



QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG



LÝ THUYẾT.

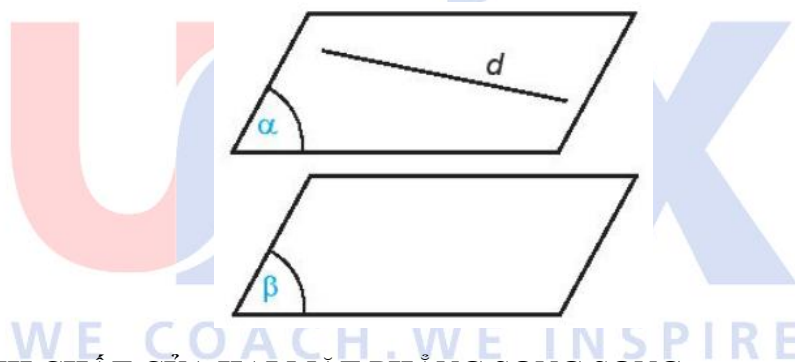
1. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG.

Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung. Kí hiệu:

$$(\alpha) // (\beta) \text{ hay } (\beta) // (\alpha)$$

Khi đó: $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \emptyset$

Chú ý: Nếu $(\alpha) // (\beta)$ thì mọi đường thẳng $a \subset (\alpha)$ đều song song với (β) .



2. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG.

Tính chất 1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

Tính chất 2. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì có duy nhất một mặt phẳng (Q) chứa d và song song với (P) .

Hệ quả 2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

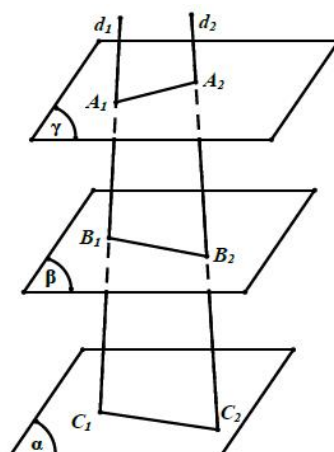
Hệ quả 3. Cho điểm $A \notin (P)$. khi đó mọi đthẳng đi qua A và song song với (P) đều nằm trong một mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) .

Tính chất 3. Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cũng cắt mặt phẳng kia và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

Hệ quả. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



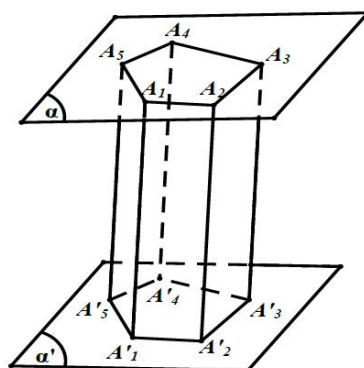
3. ĐỊNH LÝ THALÈS. Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



4. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP.

HÌNH LĂNG TRỤ.

Định nghĩa: Trên mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$, từ các đỉnh của đa giác dựng các đường thẳng song song cắt mặt phẳng (α') song song với (α) tại các điểm $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình hợp bởi hai miền đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ với các hình chữ nhật $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, .. được gọi là hình lăng trụ.



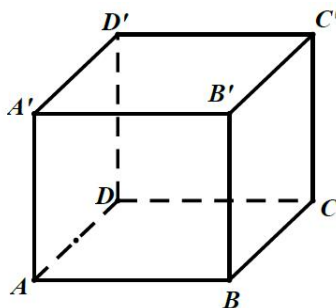
Tính chất:

- Các hình bình hành được gọi là các mặt bên, hai miền đa giác gọi là hai mặt đáy của lăng trụ.
- Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, ...$ được gọi là các cạnh bên. Các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau.
- Ta gọi lăng trụ theo tên của đa giác đáy, tức là nếu đáy là tam giác thì gọi là lăng trụ tam giác, nếu đáy là tứ giác thì gọi là lăng trụ tứ giác.



HÌNH HỘP.

Định nghĩa: Hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



Tính chất:

- Hình hộp có sáu mặt đều là những hình bình hành.
- Hai mặt song song với nhau gọi là hai mặt đối diện, hình hộp có ba cặp mặt đối diện.
- Hai đỉnh của hình hộp được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.
- Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là các đường chéo. Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.
- Hai cạnh gọi là đối nhau nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên một mặt của hình chóp.
- Mặt chéo của hình hộp là hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh đối diện của hình hộp.
- Tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng các bình phương của tất cả các cạnh của hình hộp đó.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH 2 MẶT PHẪNG SONG SONG



PHƯƠNG PHÁP.

Phương pháp giải tự luận: Dựa vào định lý, hệ quả sau:

$$\text{i. } \begin{cases} (\alpha) \supset a, b \\ a \cap b = I \\ a // (\beta), b // (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta) \quad \text{ii. } \begin{cases} (\alpha) // (\gamma) \\ (\beta) // (\gamma) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

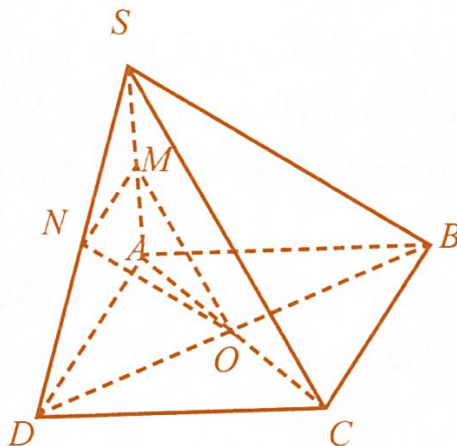


BÀI TẬP.



Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

Lời giải



Ta có MO là đường trung bình của tam giác SAC , suy ra $MO \parallel SC$. Do đó $MO \parallel (SBC)$. (1)

Ta có NO là đường trung bình của tam giác SDB , suy ra $NO \parallel SB$. Do đó $NO \parallel (SBC)$. (2)

Mặt khác, $NO \cap MO = O$ và $NO, MO \subset (OMN)$. (3)

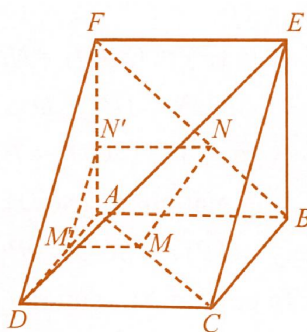
Từ (1), (2) và (3) suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.

Câu 2: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' . Chứng minh:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$;

b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Lời giải



a) Ta có: $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (BCE)$; $AF \parallel BE \Rightarrow AF \parallel (BCE)$.

