



QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG



LÝ THUYẾT.

1. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng d và mp (α) . Nếu d và (α) không có điểm chung thì ta nói **d song song với (α)** hay (α) song song với d . Kí hiệu là: $d \parallel (\alpha)$, hay $(\alpha) \parallel d$.

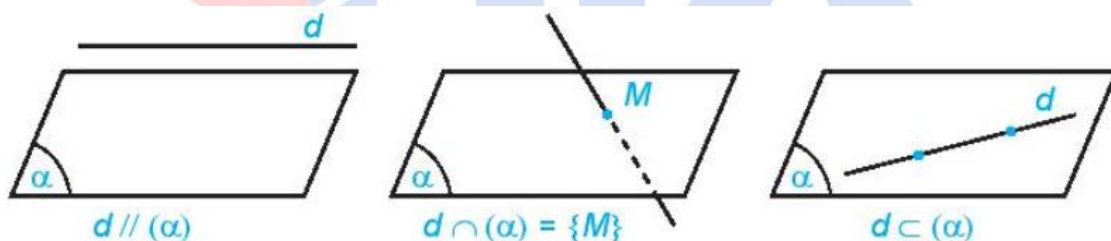
Ngoài ra:

- Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M . Khi đó ta nói d và (α) cắt nhau tại M .

Kí hiệu là: $d \cap (\alpha) = \{M\}$, hay $d \cap (\alpha) = M$.

- Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung. Khi đó, d **nằm trong** (α) hay (α) chứa d .

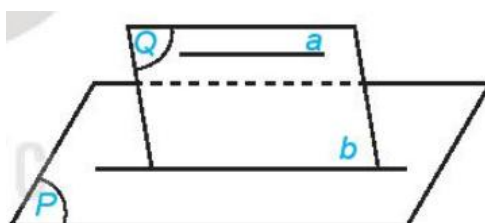
Kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.



2. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG.

Tính chất 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với một đường thẳng nằm trong (P) thì a song song với (P) .

$$\text{Kí hiệu: } \begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



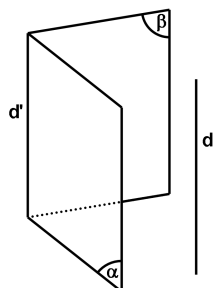


Tính chất 2: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a .

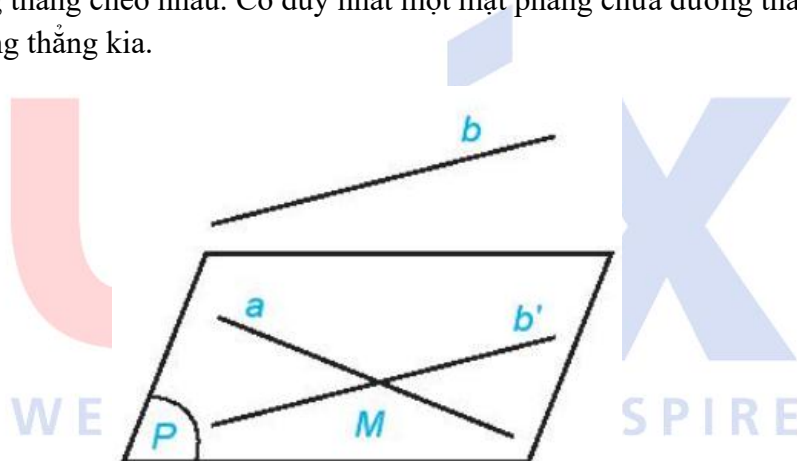
$$\text{Kí hiệu: } \begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

Chú ý 1: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.

$$\text{Kí hiệu: } \begin{cases} d \parallel (\alpha) \\ d \parallel (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d \parallel d'$$



Chú ý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

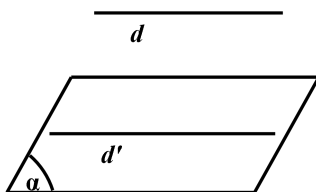


II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH, CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẪNG.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho $d \not\subset (\alpha)$, khi đó $\begin{cases} d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\alpha)$

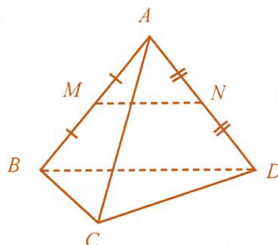




2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD . Chứng minh rằng $MN \parallel (BCD)$.

