



CHƯƠNG

IV

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

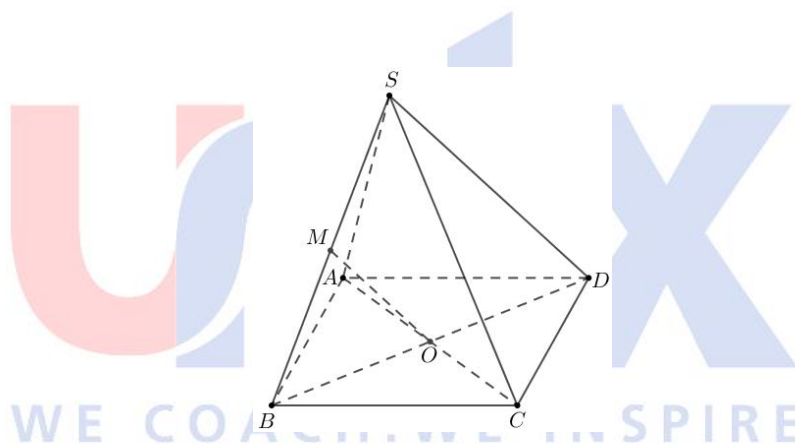


HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Điểm M thuộc cạnh SB . Biết $OM \parallel (SCD)$. Tính tỉ số của $\frac{SM}{MB}$.

Lời giải

Trả lời: 1



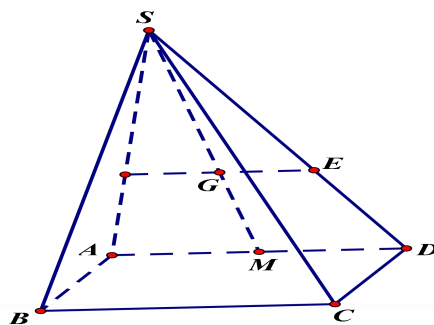
Trong (SBD) , xét hai đường thẳng OM và SD . Vì $SD \subset (SCD)$ và $OM \parallel (SCD)$ nên $OM \cap SD = \emptyset$, hay $OM \parallel SD$.

Suy ra OM là đường trung bình của tam giác SBD , do đó M là trung điểm SB , hay $\frac{SM}{MB} = 1$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. G là trọng tâm tam giác SAD . Mặt phẳng (GBC) cắt SD tại E . Tính tỉ số $\frac{SE}{SD}$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,67

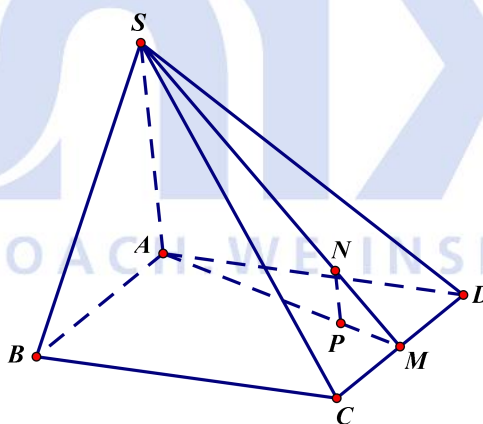


Mặt phẳng (SAD) và (GBC) có G là 1 điểm chung. Mặt khác (SAD) và (GBC) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AD và BC nên giao tuyến của chúng là đường thẳng qua G song song với AD , giao tuyến này cắt SD tại E . Gọi M là trung điểm AD , ta có $\frac{SG}{SM} = \frac{SE}{SD} = \frac{2}{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm CD , N là điểm thuộc đoạn SM sao cho $NS = 3NM$. Điểm P thuộc đoạn AM sao cho NP song song với mặt phẳng (SAB) . Tỉ số $\frac{MP}{MA}$ bằng

Lời giải

Trả lời: 0,25

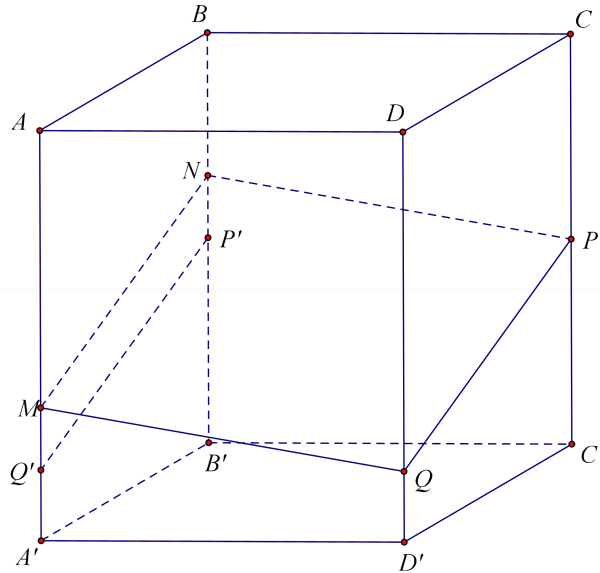


Do NP song song với mặt phẳng (SAB) nên mặt phẳng (SAM) chứa NP cắt (SAB) theo giao tuyến là SA thì NP song song SA . Theo định lý Thales ta có $\frac{MP}{MA} = \frac{MN}{MS} = \frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA' ; BB' ; CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\frac{A'M}{AA'} = \frac{1}{3}$; $\frac{B'N}{BB'} = \frac{2}{3}$; $\frac{C'P}{CC'} = \frac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q . Tính tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,17



Gọi độ dài cạnh bên của hình hộp là a .

Giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với $(CDD'C')$ là đường thẳng đi qua P và song song với MN

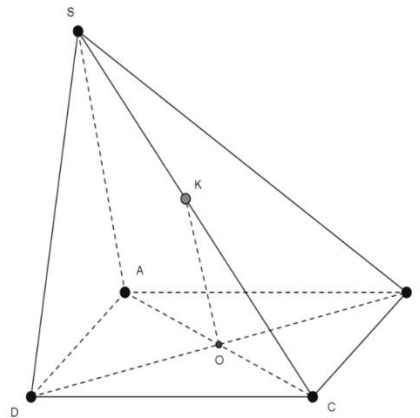
Gọi P' là trung điểm BB' và $Q' \in AA'$: $MN \parallel P'Q'$. Khi đó tứ giác $MNP'Q'$ là hình bình hành và $NP' = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a \Rightarrow MQ' = \frac{1}{6}a \Rightarrow Q'A' = MA' - MQ' = \frac{1}{6}a$.

$$\text{Vậy } \frac{A'Q'}{AA'} = \frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{6}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA , mặt phẳng (α) cắt SC tại K . Biết rằng $SK = m.KC$, giá trị của m là

Lời giải

Trả lời: 1



Gọi O là giao điểm của AC và BD . Do mặt phẳng (α) qua BD nên $O \in (\alpha)$.

Trong tam giác SAC , kẻ OK song song SA ($K \in SC$).



$$\text{Do } \begin{cases} (\alpha) \parallel SA \\ OK \parallel SA \Rightarrow OK \subset (\alpha) \Rightarrow SC \cap (\alpha) = \{K\}. \\ O \in (\alpha) \end{cases}$$

Trong tam giác SAC ta có

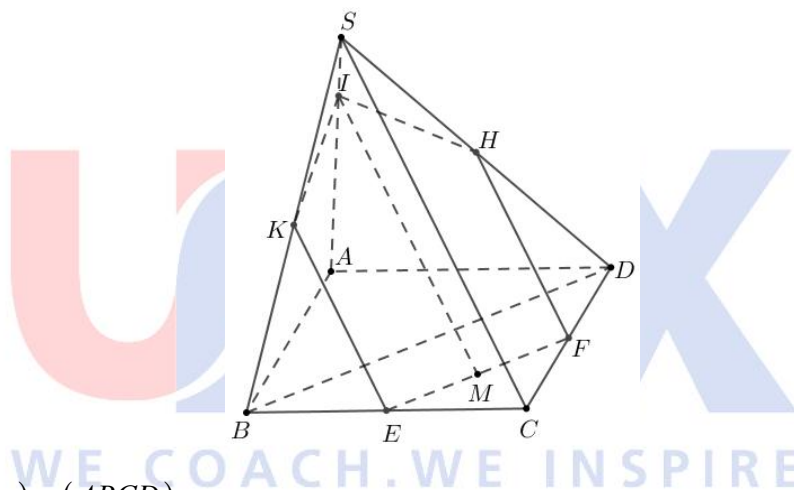
$$\begin{cases} OK \parallel SA \\ OA = OC \end{cases} \Rightarrow OK \text{ là đường trung bình của } \triangle SAC.$$

Vậy $SK = KC$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM = 3.MC$. Mặt phẳng (α) đi qua M , (α) song song với BD, SC . Giao điểm của (α) và các cạnh của hình chóp tạo thành đa giác có bao nhiêu cạnh?

Lời giải

Trả lời: 5



$$\text{Ta có } \begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \\ BD \parallel (\alpha) \end{cases} \quad \text{nên giao tuyến của } (\alpha) \text{ và } (ABCD) \text{ là đường thẳng đi qua } M,$$

song song với BD , cắt BC, CD lần lượt tại E và F .

Chứng minh tương tự, ta được

+ Giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng qua E , song song với SC , cắt SB tại K .

+ Giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua F , song song với SC , cắt SD tại H .

+ Giao tuyến của (α) và (SAC) là đường thẳng qua M , song song với SC , cắt SA tại I .

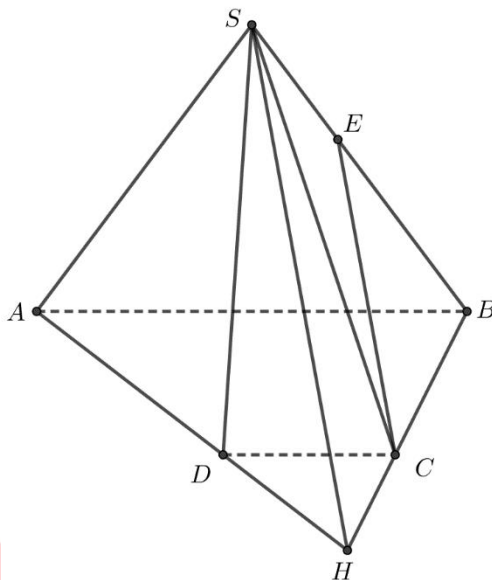
Đa giác tạo bởi các giao điểm của (α) và các cạnh là ngũ giác $EFHIK$.



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Biết $AB = 5a, CD = 2a$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB thỏa mãn $\frac{ES}{EB} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng CE song song với mặt phẳng (SAD) . Giá trị của $2m + 3n$ bằng

Lời giải

Trả lời: 13



Gọi H là giao điểm của AD và BC trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo hệ quả Talet, ta có: $\frac{HC}{HB} = \frac{CD}{AB} = \frac{2}{5}$

Ta có:

$$\begin{cases} CE \subset (SBH) \\ CE \parallel (SAD) \\ (SBH) \cap (SAD) = SH \end{cases} \Rightarrow CE \parallel SH$$

