



QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 11: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG



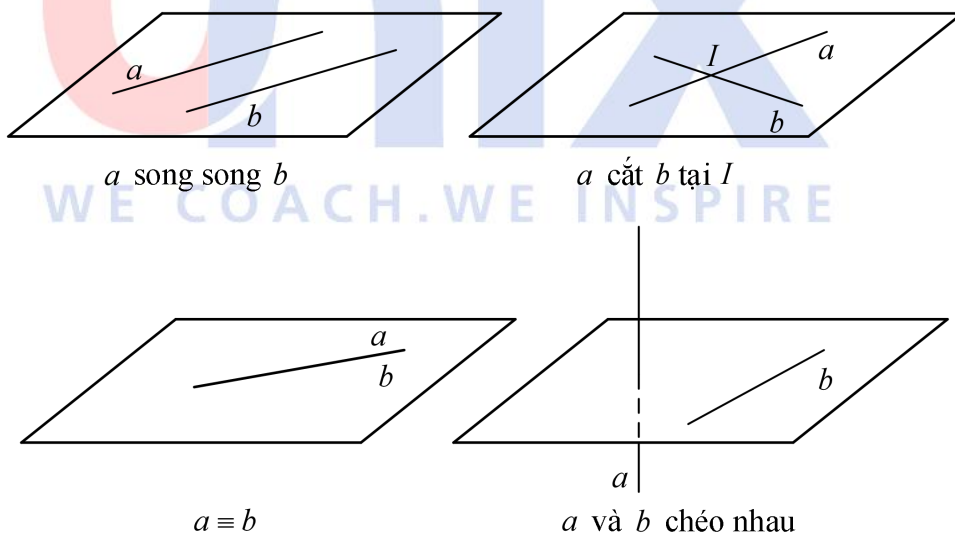
LÝ THUYẾT.

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

- Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói a và b **đồng phẳng**. Khi đó, a và b có thể cắt nhau, song song với nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu a và b không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói a và b **chéo nhau**. Khi đó, ta cũng nói a chéo với b , hoặc b chéo với a .

Do đó: Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó, giữa hai đường thẳng sẽ có 4 vị trí tương đối



Định nghĩa:

- Hai đường thẳng gọi là **đồng phẳng** nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là **song song** nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.

2. TÍNH CHẤT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG



Tính chất 1:

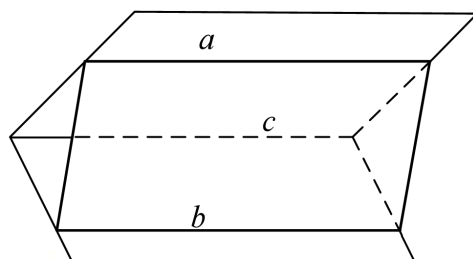
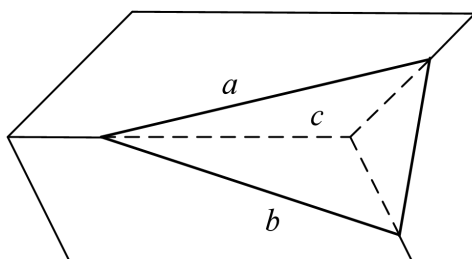
Trong không gian, qua một điểm không nằm trên một đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Tính chất 2:

Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý:

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy đồng quy hoặc đôi một song song.



☑ Chú ý:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG



PHƯƠNG PHÁP.

- ❶ Cách 1: Sử dụng tính chất đường trung bình, định lý Ta-let để chứng minh hai đường thẳng song song.
- ❷ Cách 2: Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.
- ❸ Cách 3: Áp dụng định lý giao tuyến của 3 mặt phẳng và hệ quả của nó.



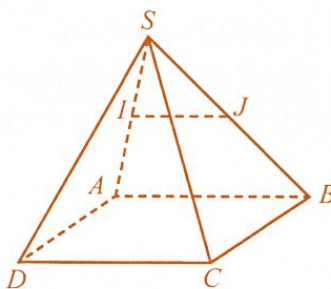
BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB . Chứng minh rằng $IJ \parallel AB$, từ đó suy ra $IJ \parallel CD$.

Lời giải

Vì I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB nên IJ là đường trung bình của tam giác SAB .

Do đó, $IJ \parallel AB$.