Lời giải



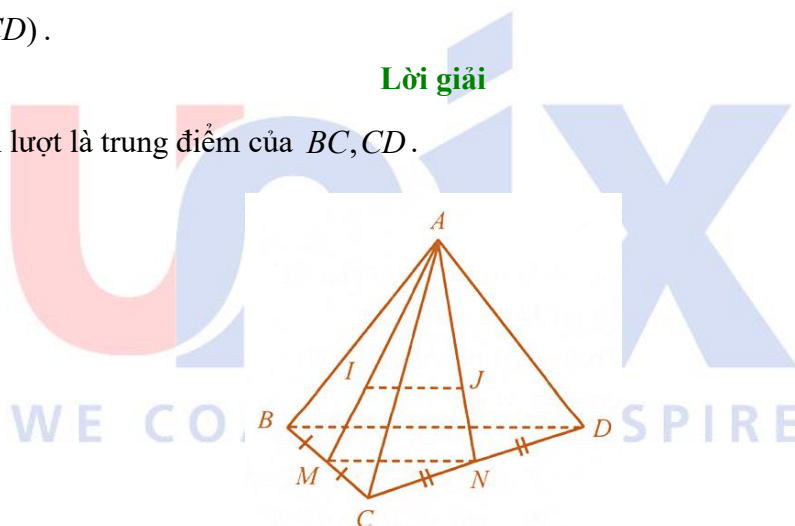
Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD nên MN là đường trung bình của tam giác ABD .

Suy ra $MN \parallel BD$. Mà $BD \subset (BCD)$ nên $MN \parallel (BCD)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC, ACD . Chứng minh rằng $IJ \parallel (BCD)$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD .



Suy ra MN là đường trung bình của tam giác BCD . Suy ra $MN \parallel BD$. (1)

Mặt khác, I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ACD nên $\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3}$.

Theo định lý Thalès đảo trong tam giác AMN , ta có $IJ \parallel MN$. (2)

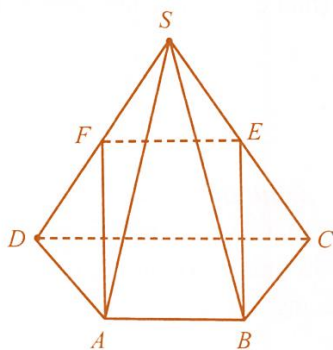
Từ (1) và (2) suy ra $IJ \parallel BD$.

Mà $BD \subset (BCD)$ nên $IJ \parallel (BCD)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 2a$. Gọi E là trung điểm của SC . Chứng minh rằng $BE \parallel (SAD)$.

Lời giải

Cách 1:



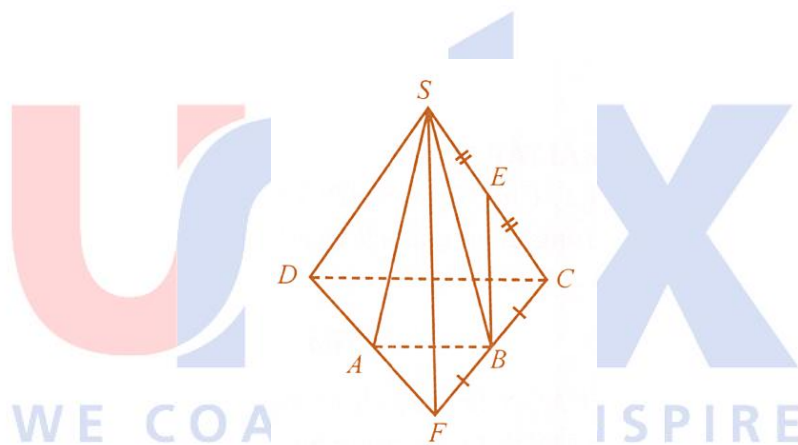
Gọi F là trung điểm của SD . EF là đường trung bình của tam giác SCD .