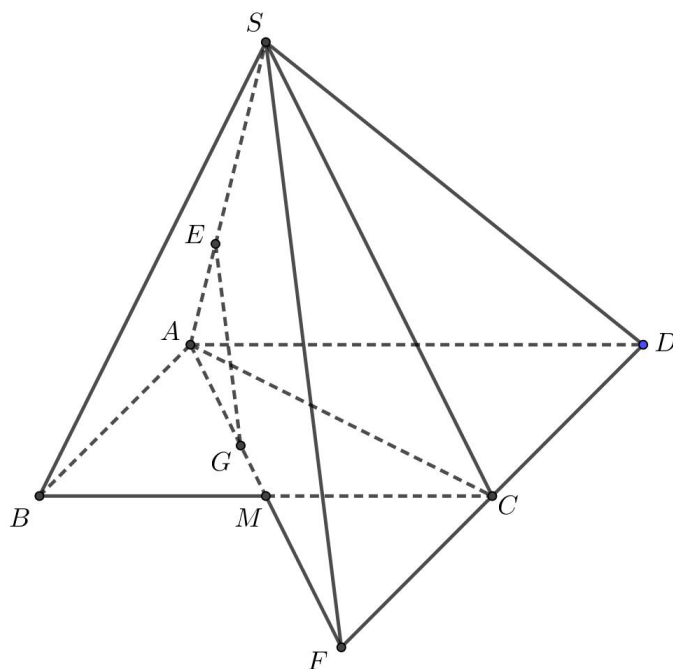
$$\Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{HC}{HB} = \frac{2}{5} \Rightarrow SE = \frac{2}{5} SB$$

$$\Rightarrow \frac{ES}{EB} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2m + 3n = 13.$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và E là điểm thuộc cạnh SA thỏa mãn $SE = \frac{m}{n}.SA$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng GE song song với mặt phẳng (SCD) . Giá trị của $m.n$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6



Gọi M là trung điểm của BC , F là giao điểm của AM và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo định lý Talet, ta có: $\frac{MA}{MF} = \frac{MB}{MC} = 1 \Rightarrow MA = MF \Rightarrow M$ là trung điểm của AF

$$\Rightarrow \frac{AG}{AF} = \frac{AG}{2AM} = \frac{1}{3}$$

Ta có:

$$\begin{cases} GE \subset (SAF) \\ GE \parallel (SCD) \\ (SAF) \cap (SCD) = SF \end{cases} \Rightarrow GE \parallel SF$$

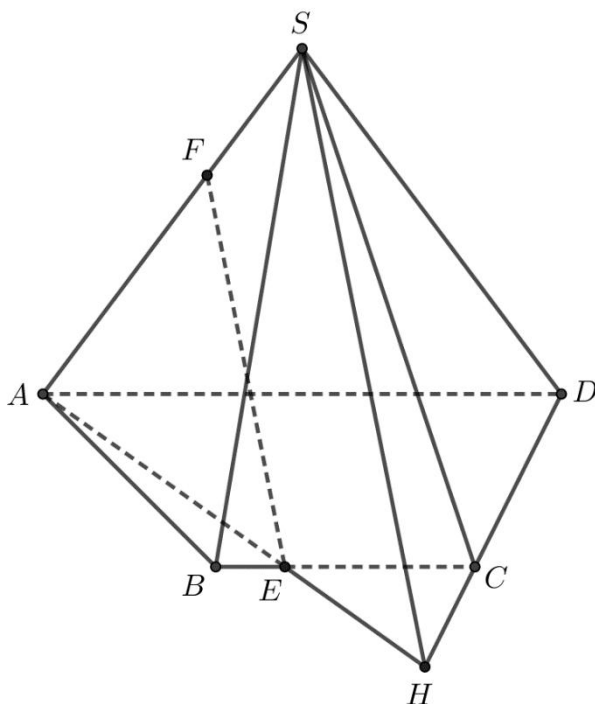
$$\Rightarrow \frac{AE}{AS} = \frac{AG}{AF} = \frac{1}{3} \Rightarrow AE = \frac{1}{3} AS$$

$$\Rightarrow SE = \frac{2}{3} SA \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{3} \Rightarrow mn = 6.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD song song với BC và $AD = 2BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BC = 4BE$. Lấy F thuộc cạnh SA sao cho $FA = k.FS$. Biết rằng EF song song với mặt phẳng (SCD) . Khi đó giá trị của k bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 1,67



Gọi H là giao điểm của AE và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo hệ quả Talet, ta có: $\frac{HE}{HA} = \frac{CE}{AD} = \frac{3}{8}$

Ta có:

$$\begin{cases} EF \subset (SAH) \\ EF \parallel (SCD) \\ (SAH) \cap (SCD) = SH \end{cases} \Rightarrow EF \parallel SH$$

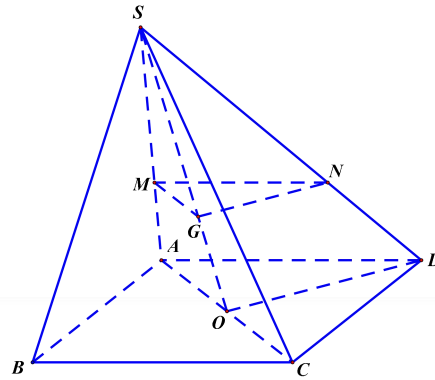
$$\Rightarrow \frac{SF}{SA} = \frac{HE}{HA} = \frac{3}{8} \Rightarrow SF = \frac{3}{8}SA$$

$$\Rightarrow FA = \frac{5}{3}FS \Rightarrow k = \frac{5}{3} \approx 1,67$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC . Một mặt phẳng song song với AC và BD cắt SA, SB lần lượt tại M và N . Tỉ số $\frac{MN}{AB}$ bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,67



Do $\begin{cases} (MNG) // AC \\ MG \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MG // AC \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}.$