Ta có $AD \cap AF = A$ và $AD, AF \subset (ADF)$ nên $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) Trong tam giác ADC , ta có $MM' \parallel CD$, theo định lý Thalès suy ra $\frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$. (1)



Trong tam giác AFB , ta có $NN' \parallel AB$, theo định lí Thalès suy ra $\frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}$. (2)

Ta có: $AM = BN$ (giả thiết) và $AC = BF$ (vì $ABCD$ và $ABEF$ là các hình vuông). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF}$, theo định lí Thalès đảo trong tam giác ADF , suy ra $M'N' \parallel DF$. Do đó, $DF \parallel (MM'N'N)$. (4)

Lại có $NN' \parallel AB$ (giả thiết), suy ra $NN' \parallel EF$, suy ra $EF \parallel (MM'N'N)$. (5)

Mặt khác, $DF \cap EF = F$ và $DF, EF \subset (DEF)$. (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

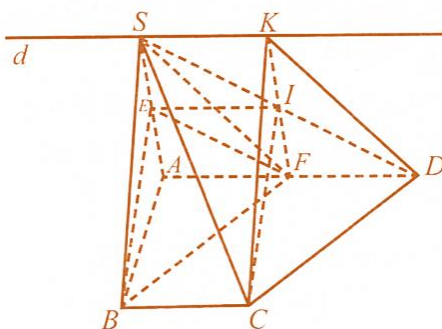
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD, SD .

a) Chứng minh: $(BEF) \parallel (SCD)$ và $CI \parallel (BEF)$.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

c) Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến vừa tìm được ở câu b, từ đó chứng minh $(SBF) \parallel (KCD)$.

Lời giải



a) Ta có $EF \parallel SD$ (đường trung bình của tam giác SAD).

Suy ra $EF \parallel (SCD)$ (vì $SD \subset (SCD)$).

Ta có $BF \parallel CD$ ($BFDC$ là hình bình hành), suy ra $BF \parallel (SCD)$ (vì $CD \subset (SCD)$).

Mặt khác $EF, BF \subset (BEF)$; $EF \cap BF = F$.

Vậy $(BEF) \parallel (SCD)$.

Ta có $EI \parallel BC$ (vì cùng song song với AD) và $EI = BC = \frac{1}{2}AD$ (vì EI là đường trung bình của tam giác SAD và $AD = 2BC$).

Ta có $EICB$ là hình bình hành nên $CI \parallel BE$.



Mặt khác $BE \subset (BEF)$ suy ra $CI // (BEF)$.

b) Ta có $BC // AD$, suy ra giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và $d // BC // AD$.

c) Xét tam giác SAD có I là trung điểm của SD , F là trung điểm của AD .

Suy ra IF là đường trung bình của tam giác SAD , suy ra $IF // SA$ suy ra $KF // SA$. (1)

Mặt khác, $SK // AF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SKFA$ là hình bình hành. Suy ra $SK = AF$.

Suy ra $SK = FD$ (vì $AF = FD$). Tứ giác $SKDF$ có $SK = FD$ và $SK // FD$, nên $SKDF$ là hình bình hành. Suy ra $SF // KD$.

Ta có $SF // KD$; $BF // DC$; $F = SF \cap BF$; $D = KD \cap CD$.

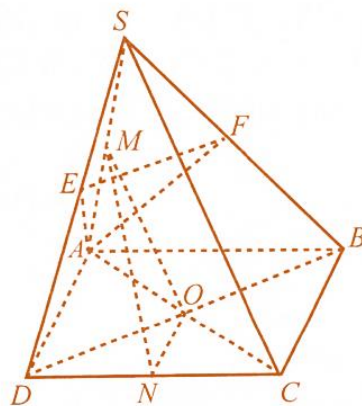
Suy ra $(SBF) // (KCD)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

a) Chứng minh $(OMN) // (SBC)$.

b) Giả sử hai tam giác SAD và SAB là các tam giác cân tại A . Gọi AE và AF lần lượt là đường phân giác trong của hai tam giác SAD và SAB . Chứng minh $EF // (SBD)$.

Lời giải



a) Ta có $MO // SC$ (MO là đường trung bình của tam giác SAC), suy ra $MO // (SCB)$;
 $NO // BC$ (NO là đường trung bình của tam giác DCB), suy ra $NO // (SCB)$.

Mà $MO, NO \subset (OMN)$; $MO \cap NO = O$. Vậy $(OMN) // (SBC)$.

b) Ta có hai tam giác SAD và SAB là các tam giác cân tại A , suy ra AE và AF vừa là đường phân giác vừa là đường trung tuyến lần lượt của hai tam giác SAD và SAB , suy ra E và F lần lượt là trung điểm của SD và SB .

Suy ra $EF // BD$ (EF là đường trung bình của tam giác SDB).

Suy ra $EF // (SBD)$.



Câu 5: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh:

a) $(BDA') // (B'D'C)$.

b) Đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

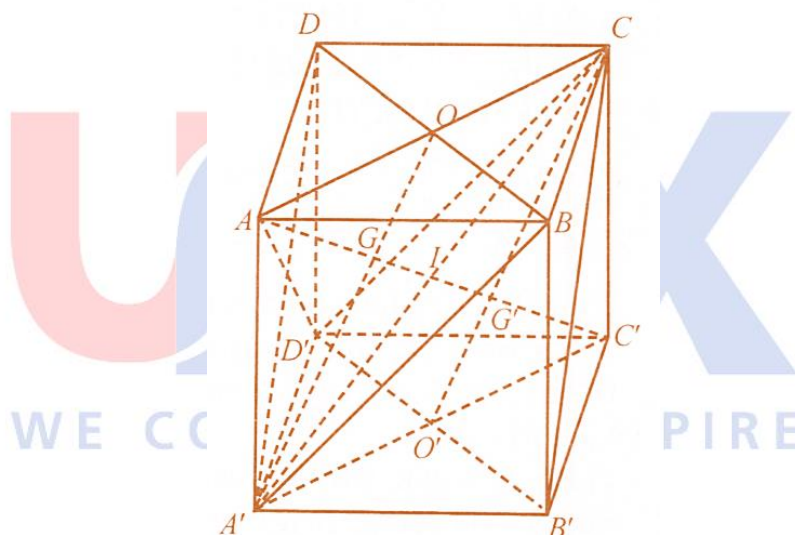
Lời giải

a) Ta có $DD' // BB'$ và $DD' = BB'$ ($ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp), suy ra $DD'B'B$ là hình bình hành, suy ra $BD // B'D'$ mà $B'D' \subset (B'D'C)$, suy ra $BD // (B'D'C)$. (1)

Chứng minh tương tự ta có $DA' // B'C$, mà $B'C \subset (B'D'C)$, suy ra $DA' // (B'D'C)$. (2)

Mặt khác, ta có $BD \cap DA' = D$ và $BD, DA' \subset (BDA')$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(BDA') // (B'D'C)$.



b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Trong hình bình hành $AA'C'C$ gọi I là giao điểm của AC' và $A'C$; cắt $A'O, CO'$ lần lượt tại G và G' .

Trong tam giác $AA'C$, ta có G là giao điểm của hai trung tuyến AI và $A'O$ nên G là trọng tâm của tam giác $AA'C$, suy ra G cũng là trọng tâm tam giác $A'BD$, tương tự G' là trọng tâm tam giác $B'D'C$.

