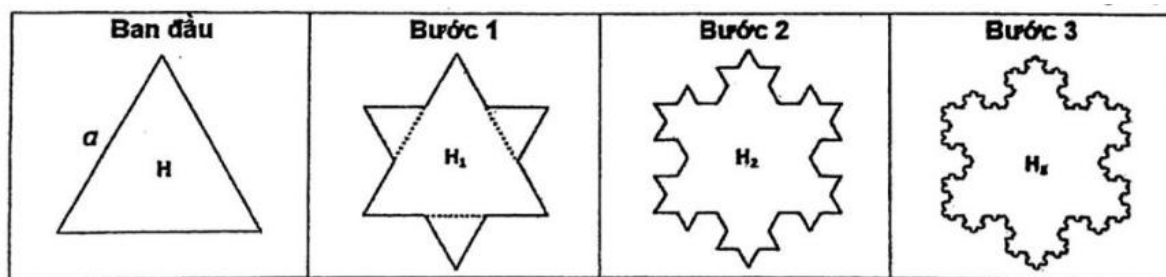
d) Đúng, Tổng cấp số nhân lùi vô hạn $S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$.

Câu 28: Cho hình H là một tam giác đều cạnh a . Người ta lần lượt thực hiện các bước như sau:

* **Bước 1:** Chia mỗi cạnh của hình H thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài hình H , sau đó xóa bỏ đoạn ở giữa, ta được hình H_1 (tham khảo hình vẽ).

* **Bước 2:** Tiếp tục lặp lại quá trình trên với mỗi cạnh của hình H_1 ta được hình H_2 .

Sau nhiều bước thực hiện như trên, ta được một hình giống như bông tuyết, gọi là *bông tuyết Von Koch*.



a) Độ dài mỗi cạnh của hình H_1 là $\frac{a}{3}$.

b) Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì độ dài mỗi cạnh của hình H_{n-1} gấp 3 lần độ dài mỗi cạnh của hình H_n .

c) Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ lần lượt là số cạnh của các hình $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$. Khi đó, dãy số $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 4$.

d) Chu vi của hình *bông tuyết Von Koch* H_{16} lớn hơn 100 lần chu vi của hình H .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Chia mỗi cạnh của hình H thành ba đoạn thẳng bằng nhau nên mỗi đoạn có độ dài $\frac{a}{3}$ và trên mỗi đoạn thẳng đó, dựng một tam giác đều nằm ngoài hình H , ta được hình H_1 nên độ dài mỗi cạnh của H_1 là $\frac{a}{3}$.

b) Độ dài mỗi cạnh của hình H_2 là $\frac{a}{3^2}$.

...

Độ dài mỗi cạnh của hình H_{n-1} là $\frac{a}{3^{n-1}}$.

Độ dài mỗi cạnh của hình H_n là $\frac{a}{3^n}$.



Vậy độ dài mỗi cạnh của hình H_{n-1} gấp 3 lần độ dài mỗi cạnh của hình H_n .

c) Ta có $u_1 = 12 = 3.4; u_2 = 48 = 3.4^2, \dots, u_n = 3.4^n, \dots$

Vậy dãy số $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 4$.

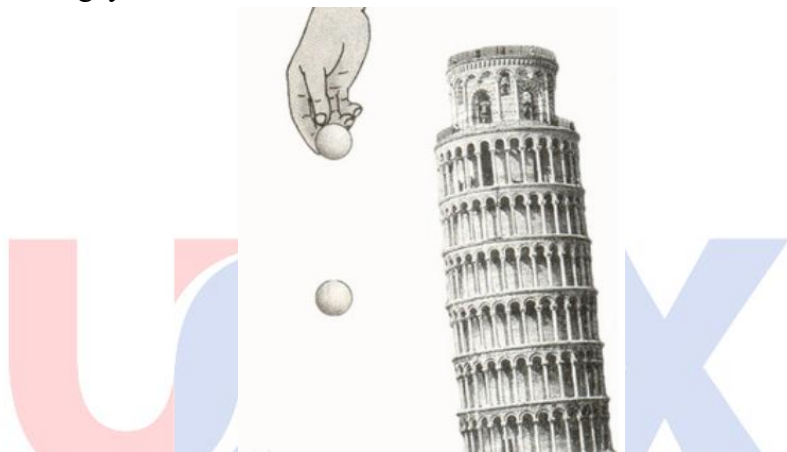
d) Hình H có chu vi là $3a$.