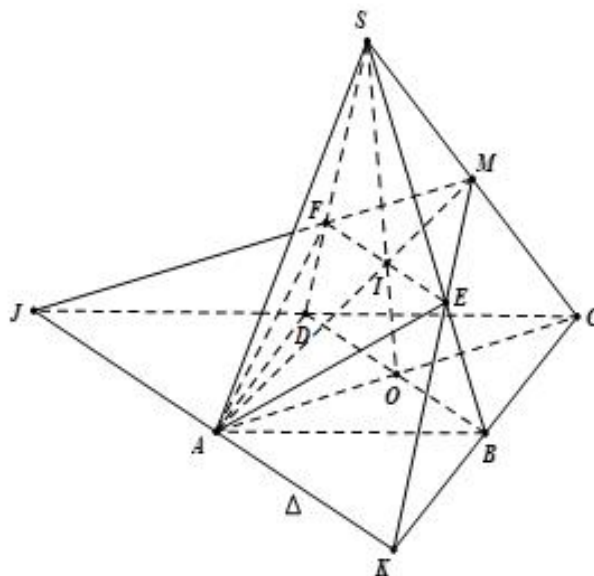
Tương tự, do $\begin{cases} (MNG) // BD \\ NG \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow NG // OD \Rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}.$

Xét tam giác SAD, có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN // AD \Rightarrow \frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}.$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC , (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD , K là giao điểm của ME và CB , J là giao điểm của MF và CD . Chứng minh 3 điểm K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,33





$$\text{Ta có } K = ME \cap BC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K \in ME, ME \subset (P) \\ K \in BC, BC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow K \in (P) \cap (ABCD) \quad (1).$$

$$J = MF \cap CD \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K \in MF, MF \subset (P) \\ K \in CD, CD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow J \in (P) \cap (ABCD) \quad (2).$$

$$A \in (P) \cap (ABCD) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), suy ra ba điểm K, A, J thuộc giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BD \parallel (P) \\ BD \subset (SBD) \\ (P) \cap (SBD) = EF \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel BD$$

$$\left. \begin{array}{l} (P) \cap (ABCD) = \Delta \\ (P) \cap (SBD) = EF \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \\ EF \parallel BD \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel \Delta$$

Vậy ba điểm K, A, J thuộc đường thẳng Δ song song với EF .

Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap AM$

$$\text{Ta có } I = SO \cap AM \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I \in SO, SO \subset (SBD) \\ I \in AM, AM \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in EF = (P) \cap (SBD).$$

Xét ΔSBD có I là giao điểm hai đường trung tuyến AM và SO suy ra I là trọng tâm ΔSBD

$$\Rightarrow \frac{MI}{MA} = \frac{1}{3}$$

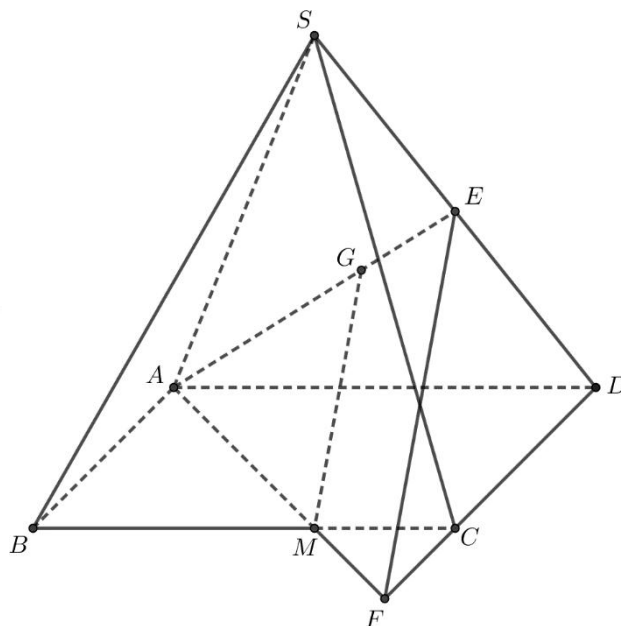
$$\text{Xét } \Delta MKF \text{ có } EF \parallel KJ \Rightarrow \frac{EF}{KJ} = \frac{ME}{MK} = \frac{MF}{MJ} = \frac{MI}{MA} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{EF}{KJ} = \frac{1}{3}.$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD và M là điểm thuộc cạnh BC sao cho GM song song với mặt phẳng (SCD) . Khi đó tỉ số diện tích của hai tam giác MAB và MAC bằng

Lời giải

Trả lời: 2



Gọi E là trung điểm của SD , F là giao điểm của AM và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có:

$$\begin{cases} GM \subset (AEF) \\ GM \parallel (SCD) \\ (AEF) \cap (SCD) = EF \end{cases} \Rightarrow GM \parallel EF$$

$$\Rightarrow \frac{FM}{FA} = \frac{EG}{EA} = \frac{1}{3}$$

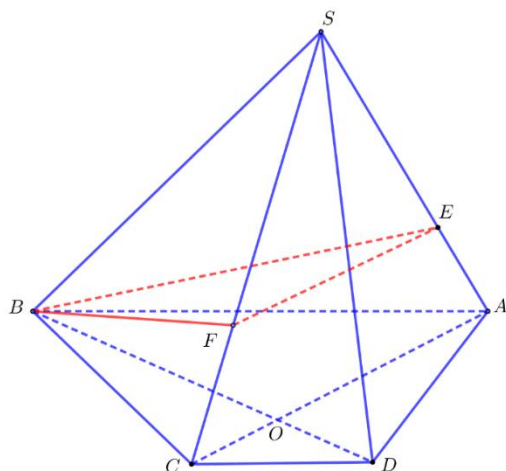
Theo hệ quả Talet, ta có: $\frac{MC}{AD} = \frac{FM}{FA} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow MC = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}BC \Rightarrow \frac{MB}{MC} = 2$$

Nhận xét: $\triangle MAB$ và $\triangle MAC$ có chung đường cao kẻ từ A

$$\text{Do đó: } \frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle MAC}} = \frac{MB}{MC} = 2.$$