Vậy AC' đi qua trọng tâm của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) Ta có $AG = \frac{2}{3}AI = \frac{1}{3}AC'$; $C'G' = \frac{2}{3}C'I = \frac{1}{3}AC'$, suy ra G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

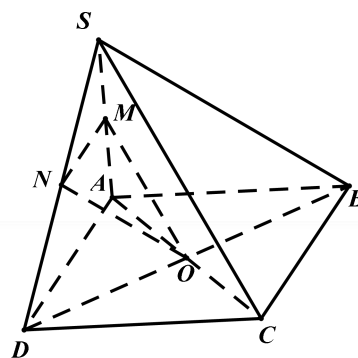
Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh $(OMN) // (SBC)$.



Lời giải:

Ta có M, O lần lượt là trung điểm của SA, AC nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh SC do đó $OM \parallel SC$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (SBC) \quad (1).$$



Tương tự, Ta có N, O lần lượt là trung điểm của SD, BD nên ON là đường trung bình của tam giác SBD ứng với cạnh SB do đó $ON \parallel SB$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} ON \parallel SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow ON \parallel (SBC) \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có}$$

$$\begin{cases} OM \parallel (SBC) \\ ON \parallel (SBC) \\ OM \cap ON = O \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC).$$

Câu 7: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' . Chứng minh:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

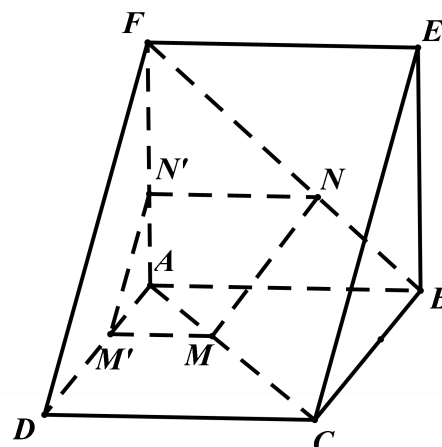
b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE)$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE).$$

$$\text{Mà } \begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE).$$



b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hình vuông nên $AC = BF$ (1).



Ta có $MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$ (2)

$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF$

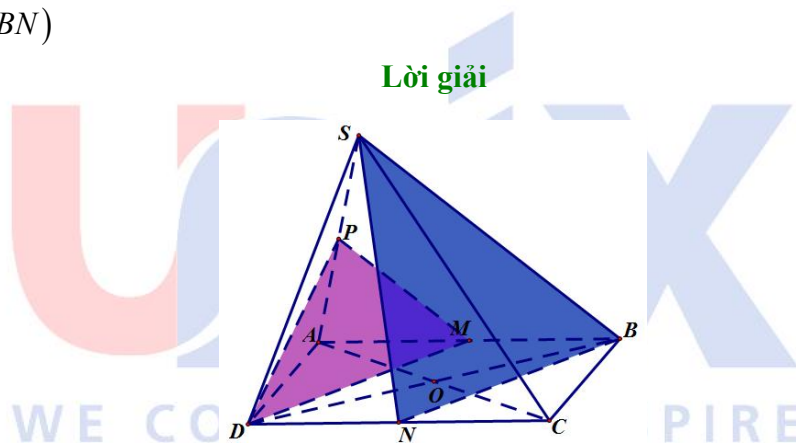
$\Rightarrow DF \parallel (MM'N'N).$

Lại có $NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N).$

Vậy $\begin{cases} DF \parallel (MM'N'N) \\ EF \parallel (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \parallel (MM'N'N).$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA . Chứng minh rằng mặt phẳng (DMP) song song với mặt phẳng (SBN)

Lời giải



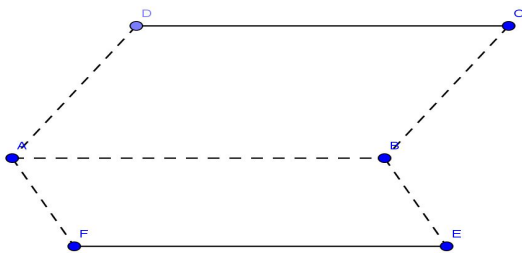
Vì M, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SA nên $MP \parallel SB \Rightarrow MP \parallel (SBN).$

Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và $ABCD$ là hình bình hành nên $DM \parallel NB \Rightarrow DM \parallel (SBN).$

Từ và suy ra $(DMP) \parallel (SBN).$

Câu 9: Trong không gian cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Chứng minh rằng mặt phẳng $(AFD) \parallel (BCE).$

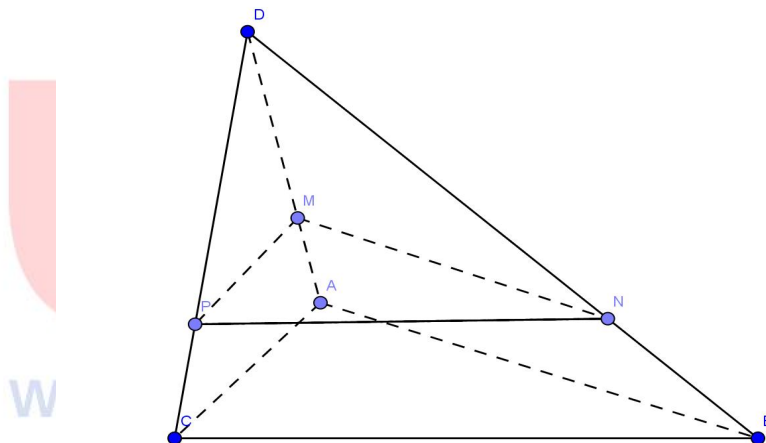
Lời giải



Ta có:
$$\begin{cases} AF \parallel BE \subset (BEC) \\ AD \parallel BC \subset (BEC) \\ AF \subset (ADE); AD \subset (ADE) \end{cases} \Rightarrow (ADE) \parallel (BEC).$$

Câu 10: Cho hình tứ diện $ABCD$, lấy M là điểm tùy ý trên cạnh AD ($M \neq A, D$). Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt DB, DC tại N, P . Chứng minh rằng: $NP \parallel BC$.

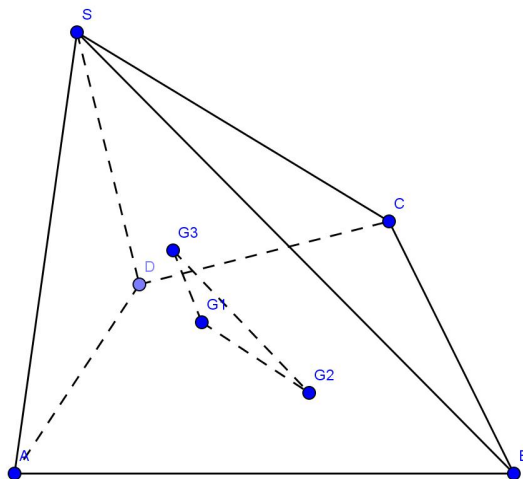
Lời giải



vì $(P) \cap (DBC) = NP$, $(ABC) \cap (DBC) = BC$, $(P) \parallel (ABC) \Rightarrow NP \parallel BC$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC, SAC . Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (SBC)$.