Suy ra $EF \parallel CD$ và $EF = \frac{1}{2}CD$.

Mà $AB \parallel CD$ và $AB = \frac{1}{2}CD$. Do đó, $EF \parallel AB$ và $EF = AB$ hay $ABEF$ là hình bình hành.

Suy ra $BE \parallel AF$. Mà $AF \subset (SAD)$. Vậy $BE \parallel (SAD)$.

Cách 2:



Gọi F là giao điểm của BC và AD .

Ta có $AB \parallel CD$ và $AB = \frac{1}{2}CD$, suy ra AB là đường trung bình của tam giác CDF .

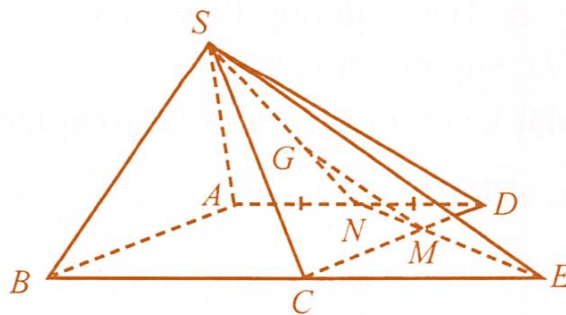
Do đó B là trung điểm của FC .

Suy ra BE là đường trung bình của tam giác SCF hay $BE \parallel SF$.

Mà $SF \subset (SAD)$ nên $BE \parallel (SAD)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD , M là điểm trên đoạn DC sao cho $DC = 3DM$. Chứng minh rằng $MG \parallel (SBC)$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AD . Ta có $MG \subset (SMN)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = MN \cap BC$.

Ta có $S \in (SNM) \cap (SBC)$; $E \in MN$ và $MN \subset (SMN)$; $E \in BC$ và $BC \subset (SBC)$.

Suy ra $(SMN) \cap (SBC) = SE$.

Dễ thấy $\triangle MND \sim \triangle MEC$, suy ra $\frac{MN}{ME} = \frac{MD}{MC} = \frac{1}{2}$, suy ra $\frac{MN}{NE} = \frac{1}{3}$. (1)

Mặt khác, $\frac{GN}{SN} = \frac{1}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác SAD). (2)

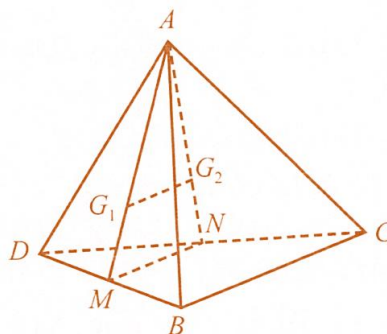
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{GN}{SN} = \frac{MN}{NE}$.

Theo định lý Thalès đảo trong tam giác SNE , ta có $MG \parallel SE$.

Mà $SE \subset (SBC)$ nên $MG \parallel (SBC)$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ACD . Chứng minh G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD) .

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DB, DC .

Ta có MN là đường trung bình của tam giác DBC , suy ra $MN \parallel BC$.

Trong tam giác AMN , ta có $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3}$.



Theo định lí Thalès đảo trong tam giác AMN , ta có $G_1G_2 \parallel MN$. Suy ra $G_1G_2 \parallel MN \parallel BC$, suy ra G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD) .

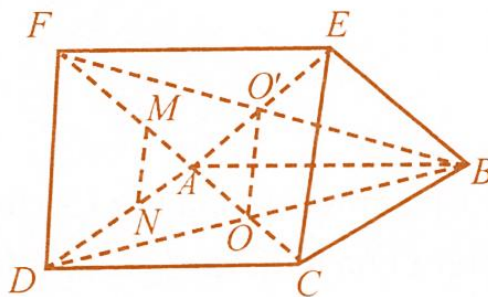
Câu 6: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O và O' .

a) Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE) .