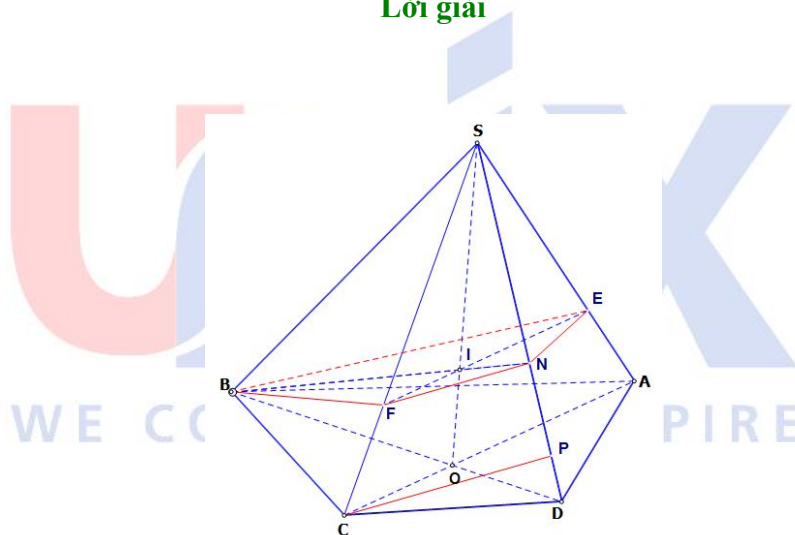
Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy E thuộc cạnh SA , F thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$.



Gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng (BEF) . Gọi P là giao điểm của SD với (α) . Tính tỉ số $\frac{SP}{SD}$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,86



Vì $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ nên đường thẳng $EF \parallel AC$. Mà $EF \subset (BEF)$, $AC \not\subset (BEF)$ nên AC song song với mặt phẳng (BEF) .

Vì AC qua O và song song với mặt phẳng (BEF) nên $AC \subset (\alpha)$.

Trong (SAC) , gọi $I = SO \cap EF$, trong (SBD) , gọi $N = BI \cap SD$. Suy ra N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (BEF) .

Hai mặt phẳng song song (BEF) và (α) bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba là (SCD) theo hai giao tuyến lần lượt là FN và Ct nên hai giao tuyến đó song song nhau, tức là $Ct \parallel FN$.

Trong (SCD) , Ct cắt SD tại P . Khi đó P là giao điểm của SD với (α) .



Trong hình thang $ABCD$, do $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$ nên $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD} = 2 \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}$.

Trong tam giác SAC , có $EF \parallel AC$ nên $\frac{SE}{SA} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{IS}{IO} = 2$.

Xét tam giác SOD với cát tuyến NIB , ta có: $\frac{NS}{ND} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{NS}{ND} = \frac{BO}{BD} \cdot \frac{IS}{IO} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.

Suy ra: $\frac{SN}{SD} = \frac{4}{7}$ (1).

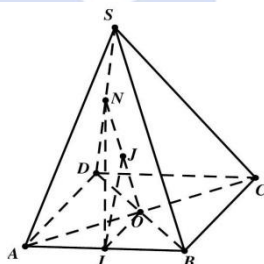
Lại có: $\frac{SN}{SP} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{SP}{SD} = \frac{6}{7}$.

Câu 14: Cho hình chóp $SABCD$. có đáy là hình bình hành tâm O . M là trung điểm của SC . Giao điểm I của SD với. Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,67



Gọi $E = AN \cap CD$, $F = AN \cap BC$ và $I = EM \cap SD$ thì $I = SD \cap (AMN)$.

Ta có $BF \parallel AD \Rightarrow \frac{BF}{AD} = \frac{NB}{ND} = \frac{1}{3}$

Từ $\frac{BF}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3}$

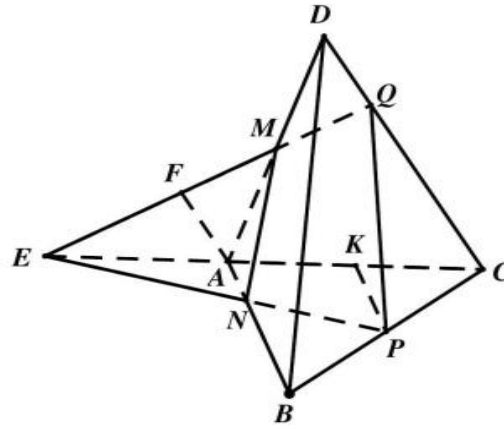
Kẻ $CJ \parallel SD$, $J \in EI$ Ta có $\frac{MC}{MS} = \frac{CJ}{IS}$; $\frac{ID}{ED} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow \frac{IS}{ID} = \frac{MS}{MC} \cdot \frac{EC}{ED} = \frac{2}{3}$

Vậy $\frac{IS}{ID} = \frac{2}{3}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, P , lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC , còn N là điểm trên cạnh AB sao cho $AN = \frac{1}{3}AB$. Giao điểm Q của DC với. Tính tỉ số $\frac{DQ}{DC}$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,33



Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = AC \cap NP$ trong (ACD) gọi $Q = EM \cap CD$

$$\begin{cases} Q \in CD \\ Q \in EM \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = CD \cap (MNP)$$

b) Kẻ $AF \parallel CD, F \in AD$ kẻ $KP \parallel AN, K \in AC$

$$\text{Ta có: } \frac{AF}{DQ} = \frac{MA}{MD} = 1 \Rightarrow AF = DQ \quad (1)$$

$$\frac{AF}{QC} = \frac{EA}{EC} \quad (2)$$

Do $KP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 3AN = \frac{3}{2} AN$ nên

$$\frac{AN}{KP} = \frac{2}{3}$$

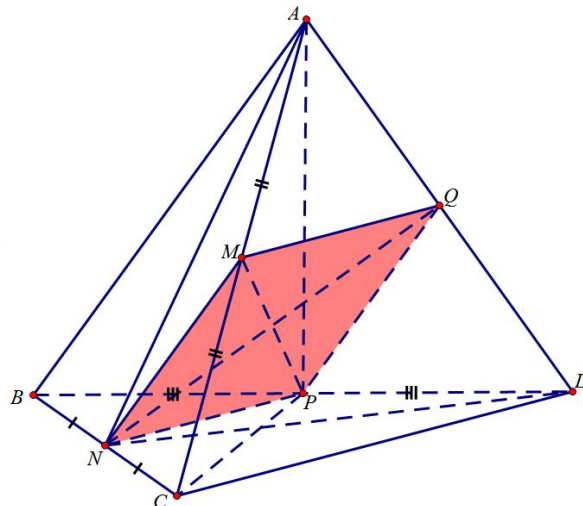
$$\frac{EA}{EK} = \frac{AN}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ (1),(2),(3) suy ra } \frac{QD}{QC} = \frac{FA}{QC} = \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{QD}{DC} = \frac{1}{3}$$