Lời giải

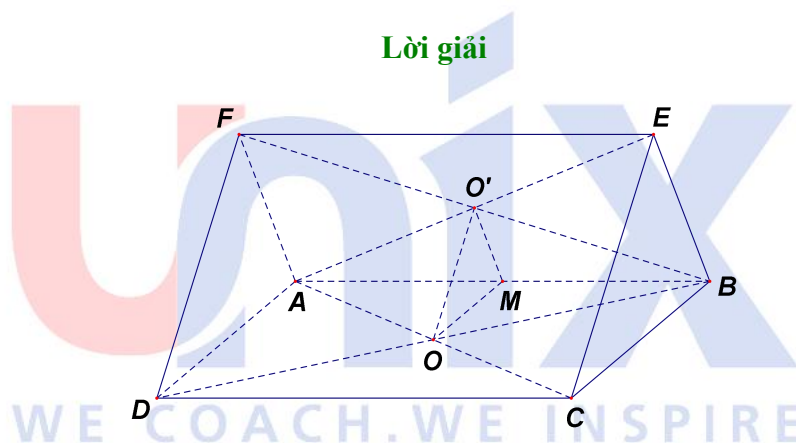


vì $G_1G_2 \parallel SC, G_2G_3 \parallel SB \Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (SBC)$

Câu 12: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có tâm lần lượt là O, O' và không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng:

a: $(ADF) \parallel (BCE)$ **b:** $(MOO') \parallel (ADF)$. **c:** $(MOO') \parallel (BCE)$.

Lời giải



$$\text{Có } \begin{cases} AD \cap AF \{I\} \\ AD, AF \subset (ADF) \\ BC, BE \subset (BCE) \\ AD \parallel BC, AF \parallel BE \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE).$$

Do O, O' lần lượt là tâm các hình bình hành nên O, O' lần lượt là trung điểm các đường chéo AC, BD và AE, BF . Theo tính chất đường trung bình trong tam giác có: $OO' \parallel DF, OO' \parallel CE, OM \parallel AD, OM \parallel BC$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} OO' \cap OM \subset (MOO') \\ DF, AD \subset (ADF) \\ OO' \parallel DF, OM \parallel AD \end{cases} \Rightarrow (MOO') \parallel (ADF).$$



Tương tự có:
$$\begin{cases} OO' \cap OM \subset (MOO') \\ CE, BC \subset (BCE) \\ OO' // DF, OM // AD \end{cases} \Rightarrow (MOO') // (BCE).$$

DẠNG 2: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Phương pháp giải tự luận, dựa vào các hệ quả sau:

1.
$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // (\beta) \quad 2. \begin{cases} AB // (\alpha) \\ AC // (\alpha) \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BC // (\alpha)$$

và các định lý, hệ quả của bài trước.

2 BÀI TẬP.

Câu 13: Cho hình thang $ABCD$ có $AB // CD$ và $S \notin (ABCD)$. Trên SA, BD lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{DN}{DB} = \frac{2}{3}$. Kẻ $NI // AB$ ($I \in AD$). Chứng minh $MN // (SCD)$.

Lời giải:

Ta có $\frac{AM}{AS} = \frac{1}{3}$. Do $NI // AB$ nên $\frac{AI}{AD} = \frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\frac{AM}{AS} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow MI // SD \Rightarrow MI // (SCD)$

Do $NI // SD$ ta suy ra $NI // CD$.

Vậy $(MNI) // (SCD) \Rightarrow MN // (SCD)$.

DẠNG 3: CHỨNG MINH 2 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào định lý ở bài hai mặt phẳng song song

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\gamma) // (\alpha) = a \Rightarrow a // b \\ (\gamma) // (\beta) = b \end{cases}$$

và các định lý, hệ quả ở các bài trước.

DẠNG 4: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỶ LỆ ĐỘ DÀI



PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào định lý Talet, hệ quả ở bài hai mặt phẳng song song:

1.
$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ d \cap (\alpha) = A, d \cap (\beta) = B \\ d' \cap (\alpha) = A', d' \cap (\beta) = B' \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$
2.
$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) // (\gamma) \\ d \cap (\alpha) = A, d \cap (\beta) = B, d \cap (\gamma) = C \\ d' \cap (\alpha) = A', d' \cap (\beta) = B', d' \cap (\gamma) = C' \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

và định lý Talet thuận và đảo trong mặt phẳng.



BÀI TẬP.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a . Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

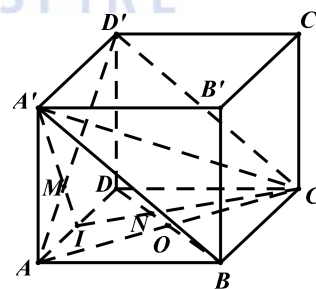
b) Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

Lời giải:

a) Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với $(A'D'CB)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với $(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N' .

Theo định lý Thales ta có

$$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB} \quad (1)$$



Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.

Từ (1) ta có $AM = DN'$, mà $DN = AM \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.

Mà $\begin{cases} (Q) \parallel (A'D'CB) \\ MN \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (A'D'CB)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.



b) Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có

$$DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \frac{2}{3}DO \text{ suy ra } N \text{ là trọng tâm của tam giác } ACD.$$

Tương tự M là trọng tâm của tam giác $A'AD$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có $\frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}, \frac{IM}{IA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IN}{IC} = \frac{IM}{IA'} \Rightarrow MN \parallel A'C$.

DẠNG 5: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào định lý:

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\gamma) // (\alpha) = a \Rightarrow a // b \\ (\gamma) // (\beta) = b \end{cases}$$

Và các kết quả có trước.

DẠNG 6: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào định lý:

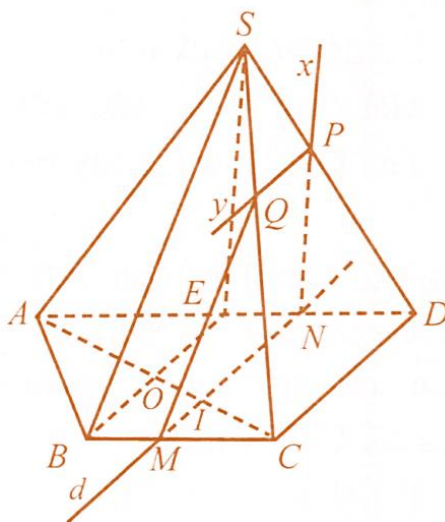
$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\gamma) // (\alpha) = a \Rightarrow a // b \\ (\gamma) // (\beta) = b \end{cases}$$

Và các kết quả có trước.

2 BÀI TẬP.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có $AD // BC$, $AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm của AD , O là giao điểm của AC và BE , I là điểm nằm trên đoạn OC . Mặt phẳng (P) qua I và song song với (SBE) . Tìm các giao tuyến của các mặt của hình chóp với mặt phẳng (P) .

Lời giải



- Ta có $(P) \parallel (SBE)$, $(ABCD) \cap (SBE) = BE$.

Mà $I \in (P) \cap (ABCD)$ nên $(P) \cap (ABCD) = d$ với $d \parallel BE$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của d và BC ; N là giao điểm của d và AD .

Suy ra $(P) \cap (ABCD) = MN$.