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh AF, AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AF$, $AN = \frac{1}{3}AD$.

Chứng minh $MN \parallel (DCEF)$.

Lời giải



a) Ta có $OO' \parallel DF \parallel CE$, suy ra OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE) .

b) Ta có $\frac{AM}{AF} = \frac{AN}{AD}$, suy ra $MN \parallel DF$, suy ra $MN \parallel (DCEF)$.

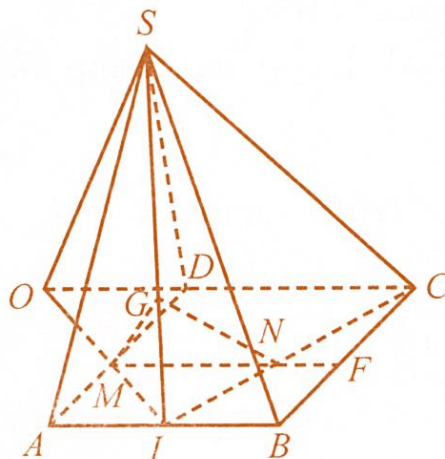
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB , I là trung điểm của AB và M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$.

Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt CI tại N . Chứng minh:

a) $NG \parallel (SCD)$;

b) $MG \parallel (SCD)$.

Lời giải





a) Gọi F là giao điểm của MN và BC .

Ta có $MN // AB$, suy ra $NF // BI$ (vì $F \in MN$, $I \in AB$).

Trong tam giác CIB có $NF // BI$, nên theo định lý Thalès ta có: $\frac{NI}{CI} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$.

Trong tam giác SAB , ta có G là trọng tâm nên $\frac{GI}{SI} = \frac{1}{3}$.

Trong tam giác SIC , ta có $\frac{GI}{SI} = \frac{NI}{CI} = \frac{1}{3}$, suy ra $NG // SC$ (định lý Thalès đảo). Do đó $NG // (SDC)$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của MI và DC .

Trong tam giác OCI có $MN // OC$, suy ra $\frac{MI}{OI} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$ (theo định lý Thalès).

Mà $\frac{IG}{SI} = \frac{1}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác SAB).

Do đó, trong tam giác SOI có $\frac{MI}{OI} = \frac{IG}{SI} = \frac{1}{3}$, suy ra $MG // SO$ (định lý Thalès đảo).

Do đó $MG // (SDC)$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD, P là trung điểm của SA . Chứng minh:

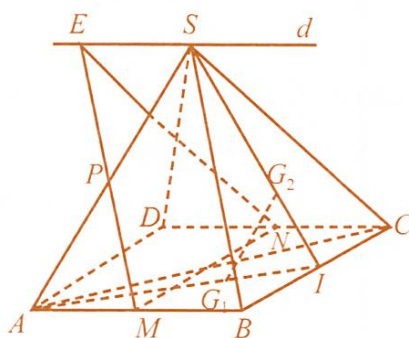
a) MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) ;

b) SB song song với (MNP) ;

c) SC song song với (MNP) .

d) Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm của hai tam giác ABC và SBC . Chứng minh G_1G_2 song song với (SAD) .

Lời giải





a) Ta có $BC \subset (SBC)$ và $MN \parallel BC$, suy ra $MN \parallel (SBC)$; $AD \subset (SAD)$ và $MN \parallel AD$, suy ra $MN \parallel (SAD)$.

b) Trong tam giác SAB , có PM là đường trung bình, suy ra $SB \parallel MP$, suy ra $SB \parallel (MNP)$.