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD . Gọi tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP) . Diện tích thiết diện $MNPQ$ bằng

Lời giải

Trả lời: 4





Ta có MN, NP lần lượt là đường trung bình của $\triangle ABC$ và $\triangle BCD \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AB \\ NP \parallel CD \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ MN \subset (MNP) \\ P \in (ABD) \cap (MNP) \end{array} \right\} \Rightarrow (ABD) \cap (MNP) = Px, Px \parallel MN, Px \parallel AB.$$

Trong (ABD) , $Px \cap AD = Q$. Vì P là trung điểm của BD và $PQ \parallel AB$ nên Q là trung điểm của AD do đó PQ là đường trung bình của $\triangle ABD$. Vậy $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$ nên $MNPQ$ là hình bình hành. Mà $MN = NP = \frac{4}{2} = 2 \left(= \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \right)$ nên $MNPQ$ là hình thoi.

Ta có

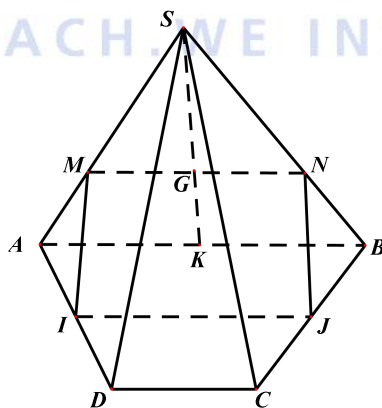
$$AC = AD = 4; NA = ND = PA = PC = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \triangle AND = \triangle APC (c-c-c) \Rightarrow MP = NQ.$$

Vậy $MNPQ$ là hình vuông. Do đó $S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và AB . Gọi G là một điểm trên đoạn thẳng SK sao cho $SG = mSK$. Tìm m để thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (GIJ) là hình bình hành.

Lời giải

Trả lời: 0,75



Ta có IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $IJ \parallel AB \parallel CD$ và

$$IJ = \frac{AB + CD}{2} = \frac{AB + \frac{AB}{2}}{2} = \frac{3}{4} AB.$$

Gọi đường thẳng $\Delta = (GIJ) \cap (SAB)$, suy ra Δ đi qua G .



$$\text{Vì } \begin{cases} IJ \subset (GIJ) \\ AB \subset (SAB) \Rightarrow \Delta // AB // IJ. \\ IJ // AB \end{cases}$$

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của Δ với SA và SB .

Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (GIJ) là hình thang $IJNM$.

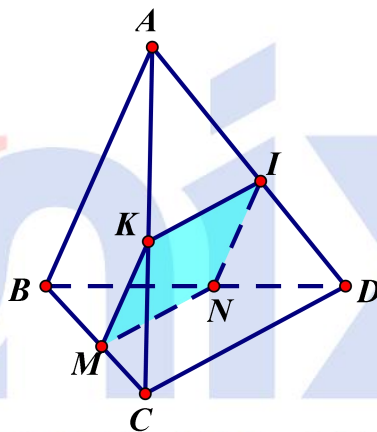
Theo định lý Ta-lét, $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{SG}{SK} = m \Rightarrow MN = mAB$.

Hình thang $IJNM$ là hình bình hành khi và chỉ khi $IJ = MN \Leftrightarrow \frac{3}{4}AB = mAB \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB , CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,43



Giả sử một mặt phẳng song song với AB và CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện là hình

thoi $MNIK$ như hình vẽ trên. Khi đó ta có:
$$\begin{cases} MK // AB // IN \\ MN // CD // IK. \\ MK = KI \end{cases}$$

Cách 1: Theo định lý Ta – lét ta có:
$$\begin{cases} \frac{MK}{AB} = \frac{CK}{AC} \\ \frac{KI}{CD} = \frac{AK}{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{MK}{6} = \frac{AC - AK}{AC} \\ \frac{KI}{8} = \frac{AK}{AC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{KI}{8} \Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{MK}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{24}MK = 1 \Leftrightarrow MK = \frac{24}{7}.$$

Vậy hình thoi có cạnh bằng $\frac{24}{7}$.

Cách 2: Theo định lý Ta – lét ta có:
$$\begin{cases} \frac{MK}{AB} = \frac{CK}{AC} \\ \frac{KI}{CD} = \frac{AK}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{MK}{AB} + \frac{MK}{CD} = \frac{CK}{AC} + \frac{AK}{AC}$$



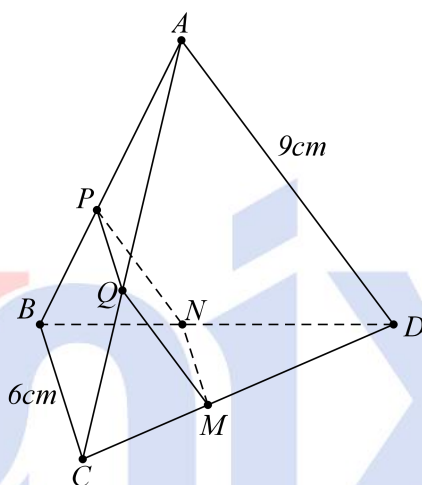
$$\Rightarrow \frac{MK}{6} + \frac{MK}{8} = \frac{AK + KC}{AC} \Rightarrow \frac{7MK}{24} = \frac{AC}{AC} = 1 \Rightarrow MK = \frac{24}{7}.$$

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 9\text{ cm}$, $CB = 6\text{ cm}$. M là điểm bất kì trên cạnh CD . (α) là mặt phẳng qua M và song song với AD , BC . Nếu thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thoi thì cạnh của hình thoi đó bằng.