- Ta có $(P) \parallel (SBE)$, $(SBE) \cap (SAD) = SE$. Mà $N \in (P) \cap (SAD)$ nên $(P) \cap (SAD) = Nx$ với $Nx \parallel SE$.

Trong mặt phẳng (SAD) , gọi P là giao điểm của Nx và SD . Suy ra $(P) \cap (SAD) = NP$.

- Ta có $MN \subset (P)$, $CD \subset (SCD)$, $P \in (P) \cap (SCD)$, $MN \parallel CD$.

Suy ra $(P) \cap (SCD) = Py$ với $Py \parallel MN \parallel CD$.

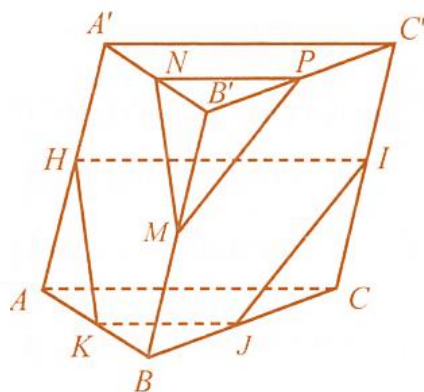
Trong mặt phẳng (SCD) , gọi Q là giao điểm của Py và SC . Suy ra $(P) \cap (SCD) = PQ$.

- Ta có $Q \in SC$, suy ra $Q \in (SCB)$. Mà $Q \in (P)$, suy ra $Q \in (SCB) \cap (P)$.

Tương tự, ta có $M \in (SCB) \cap (P)$. Suy ra $(P) \cap (SBC) = QM$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BB', A'B', B'C'$. H là điểm bất kì thuộc cạnh AA' và (P) là mặt phẳng đi qua H và song song với mặt phẳng (MNP) . Chứng minh các đoạn giao tuyến của hình lăng trụ với mặt phẳng (P) tạo thành một hình thang.

Lời giải



- Ta có $(P) \parallel (MNP)$; $(MNP) \cap (A'B'BA) = MN$. Suy ra $(P) \cap (A'B'BA) = Hx \parallel MN$.

Trong mặt phẳng $(A'B'BA)$, gọi K là giao điểm của Hx và AB . Suy ra $(P) \cap (A'B'BA) = HK$.

- Vì $(P) \parallel (MNP)$ nên $NP \parallel (P)$. Hơn nữa $NP \parallel A'C'$. Suy ra $(P) \parallel A'C'$.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, vẽ $HI \parallel A'C'$, $I \in CC'$.

Ta có $(P) \cap (ACC'A') = HI$. Tương tự, ta có $(P) \cap (BCC'B') = IJ$ với $J \in BC$ và $IJ \parallel MP$.

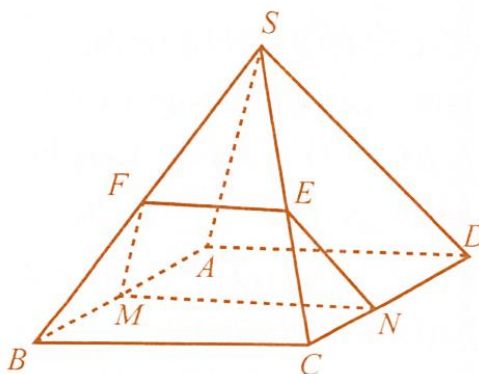
Vì $K, J \in (P) \cap (ABC)$ nên $(P) \cap (ABC) = JK$.

Do đó các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ tạo thành tứ giác $HJKI$.

Mặt khác, $KJ \parallel HI$ (do cùng song song với $A'C'$). Vậy tứ giác $HJKI$ là hình thang.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . (P) là mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD) . Tìm giao tuyến của các mặt của hình chóp với mặt phẳng (P) .

Lời giải



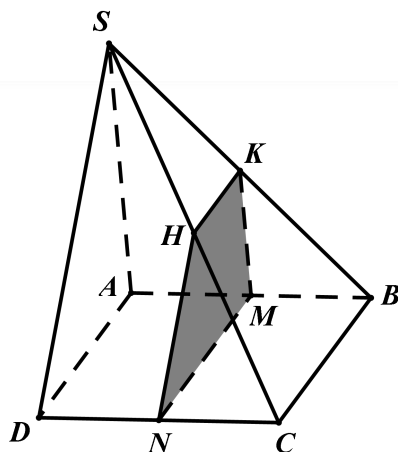
$(P) \cap (ABCD) = MN$ với $MN \parallel BC \parallel AD$. $(P) \cap (SAB) = MF$ với $MF \parallel SA$ ($F \in SB$).

$(P) \cap (SDC) = NE$ với $NE \parallel SD$ ($E \in SC$). $(P) \cap (SBC) = EF$ với $EF \parallel BC \parallel MN$.



Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm của AB . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD) . Thiết diện là hình gì?

Lời giải:



$$\text{Ta có: } (\alpha) // (SAD) \Rightarrow \begin{cases} (\alpha) // SA \\ (\alpha) // SD \\ (\alpha) // AD \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \supset SA \\ (\alpha) // SA \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK // SA, K \in SB.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \in (ABCD) \cap (\alpha) \\ (ABCD) \supset AD \\ (\alpha) // AD \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \cap (\alpha) = MN // AD, N \in CD. (1)$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // SD \\ (SCD) \supset SD \end{cases} \Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH // SD, H \in SC.$$

$$\text{Để thấy } HK = (\alpha) \cap (SBC), HK // AD \text{ do } (\alpha) // AD // BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN // HK$

Thiết diện là hình thang $MNHK$ ($MN // HK$).

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên ba cạnh AB , DD' , $C'B'$ lần lượt lấy ba điểm M , N , P không trùng với các đỉnh sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$. Tìm thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP)



Lời giải

+Ta chứng minh được $mp(MNP) // mp(AB'D')$.

Ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{DD'} = \frac{B'P}{B'C'} \Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MB}{ND} = \frac{BA}{DD'}$$

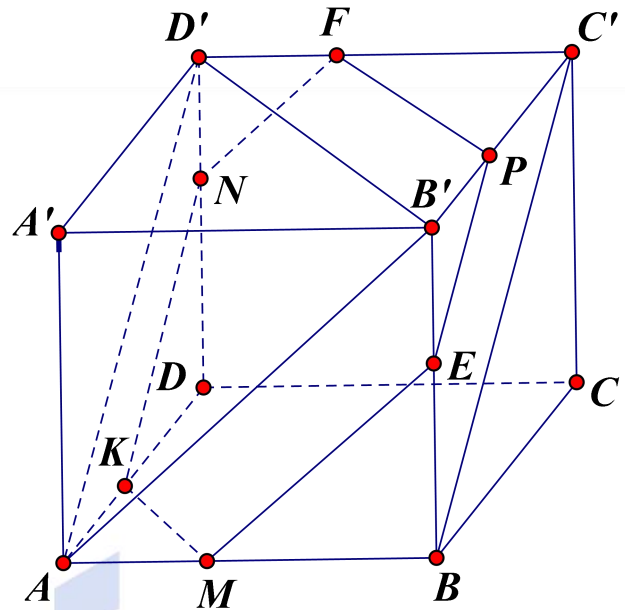
$$\text{Và } \frac{AM}{B'P} = \frac{MB}{PC'} = \frac{BA}{C'B'}$$

Theo định lí Ta-lét đảo thì MN song song với $mp(\alpha)$ với (α) song song với AD' ,
 BD và MP song song với (β) với (β) song song với AB', BC .