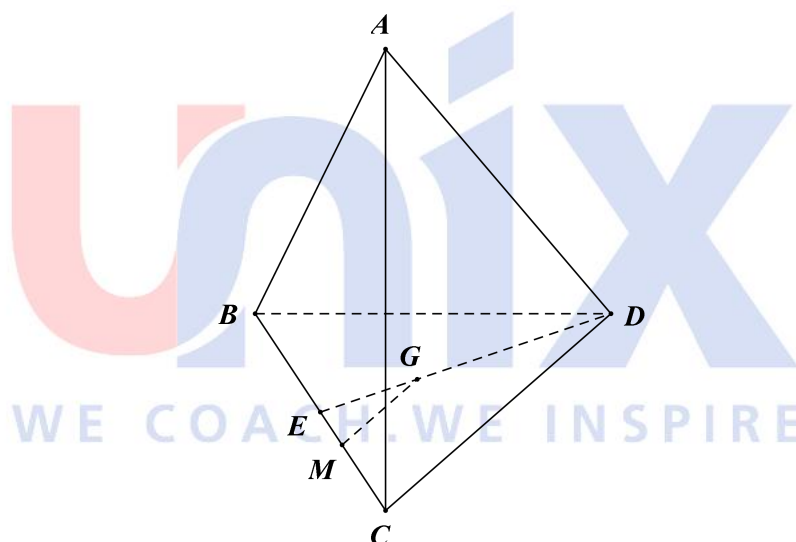
c) Trong mặt phẳng (SAB) vẽ đường thẳng d đi qua S và $d \parallel AB$. Gọi E là giao điểm của MP và d , ta có $MBSE$ là hình bình hành, suy ra $SE \parallel MB$ và $SE = MB$, suy ra $SE \parallel CN$ và $SE = CN$, suy ra $SC \parallel NE$. Ta lại có $NE \subset (MNP)$, suy ra $SC \parallel (MNP)$.

d) Trong mặt phẳng (SBC) , gọi I là giao điểm của SG_2 và BC .

Trong tam giác SIA , ta có $\frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3}$, theo định lý Thalès đảo suy ra $G_1G_2 \parallel SA$, suy ra $G_1G_2 \parallel (SAD)$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của $\triangle ABD$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm cạnh BC .

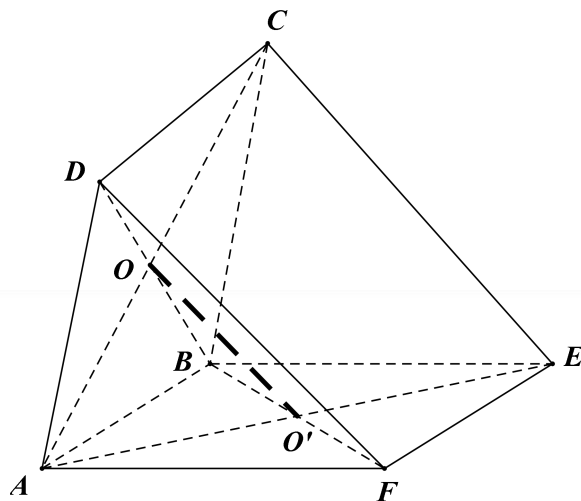
Do G là trọng tâm tam giác BCD , nên ta có $GD = \frac{2}{3}ED$.

Mặt khác $3MC = BC \Rightarrow 3MC = 2EC \Rightarrow \frac{MC}{EC} = \frac{2}{3}$.

Từ và, suy ra $MG \parallel CD$, mà $CD \subset (ACD)$ nên $MG \parallel (ACD)$.

Câu 10: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong 1 mặt phẳng. Gọi O, O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE) .

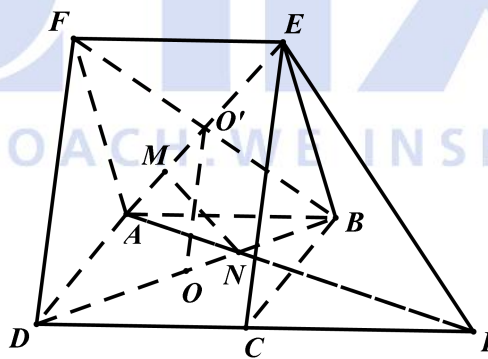
Lời giải



Ta có
$$\begin{cases} BO = \frac{1}{2} BD \\ BO' = \frac{1}{2} BF \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel DF. \text{ Mà } DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF).$$

Câu 11: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \frac{1}{3} AE, BN = \frac{1}{3} BD$. Chứng minh MN song song với $(CDEF)$.