Lời giải

Trả lời: 3,6

Vì (α) là mặt phẳng qua M và song song với AD mà $AD \subset (ACD)$ nên $(\alpha) \cap (ACD) = MQ$ với $MQ \parallel AD, Q \in AC$. Tương tự ta có $(\alpha) \cap (BCD) = MN$ với $MN \parallel BC, N \in BD$; $(\alpha) \cap (ABD) = NP$ với $NP \parallel AD, P \in AB$.



Thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

$$\text{Ta có } \frac{MN}{BC} = \frac{DN}{BD} \Leftrightarrow \frac{MN}{6} = \frac{DN}{BD} \text{ và } \frac{PN}{AD} = \frac{BN}{BD} \Leftrightarrow \frac{PN}{9} = \frac{BN}{BD}$$

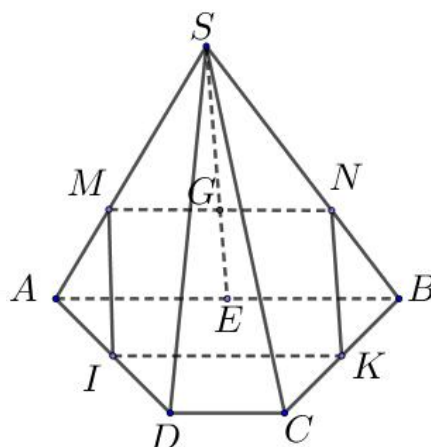
Từ và suy ra $\frac{MN}{6} + \frac{PN}{9} = 1$. Khi thiết diện là hình thoi thì $MN = PN$ nên

$$\frac{MN}{9} + \frac{MN}{6} = 1 \Leftrightarrow MN = \frac{18}{5}.$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với hai cạnh đáy AB, CD . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Để mặt phẳng (IGK) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một hình bình hành, khi đó $AB = k.CD$ thì k bằng

Lời giải

Trả lời: 3



Trong (SAB) kẻ đường thẳng qua G và song song với AB , đường thẳng này cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

Khi đó thiết diện mà (IGK) cắt hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $MNKI$.

Do G là trọng tâm của tam giác SAB nên ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$.

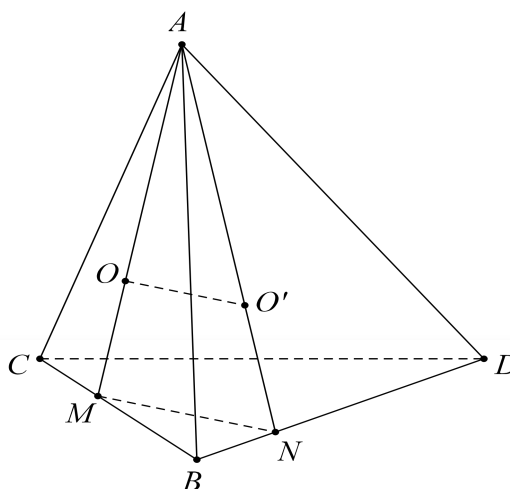
Suy ra $MN = \frac{2}{3}AB$.

Để hình thang $MNKI$ là hình bình hành thì $MN = IK \Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2AC = 4AD$. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC và ABD . Tính tỉ số $k = \frac{BC}{BD}$ khi $OO' \parallel (BCD)$.

Lời giải

Trả lời: 1,2



Trong mặt phẳng (ABC) : Giả sử AO và BC cắt nhau tại điểm M .



Trong mặt phẳng (ABD) : Giả sử AO' và BD cắt nhau tại điểm N .

Ta có: $MN = (AOO') \cap (BCD)$.

$$\text{Do đó: } OO' \parallel (BCD) \Leftrightarrow OO' \parallel MN \Leftrightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{AO'}{O'N} \quad (1)$$

Mặt khác theo tính chất đường phân giác ta có:

$$+ \frac{AO}{OM} = \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Rightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{AB+AC}{BM+CM} = \frac{AB+AC}{BC}.$$

$$+ \frac{AO'}{O'M} = \frac{AB}{BN} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow \frac{AO'}{O'M} = \frac{AB+AD}{BN+DN} = \frac{AB+AD}{BD}.$$

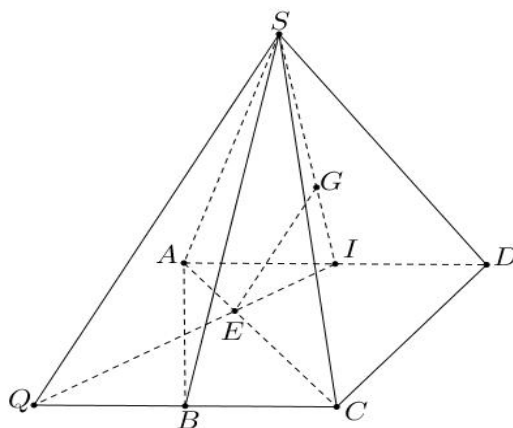
$$\text{Vậy đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \frac{AB+AC}{BC} = \frac{AB+AD}{BD} \Leftrightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB+AC}{AB+AD}.$$

$$\text{Theo giả thiết: } AB = 2AC = 4AD \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB + \frac{1}{2}AB}{AB + \frac{1}{4}AB} = \frac{\frac{3}{2}AB}{\frac{5}{4}AB} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AD \parallel BC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD ; E là điểm thuộc đoạn AC sao cho $EC = xEA$, ($x > 0$). Tìm x để $GE \parallel (SBC)$.