Vì $BD // B'D', BC' // AD'$ nên hai $mp(\alpha)$ và $mp(\beta)$ đều song song với $mp(AB'D')$ do đó MN và MP đều song song với $mp(AB'D')$. Vậy $mp(MNP) // mp(AB'D')$.

Từ M vẽ ME song song với AB' , Từ P vẽ PF song song với $B'D'$. Từ N vẽ $NK // AD'$ cắt AD tại K .

Thiết diện là lục giác $MEPFNK$.



Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a , SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh AB , $AM = x$, (P) là mặt phẳng qua M song song với (SAD) . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .

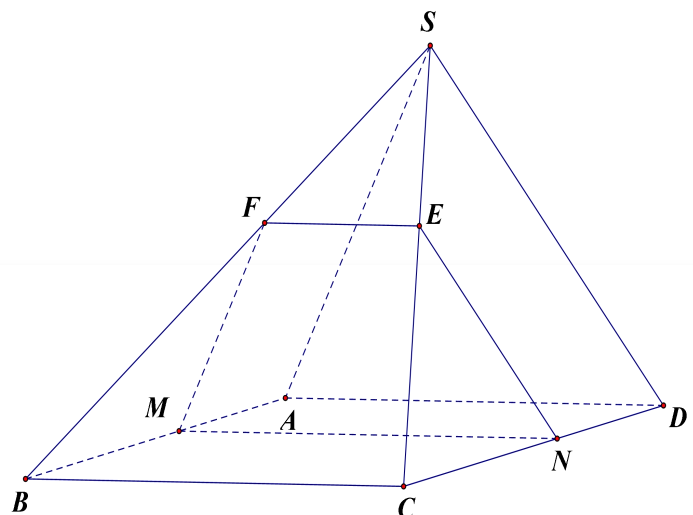
Lời giải

Do mặt phẳng (P) đi qua M và song song với $mp(SAD)$ nên cắt các mặt của hình chóp bằng các giao tuyến đi qua M và song song với $mp(SAD)$.

Do $ABCD$ là hình thoi và tam giác SAD đều. Do đó thiết diện thu được là hình thang cân

$$MNEFE \quad (MN // EF, MF = EN).$$

Khi đó ta có:.





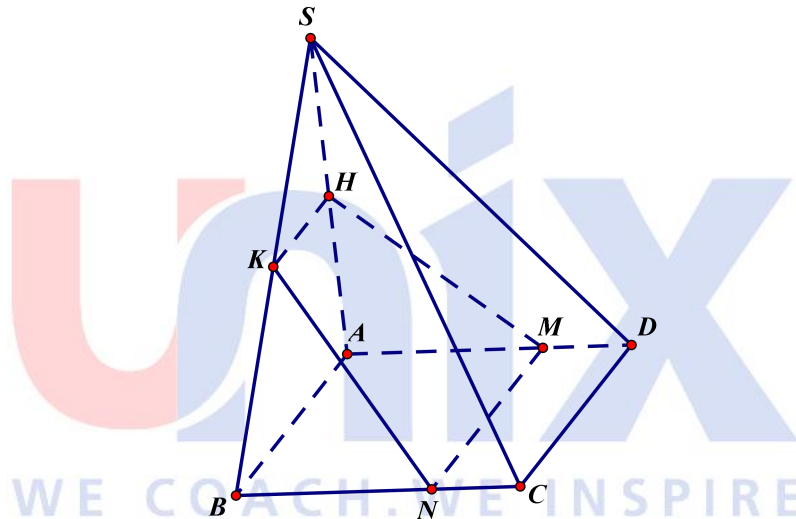
$$MN = a, \frac{EF}{BC} = \frac{SF}{SB} = \frac{MA}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EF = x; MF = a - x.$$

Đường cao FH của hình thang cân bằng: $FH = \sqrt{MF^2 - \left(\frac{MN - EF}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x).$

Khi đó diện tích hình thang cân là: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2).$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tam giác SAB đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB . M là một điểm trên cạnh AD , mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N . Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$). Giá trị x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

Lời giải



Mặt phẳng (HKM) và $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng song song HK và AB nên giao tuyến của chúng là MN cũng song song với HK và AB . Xét hai tam giác HAM và KBN có:

$$BN = AM; BK = AH; \widehat{KBN} = \widehat{MAH} \text{ nên } \triangle HAM = \triangle KBN.$$

Từ đó suy ra: $MH = KN$. $MHKN$ là hình thang cân có hai đáy $MN = a; HK = \frac{a}{2}$.

Sử dụng định lý hàm số $\cos$ cho tam giác SAD ta tính được $\cos \widehat{HAD} = -\frac{1}{2}$. Ta tính được:

$$HM^2 = HA^2 + AM^2 - 2HA \cdot AM \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 + 4x^2 + 2ax}{4}.$$

Đường cao của hình thang cân được tính bằng công thức:



$\sqrt{HM^2 - \left(\frac{MN - HK}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}$. Do hai đáy có độ dài không đổi nên diện tích thiết diện bé nhất khi đường cao bé nhất đạt khi $x=0$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA .

a) Chứng minh $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN) .

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD) .

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$

b) Gọi I là trung điểm của SD , J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD . Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O , các tam giác SAD và ABC đều cân tại A . Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB . Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

Câu 25: Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

a) Chứng minh $(BCE) \parallel (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN . Tìm tập hợp điểm I khi M, N thay đổi trên AC và BF .

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB = 3a, AD = CD = a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA = 2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x = AM$ ($0 < x < a$). Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c) Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD .



d) Gọi $J = MP \cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC) , cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC), (B'AC), (C'AB)$.

Câu 28: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của các tam giác $BDA', B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Câu 29: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a . Trên các cạnh $AB, CC', C'D'$ và AA' lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C'N = C'P = AQ = x (0 \leq x \leq a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

c) Dụng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $\triangle SAD$ vuông tại A . Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD, SC, SB tại N, P, Q .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $I = NP \cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB .

Câu 31: Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', BB', BC$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP) .

b) Gọi I là trung điểm của AB . Tìm giao điểm của IC' với (MNP) .

Câu 32: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a . Các điểm M, N nằm trên AD', BD sao cho $AM = DN = x (0 < x < a\sqrt{2})$

a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN \parallel A'C$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$



- a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ và ACC' . Chứng minh $(IGK) \parallel (BB'C'C)$ và $(A'KG) \parallel (AIB)$.
- b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ .

Câu 34: Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B . Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N . Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N' .

- a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N' .
- b) Xác định vị trí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.
- c) Gọi O là trung điểm của AB , I là trung điểm của MN . Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

Câu 35: Cho tứ diện đều cạnh a . Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC . Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB lần lượt tại M, N, P, Q .

- a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.
- b) Đặt $AM = x, AN = y$. Chứng minh $a(x+y) = 3xy$. Tìm GTNN và GTLN của $AM + AN$.
- c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s = x + y$.