Lời giải.



Trong $(ABCD)$, gọi $I = AN \cap CD$

Do $AB \parallel CD$ nên $\frac{AN}{AI} = \frac{BN}{BD} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{1}{3}.$

Lại có $\frac{AM}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow MN \parallel IE.$

Mà $I \in CD \Rightarrow IE \subset (CDEF) \Rightarrow MN \parallel (CDEF).$



DẠNG 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG.



PHƯƠNG PHÁP.

$$\text{Cách 1: } \begin{cases} (\alpha) // d \\ d \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = d', \text{ với } \begin{cases} d' // d \\ M \in d' \end{cases}$$

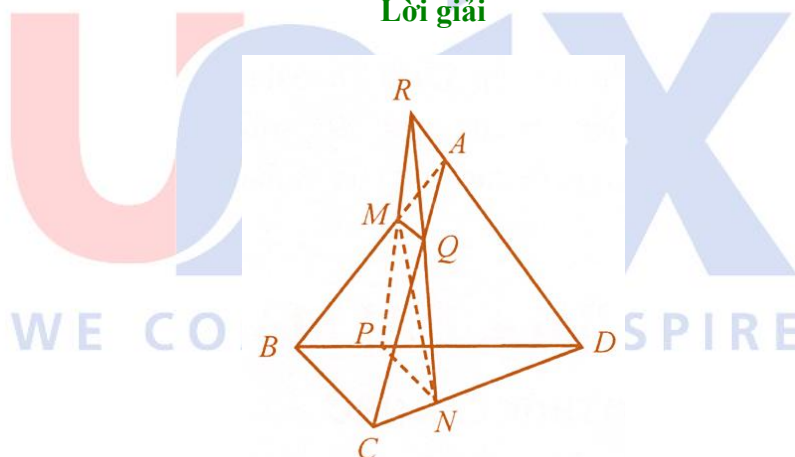
$$\text{Cách 2: } \begin{cases} (P) // a \\ (Q) // a \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d // a$$



BÀI TẬP.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh AB và CD . Đặt (α) là mặt phẳng qua MN và song song với BC . Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện $ABCD$.

Lời giải



Ta có: $BC \subset (BCD); N \in (\alpha) \cap (BCD); (\alpha) // BC$.

Suy ra $(\alpha) \cap (BCD) = Nx$, với $Nx // BC$.

Trong mặt phẳng (BCD) , gọi P là giao điểm của Nx và BD .

Suy ra $NP = (\alpha) \cap (BCD)$.

Ta có $BC \subset (ABC); M \in (\alpha) \cap (ABC); (\alpha) // BC$.

Suy ra $(\alpha) \cap (ABC) = My$ với $My // BC$.

Trong mặt phẳng (ABC) , gọi Q là giao điểm của My và AC .

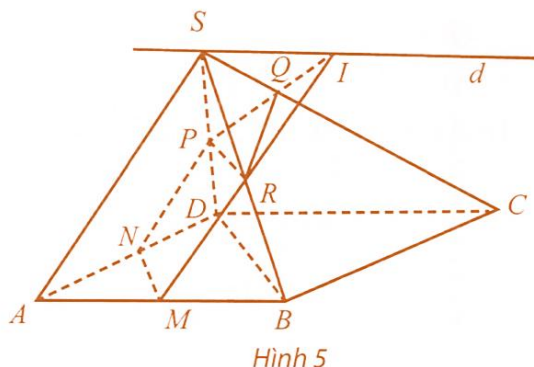
Suy ra $MQ = (\alpha) \cap (ABC)$.

Từ đó, dễ thấy: $(\alpha) \cap (ABD) = MP; (\alpha) \cap (ACD) = QN$.



Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB , song song với BD và SA . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

Lời giải



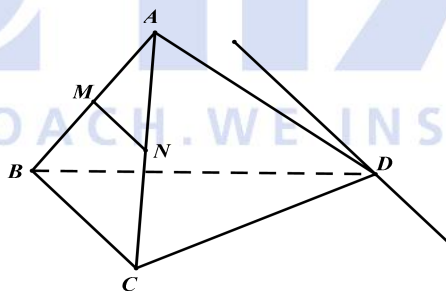
Gọi N, P, R lần lượt là trung điểm của AD, SD, SB . Trong mặt phẳng (SAB) vẽ đường thẳng d đi qua S và $d \parallel AB \parallel CD$. MR cắt d tại I, PI cắt SC tại Q .

Suy ra: $(\alpha) \cap (ABCD) = MN$, $(\alpha) \cap (SAD) = NP$, $(\alpha) \cap (SCD) = PQ$,

$(\alpha) \cap (SBC) = QR$, $(\alpha) \cap (SAB) = MR$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ Gọi M, N tương ứng là AB, AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

Lời giải

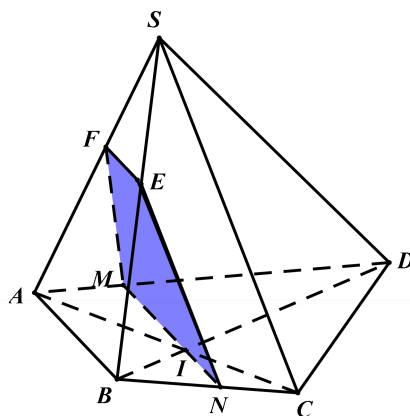


MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel BC$.

Ta có
$$\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN \subset (DMN) \Rightarrow (DMN) \cap (BCD) = \Delta, \text{ với } \Delta \text{ đi qua } D, \Delta \parallel BC. \\ BC \subset (BCD) \end{cases}$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua I và song song với AB, SC .

Lời giải



$AB \parallel (P)$ khi đó $(P) \cap (ABCD) = d_1$ với d_1 đi qua I và $d_1 \parallel AB$.

Gọi $M = d_1 \cap BC, N = d_1 \cap AD$.

$SC \parallel (P)$ khi đó $(P) \cap (SBC) = d_2$, với d_2 đi qua N và $d_2 \parallel SC$.

Gọi $E = d_2 \cap SB$.

$AB \parallel (P)$ khi đó $(P) \cap (SAB) = d_3$, với d_3 đi qua E và $d_3 \parallel AB$.

Gọi $F = d_3 \cap SA$.

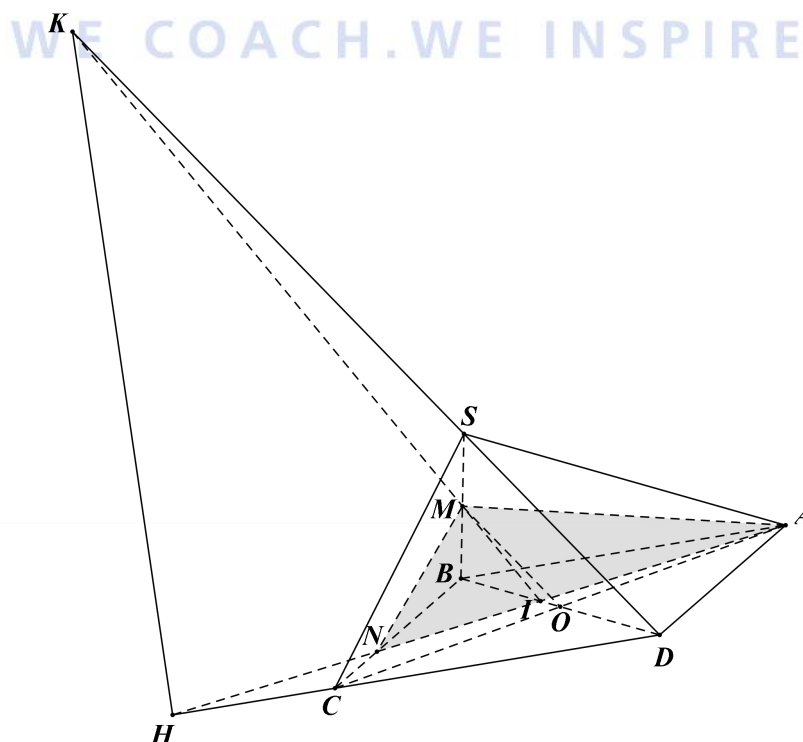
Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AMEF$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = 2CN$.