Lời giải

Trả lời: 2



Gọi I là trung điểm của cạnh AD .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ giả sử IE và BC cắt nhau tại điểm Q .

Dễ thấy $SQ = (IGE) \cap (SBC)$.

$$\text{Do đó: } GE \parallel (SBC) \Leftrightarrow GE \parallel SQ \Leftrightarrow \frac{IE}{IQ} = \frac{IG}{IS} \Rightarrow \frac{IE}{IQ} = \frac{1}{3} \quad (1).$$



Mặt khác tam giác EIA đồng dạng với tam giác EQC nên $\frac{EI}{EQ} = \frac{EA}{EC} = \frac{EA}{xEA} = \frac{1}{x}$ suy ra $EQ = x.EI$.

$$\Rightarrow \frac{IE}{IQ} = \frac{IE}{IE + EQ} = \frac{IE}{IE + x.IE} = \frac{1}{1+x} \quad (2).$$

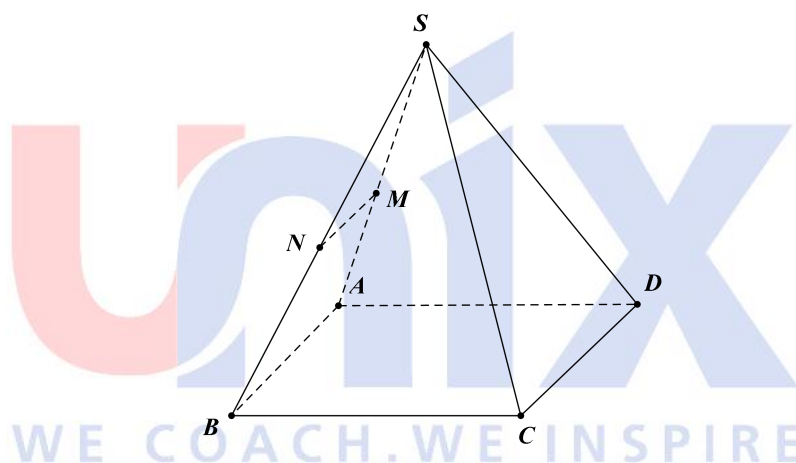
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $GE \parallel (SBC) \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M là trung điểm của các cạnh SA . Điểm N thuộc cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = x$. Tìm x để MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Trả lời: 0,5

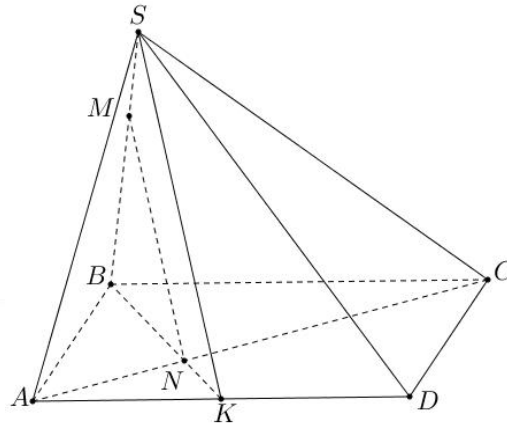


Để MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$ thì MN song song với $AB \Rightarrow N$ là trung điểm của SB hay $\frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh SB và đoạn AC sao cho $\frac{BM}{MS} = x$ và $\frac{NC}{NA} = y$, $(0 < x, y \neq 1)$. Tìm tỷ số $\frac{x}{y}$ để $MN \parallel (SAD)$.

Lời giải

Trả lời: 1



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ giả sử BN và AD cắt nhau tại điểm K .

Dễ thấy $SK = (BMN) \cap (SAD)$.

$$\text{Do đó: } MN \parallel (SAD) \Leftrightarrow MN \parallel SK \Leftrightarrow \frac{BM}{MS} = \frac{BN}{NK} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác tam giác } NCB \text{ đồng dạng với tam giác } NAK \Rightarrow \frac{BN}{NK} = \frac{CN}{NA} \quad (2).$$

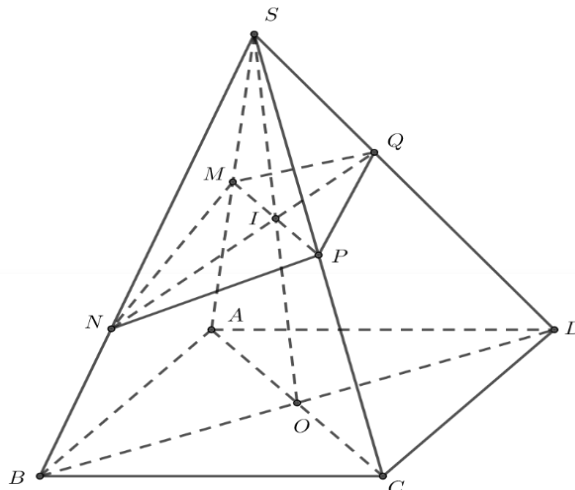
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BM}{MS} = \frac{NC}{NA} \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{Vậy } MN \parallel (SAD) \Leftrightarrow x = y. \text{ Khi đó } \frac{x}{y} = 1$$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SC . Điểm N thuộc cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Gọi Q là giao điểm của cạnh SD và mặt phẳng (MNP) . Tỷ số $\frac{SQ}{SD} = \frac{a}{5}$.

Lời giải

Trả lời: 2





Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của MP và SO thì Q là giao điểm của NI với SD . I là trung điểm của SO .

$$\text{Đặt } \frac{SD}{SQ} = x. \text{ Do } 2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \text{ nên } 4\overrightarrow{SI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{SN} + x\overrightarrow{SQ} \Rightarrow x = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{SQ}{SD} = \frac{2}{5} \Rightarrow a = 2.$$