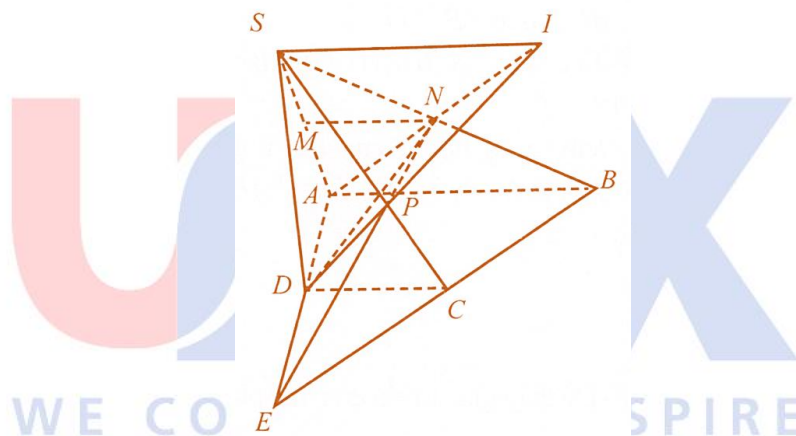
Mà $AB // CD$ nên $IJ // CD$ (vì cùng song song với đường thẳng AB).

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB .

a) Chứng minh MN song song với CD .

b) Gọi P là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (ADN) , I là giao điểm của AN và DP . Chứng minh SI song song với CD .

Lời giải



a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN // AB$. Mà $ABCD$ là hình thang nên $AB // CD$.

Suy ra $MN // AB // CD$. Vậy $MN // CD$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của AD và BC . Trong mặt phẳng (SBC) , gọi P là giao điểm của SC và EN .

Ta có: $E \in AD$ và $AD \subset (ADN)$, suy ra $EN \subset (ADN)$;

$P \in EN$ và $EN \subset (ADN)$, suy ra $P \in (ADN)$. Vậy $P = SC \cap (ADN)$.

Do $I = AN \cap DP$, suy ra $I \in AN$.

Ta có: $I \in AN$ và $AN \subset (SAB)$; $I \in DP$ và $DP \subset (SCD)$.

Suy ra $I \in (SAB) \cap (SCD)$. Do đó $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Ta có $AB \subset (SAB)$; $CD \subset (SCD)$; $(SAB) \cap (SCD) = SI$. Mà $AB // CD$. Suy ra $SI // CD$.

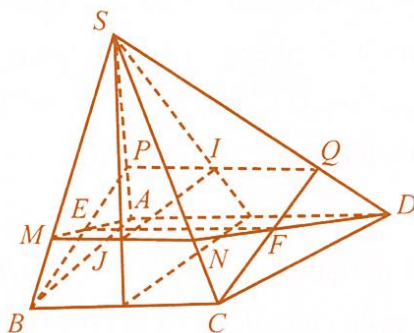


Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD . Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC . Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q .

a) Chứng minh MN song song với PQ .

b) Gọi E là giao điểm của AM và BP , F là giao điểm của CQ và DN . Chứng minh EF song song với MN và PQ .

Lời giải



a) Ta có $AD \parallel BC, AD \subset (ADJ), BC \subset (SBC), (ADJ) \cap (SBC) = MN$.

Suy ra $MN \parallel AD \parallel BC$.

Chứng minh tương tự, ta có $PQ \parallel AD \parallel BC$. Suy ra $MN \parallel PQ$.

b) Ta có: $AD \parallel BC, (ADJ) \cap (IBC) = EF, AD \subset (ADJ), BC \subset (IBC)$.

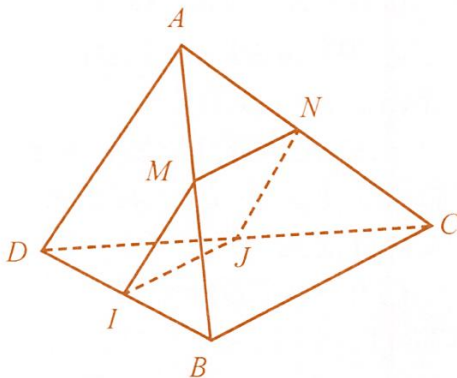
Suy ra $EF \parallel AD \parallel BC$, suy ra $EF \parallel MN \parallel PQ$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD .

a) Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.

b) Tứ giác $MNJI$ là hình gì. Tìm điều kiện để tứ giác $MNJI$ là hình bình hành.