Hình H_{16} có số cạnh là 3.4^{16} cạnh và độ dài mỗi cạnh là $\frac{a}{3^{16}}$ nên chu vi hình H_{16} là

$$3.4^{16} \cdot \frac{a}{3^{16}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{16} \cdot 3a < 100.3a.$$

Vậy chu vi của hình *bông tuyết Von Koch* H_{16} nhỏ hơn 100 lần chu vi của hình H .

Câu 29: Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên theo phương thẳng đứng với độ cao bằng $\frac{1}{5}$ độ cao mà quả bóng đạt được ngay trước đó.



- Độ cao của quả bóng sau mỗi lần chạm đất lập thành một cấp số nhân với công bội 0,2.
- Sau lần chạm đất thứ 2 quả bóng vẫn nảy lên được độ cao trên 2m.
- Xét dãy các độ cao của quả bóng sau mỗi lần chạm đất. Dãy số này có giới hạn bằng 0.
- Tổng hành trình của quả bóng gấp rưỡi độ cao ban đầu của quả bóng.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng

b) Đúng.

Sau lần chạm đất thứ 1 ta có $U_1 = 55,8 \cdot \frac{1}{5} = 11,16$

Sau lần chạm đất thứ 2 ta có $U_2 = U_1 \cdot \frac{1}{5} = 11,16 \cdot \frac{1}{5} = 2,232$

c) Đúng. Xét dãy các độ cao của quả bóng sau mỗi lần chạm đất là $U_n = 55,8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Suy ra $\lim U_n = 0$

d) Sai.

Tổng hành trình của quả bóng là:



$$S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = 55,8 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots \right) = 55,8 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 13,95.$$

Câu 30: Một người lên kế hoạch để đọc một cuốn sách có 256 trang như sau: ngày thứ nhất đọc 1 trang sách, từ ngày thứ hai mỗi ngày đọc số trang gấp đôi số trang đã đọc của ngày liền trước đó.

- Ngày thứ 5, người đó đọc 16 trang sách.
- Số trang sách người đó đọc theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội là 2.
- Số trang sách người đó đọc trong ngày thứ sáu bằng tổng số trang sách đã đọc trong năm ngày trước đó.
- Người đó đọc hết cuốn sách trong một tuần.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Đúng.

Gọi số sách đọc được ở ngày thứ u_n . Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = 2u_1 = 2$, $u_3 = 2u_2 = 4$, $u_4 = 2u_3 = 8$, $u_5 = 2u_4 = 16$.

Vậy ngày thứ 5 đọc được 16 trang sách.

b) Đúng.

Ngày thứ nhất đọc được 1 trang $\Rightarrow u_1 = 1$.

Từ ngày thứ hai mỗi ngày đọc số trang gấp đôi số trang đã đọc của ngày liền trước đó $\Rightarrow u_n = 2u_{n-1} (n > 1)$.

$\Rightarrow$ Số trang sách đọc được lập thành cấp số nhân với công bội là 2.

Số hạng tổng quát là: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = u_1 \cdot 2^{n-1}$.

c) Sai.

Số trang sách đọc được ở ngày thứ 6 là: $u_6 = u_1 \cdot 2^5 = 32$.

Số sách đọc được ở 5 ngày trước đó là: $S_5 = \frac{u_1(1-2^5)}{1-2} = 31$.

d) Sai

Số trang sách đọc được trong 1 tuần: $S_7 = \frac{u_1(1-2^7)}{1-2} = 127$ (trang).