a/ Chứng minh rằng: $OM \parallel (SCD)$

b/ Xác định giao tuyến của (SCD) và (AMN) .

Lời giải:





a/ Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BM = \frac{1}{2}BS \\ BO = \frac{1}{2}BD \end{cases} \Rightarrow OM \parallel SD. \text{ Mà } SD \subset (SCD), \text{ suy ra } OM \parallel (SCD).$$

b/ Gọi $H = AN \cap CD$.

Suy ra H là điểm chung thứ nhất của (AMN) và (SCD) .

Ta có $I = AN \cap BD$, suy ra $IM \cap SD = K$; nên K là điểm chung thứ hai của (AMN) và (SCD) .

Do đó HK là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .

DẠNG 3: THIẾT DIỆN.



1 PHƯƠNG PHÁP.

Tìm đoạn giao tuyến tạo bởi mặt phẳng (α) và các mặt của chóp, lăng trụ

$\Rightarrow$ Đa giác tạo bởi tất cả các đoạn giao tuyến này chính là thiết diện cần tìm. Có 2 dạng:

+ mặt phẳng (α) đi qua một điểm song song với hai đường thẳng chéo nhau;

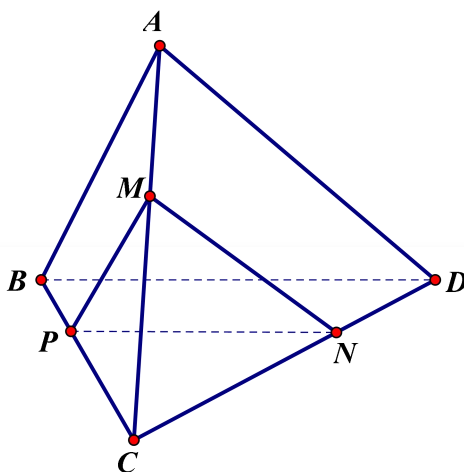
+ hoặc (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng



2 BÀI TẬP.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$, điểm M thuộc AC . Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD . Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

Lời giải





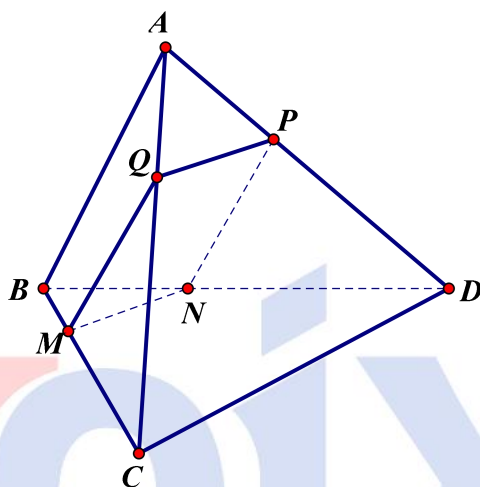
$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng qua M , song song với AB , cắt BC tại P .

$(\alpha) \parallel AD$ nên giao tuyến của (α) với (ADC) là đường thẳng qua M , song song với AD cắt DC tại N .

Vậy thiết diện là tam giác MNP .

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC . Một mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD . Thiết diện của (α) và hình tứ diện $ABCD$ là hình gì?

Lời giải



$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB và cắt AC tại Q .

$(\alpha) \parallel CD$ nên giao tuyến của (α) với (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD và cắt BD tại N .

$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB và cắt AD tại P .

Ta có $MN \parallel PQ \parallel CD, MQ \parallel PN \parallel AB$. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.