Câu 36: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang, $AD = CD = BC = a$, $AB = 2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P .

- a) Tứ giác $AMNP$ là hình gì?
- b) So sánh AM và NP .



HƯỚNG DẪN GIẢI PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 22: a) Ta có

$$\begin{cases} BN \parallel DM \\ DM \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BN \parallel (DPM) \quad (1)$$

Tương tự

$$\begin{cases} BS \parallel MP \\ MP \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BS \parallel (DPM) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Ta có $\begin{cases} SB \subset (SBN) \\ (\alpha) \parallel (SBN) \end{cases} \Rightarrow SB \parallel (\alpha).$

vậy $\begin{cases} Q \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SB \subset (SAB) \\ SB \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = QR \parallel SB, R \in AB.$

Tương tự

$$(\alpha) \cap (ABCD) = RK \parallel BN, K \in CD$$

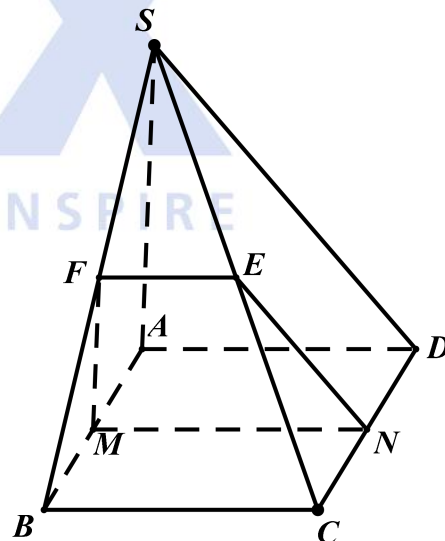
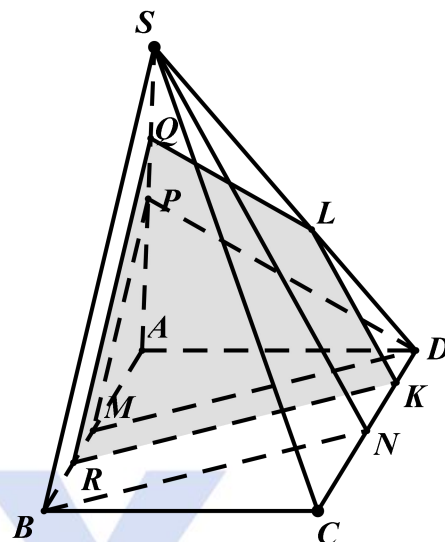
$$(\alpha) \cap (SCD) = KL \parallel SB, L \in SD.$$

Vậy thiết diện là tứ giác $QRKL$.

c) Ta có $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\beta) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MF \parallel SA, F \in SB$

Tương tự $(\beta) \cap (SCD) = NE \parallel SD, E \in SC.$

Thiết diện là hình thang $MNEF$.





Câu 23: a) Do O, M lần lượt là trung điểm của AC, SA nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh $SC \Rightarrow OM \parallel SC$.

Mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC)$ (1).

Tương tự

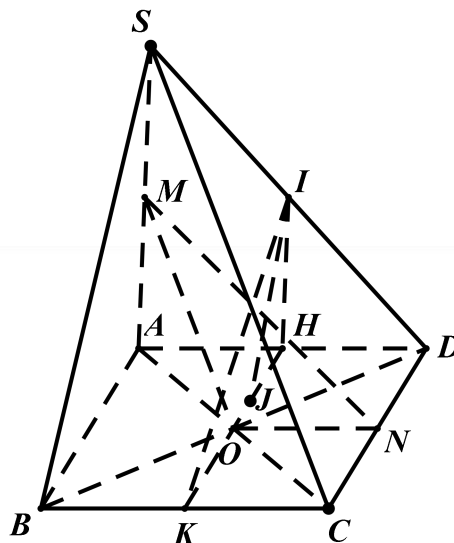
$ON \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Do $J \subset (ABCD)$ và $d(J, AB) = d(J, CD)$ nên $J \in HK \Rightarrow IJ \subset (IHK)$.

Ta dễ dàng chứng minh được $(IHK) \parallel (SAB)$.

Vậy $\begin{cases} IJ \subset (IHK) \\ (IHK) \parallel (SAB) \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel (SAB)$.



Câu 24: Kẻ $FI \parallel SA, I \in AB \Rightarrow FI \parallel (SAD)$.

Ta có $\frac{FS}{FB} = \frac{IA}{IB}$ (1).

Theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{FS}{FB} = \frac{SA}{AB} = \frac{AD}{AC}$ (2)

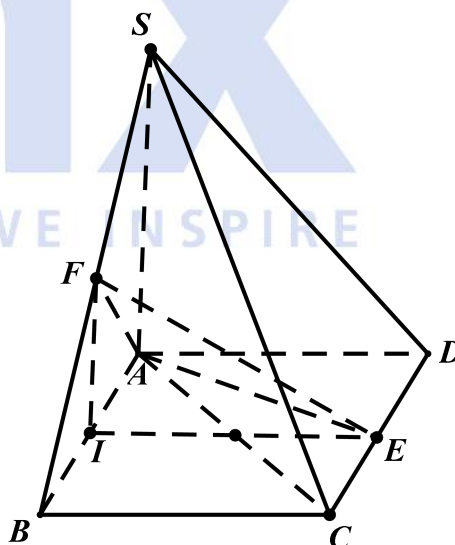
Mặt khác $\frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow IE \parallel AD$.

Mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow IE \parallel (SAD)$.

Ta có $\begin{cases} IE \parallel (SAD) \\ IF \parallel (SAD) \end{cases} \Rightarrow (IEF) \parallel (SAD)$.

Mà $EF \subset (IEF) \Rightarrow EF \parallel (SAD)$.





Câu 25:

a) Ta có $\begin{cases} BE \parallel AF \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow EB \parallel (ADF).$

Tương tự $BC \parallel (ADF).$

Từ đó ta có $(BCE) \parallel (ADF).$

b) Vì $MM' \parallel AB \Rightarrow MM' \parallel CD$ nên theo định

lí Thales ta có

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AM'}{AD} \quad (1).$$

Tương tự $NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{BF} = \frac{AN'}{AF} \quad (2)$

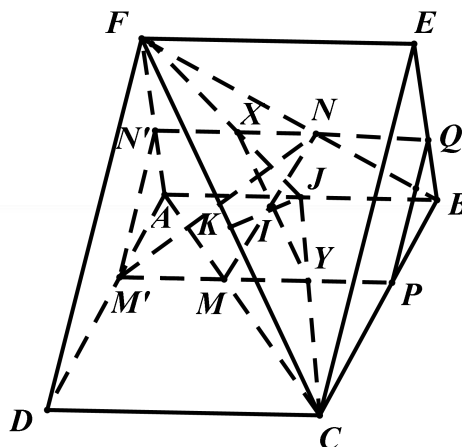
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF}$

$$\Rightarrow M'N' \parallel DF \subset (DEF) \Rightarrow M'N' \parallel (DEF).$$

Lại có

$$MM' \parallel CD \parallel EF \Rightarrow MM' \parallel (DEF)$$

$$\Rightarrow (DEF) \parallel (MNN'M').$$



c) Gọi $P = MM' \cap BC, Q = NN' \cap BE$ và J, K lần lượt là trung điểm các đoạn AB và CF . Gọi $X = N'Q \cap FJ, Y = M'P \cap CJ$ thì $XY = (MPQN') \cap (FCJ)$. Trong $(M'PQN')$ gọi $I = XY \cap MN$.