Lời giải



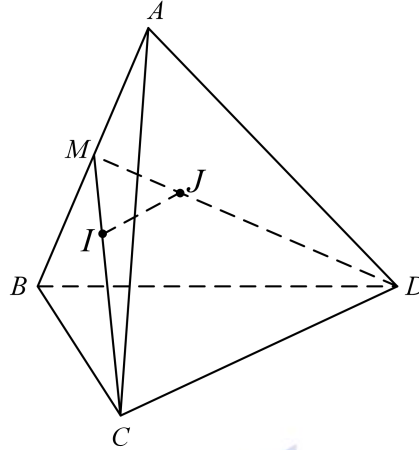
a) Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, suy ra $MN \parallel BC$.



b) Ta có IJ là đường trung bình của tam giác DBC , suy ra $IJ \parallel BC$. Suy ra $IJ \parallel BC \parallel MN$, do đó $MNJI$ là hình thang. $MNJI$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MI \parallel NJ \parallel AD$, suy ra MI là đường trung bình của tam giác ADB . Vậy M là trung điểm AB .

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $I; J$ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD . Chứng minh rằng: $IJ \parallel CD$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB

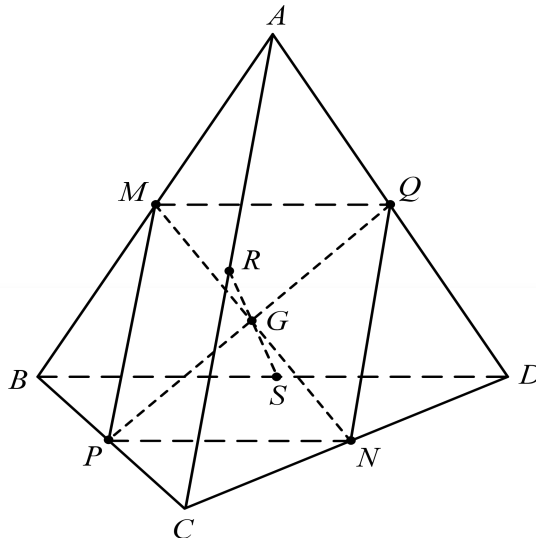
Xét tam giác ABC có: $\frac{MI}{MC} = \frac{1}{3}$

Xét tam giác ABD có: $\frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3}$

Do $\frac{MI}{MC} = \frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel CD$

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD . Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Lời giải





Ta có: MQ là đường trung bình của tam giác $ABD \Rightarrow \begin{cases} MQ \parallel DB \\ MQ = \frac{1}{2}BD \end{cases} \quad (1)$

NP là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow \begin{cases} PN \parallel BD \\ PN = \frac{1}{2}BD \end{cases} \quad (2)$

Từ (1); (2) $\Rightarrow PN \parallel QM$ và $PN = QM$

Vậy $MPNQ$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN$ và PQ cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đường.

Chứng minh tương tự, ta có: $QRPS$ là hình bình hành

$\Rightarrow QP$ và RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đường.

Vậy MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

DẠNG 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

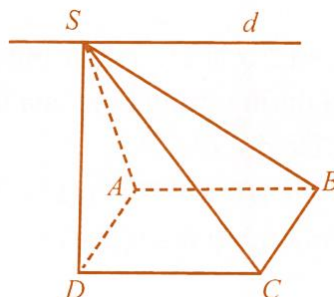
❶ Cách 1: Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.

❷ Cách 2: Nếu hai mặt phẳng $(P); (Q)$ lần lượt chứa hai đường thẳng song song a, b và có 1 điểm chung M thì $(P) \cap (Q) = Mx$ với $Mx \parallel (a) \parallel (b)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải



Ta có $AB \subset (SAB); CD \subset (SCD); AB \parallel CD; S \in (SAB) \cap (SCD)$.

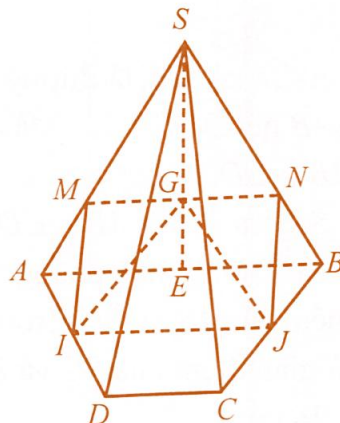
Vậy d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) với $d \parallel AB \parallel CD, S \in d$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB .



- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) .
- b) Tìm điều kiện của AB và CD để các giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp tạo thành một hình bình hành.

Lời giải



a) Ta có IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $AB // IJ$.

Ta có $G \in (SAB) \cap (IJG)$; $AB \subset (SAB)$; $IJ \subset (IJG)$; $AB // IJ$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là MN với $MN // IJ // AB$, sao cho $M \in SA$, $N \in SB$.

b) Dễ thấy giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp là tứ giác $MNJI$.

Do G là trọng tâm của tam giác SAB và $MN // AB$ nên $\frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$ (E là trung điểm của AB) suy ra $MN = \frac{2}{3}AB$.

Ta lại có $IJ = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Vì $MN // IJ$ nên $MNJI$ là hình thang, do đó $MNJI$ là hình bình

hành khi $MN = IJ \Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$.

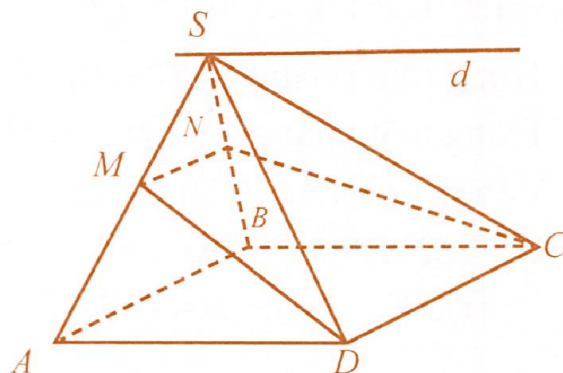
Vậy giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp tạo thành một hình bình hành khi $AB = 3CD$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (SAD) và (SBC) ;

b) (SAB) và (MDC) , với M là một điểm bất kì thuộc cạnh SA .

Lời giải



a) Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$, $AD \subset (SAD)$, $BC \subset (SBC)$ và $AD // BC$.

Suy ra $(SAD) \cap (SBC) = d$ với $S \in d$, $d // AD // BC$.

b) Ta có $M \in (SAB) \cap (MDC)$, $AB \subset (SAB)$, $DC \subset (MDC)$ và $AB // DC$.

Suy ra $(SAB) \cap (MDC) = Mx$ với $Mx // AB // DC$.

Gọi $N = SB \cap Mx$.

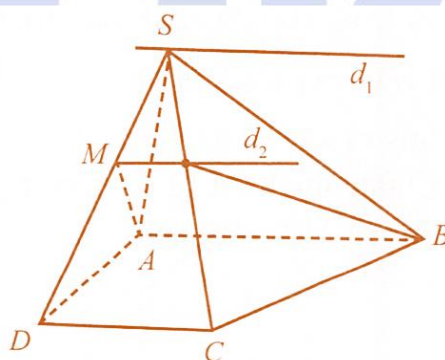
Khi đó $(SAB) \cap (MDC) = MN$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng SD .

a) Tìm các giao tuyến: $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$; $d_2 = (SCD) \cap (MAB)$.

b) Chứng minh $d_1 // d_2$.

Lời giải



a) Ta có $AB // CD$ và S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) , suy ra giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d_1 thỏa mãn: d_1 đi qua S và $d_1 // AB // CD$.

Ta có $AB // CD$ và M là điểm chung của hai mặt phẳng (SCD) và (MAB) , suy ra giao tuyến của (SCD) và (MAB) là đường thẳng d_2 thỏa mãn: d_2 đi qua M và $d_2 // AB // CD$.

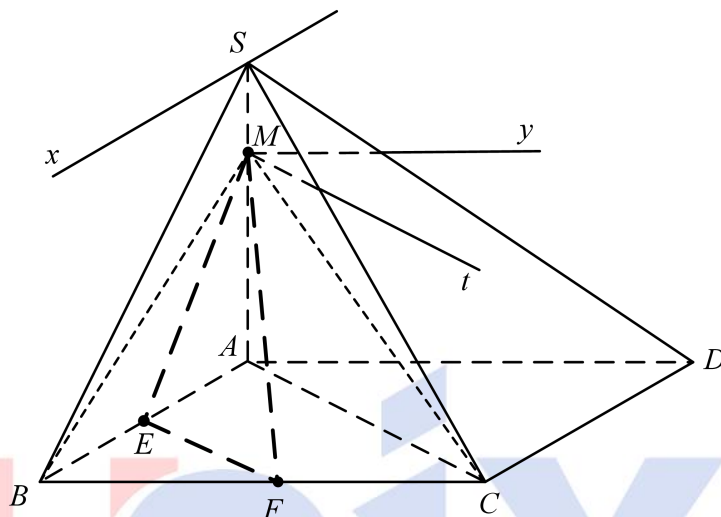
b) Ta có $d_1 // d_2$ vì chúng cùng song song với AB .



Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA , điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- 1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- 2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) .
- 3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .

Lời giải



1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD) \Rightarrow Sx = (SAB) \cap (SCD) \text{ với } Sx \parallel AB \parallel CD \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD)

$$\text{Lại có: } \begin{cases} M \in SA \subset (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MBC) \cap (SAD)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (SBC); AD \subset (SAD) \Rightarrow My = (MBC) \cap (SAD) \text{ với } My \parallel BC \parallel AD \\ BC \parallel AD \end{cases}$$

3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in SA \subset (SAC) \\ M \in (MEF) \end{cases} \Rightarrow M \in (MEF) \cap (SAC)$$

Xét tam giác ABC có: EF là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow EF \parallel AC$

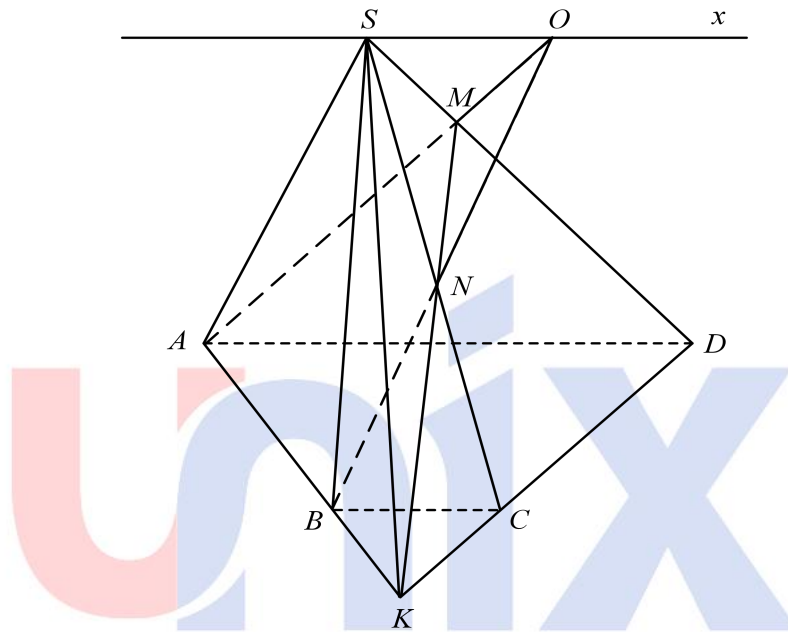


$$\text{Do } \begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF); AC \subset (SAC) \Rightarrow Mt = (MEF) \cap (SAC) \text{ với } EF // AC // Mt. \\ EF // AC \end{cases}$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD , AB cắt CD tại K , điểm M thuộc cạnh SD .

- 1) Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC) . Tìm giao điểm N của KM và (SBC) .
- 2) Chứng minh rằng: AM , BN , (d) đồng quy.

Lời giải



- 1) Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC) . Tìm giao điểm N của KM và (SBC) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD); BC \subset (SBC) \Rightarrow Sx = (SAD) \cap (SBC) \text{ với } Sx // AD // BC \\ AD // BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow (d) \equiv Sx$$

$$\text{Trong } (SCD) \text{ gọi } N = KM \cap SC \Rightarrow \begin{cases} N \in KM \\ N \in SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N = KM \cap (SBC)$$

- 2) Chứng minh rằng: AM , BN , (d) đồng quy

$$\text{Ta có: } (d) = (SAD) \cap (SBC)$$

Trong (AMK) gọi O là giao điểm của AM và BN



$$\Rightarrow \begin{cases} O \in AM \subset (SAD) \\ O \in BN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow O \in (d)$$

Vậy ba đường thẳng (d) ; BN ; AM đồng quy tại O .