Ta có $\frac{YM}{AJ} = \frac{CM}{CA} \quad (3)$ và $\frac{XN}{BJ} = \frac{FN}{FB} \quad (4)$ mà $AJ = BJ, AC = BF$ nên từ (3), (4) suy ra

$YM = XN \Rightarrow XMYN$ là hình bình hành nên I là trung điểm của MN .

Do $\begin{cases} (M'PQN') \parallel (CEFE) \\ (CFJ) \cap (M'PQN') = XY \Rightarrow XY \parallel CF \text{ mà } IX = IY \text{ nên } I \text{ thuộc đường trung trung tuyến} \\ (CFJ) \cap (CEFE) = CF \end{cases}$

JK của tam giác JCF .

Giới hạn:

Khi $N \rightarrow B \Rightarrow M \rightarrow A \Rightarrow I \rightarrow J$

Khi $N \rightarrow F \Rightarrow M \rightarrow C \Rightarrow I \rightarrow K$

Phần đảo:

Vậy tập hợp điểm I là đường trung tuyến JK của tam giác JCF .



Câu 26:

a) Do
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \Rightarrow MN \parallel AB \quad (1). \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MN \end{cases}$$

Tương tự
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SCD) \cap (\alpha) = PQ \end{cases}$$

$\Rightarrow PQ \parallel CD \quad (2).$

Lại có $AB \parallel CD \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$MN \parallel AB \parallel CD \parallel PQ$ nên $MNPQ$ là hình thang

Dễ thấy rằng $MQ \parallel SA, NP \parallel SB$ do đó

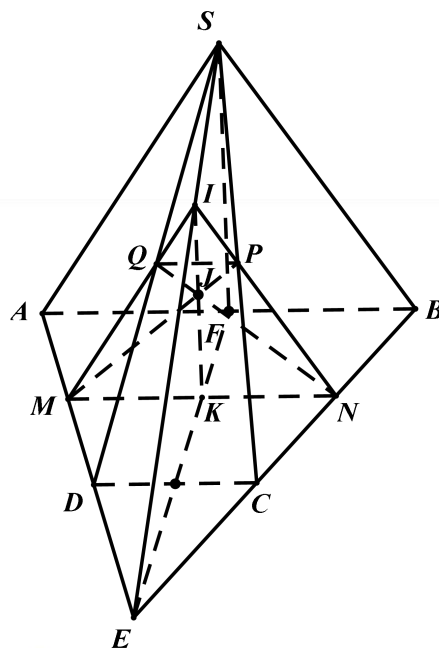
$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA}; \frac{NP}{SB} = \frac{CN}{CB} \text{ mà } \frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB} \text{ nên}$$

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{NP}{SB}.$$

Mặt khác $\triangle SAB$ cân tại $S \Rightarrow SA = SB$

$\Rightarrow MQ = NP \quad (**)$. Từ (*) và (**) suy ra $MNPQ$ là

hình thang cân.



b) $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp $\Leftrightarrow MQ + NP = MN + PQ$

Ta có $\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x) \Rightarrow NP = 2(a-x)$

Lại có $\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x$

Không khó khăn ta tính được $MN = 3a - 2x$

Do đó $MQ + NP = MN + PQ \Leftrightarrow 4(a-x) = 3a - 2x + x \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$

Khi đó tính được $r = \frac{a\sqrt{7}}{6}.$

c) Gọi $E = AD \cap BC \Rightarrow SE = (SAD) \cap (SBC).$

$$I = MP \cap NQ \Rightarrow \begin{cases} I \in MP \subset (SAD) \\ I \in NQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in SE.$$

Giới hạn:



Gọi I_0 là giao điểm của SE với mặt phẳng (β) đi qua CD và song song với (SAB) .

Khi $M \rightarrow D \Rightarrow N \rightarrow B \Rightarrow I \rightarrow I_0$

Khi $M \rightarrow A \Rightarrow N \rightarrow B \Rightarrow I \rightarrow S$

Phân đảo:

d) Gọi $K = IJ \cap MN$, vì $MNPQ$ là hình thang cân nên K là trung điểm của MN . Gọi $F = EK \cap AB$ thì F là trung điểm của AB nên F cố định

để thấy $IJ \parallel SF$ suy ra IJ có phương không đổi và điểm J thuộc mặt phẳng cố định (SEF) .

Câu 27: Bổ đề:

Cho tam giác ABC các điểm M, N thuộc các cạnh AB, AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, MN và $I = MB \cap CN$ thì A, F, I, E thẳng hàng.

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{AB}{AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AC}{AN}\overrightarrow{AN} \\ &= k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = 2k\overrightarrow{AF}. \end{aligned}$$

$$\text{Với } k = \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}.$$

Hay A, E, F thẳng hàng.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } 2\overrightarrow{IE} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = -\frac{IB}{IN}\overrightarrow{IN} - \frac{IC}{IM}\overrightarrow{IM} \\ &= l(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM}) = 2l\overrightarrow{IF} \text{ với } l = -\frac{IB}{IN} = -\frac{IC}{IM} \Rightarrow I, E, F \end{aligned}$$

thẳng hàng.

Vậy A, F, I, E thẳng hàng.

Quay lại bài toán:

Gọi $M = AB' \cap BA', P = AC' \cap CA', N = BC' \cap CB'$ và $I = CM \cap AN$

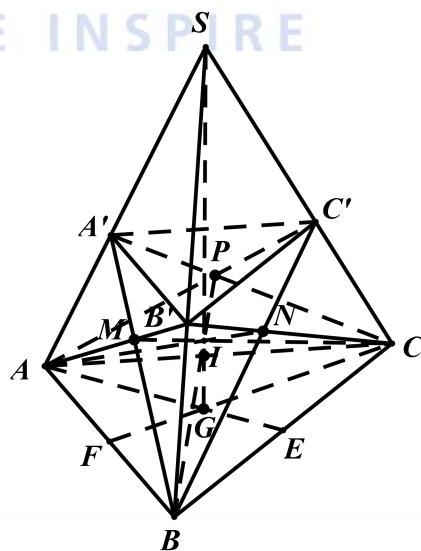
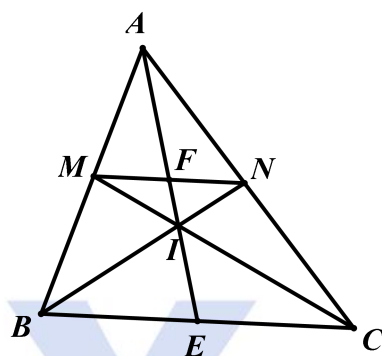
$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AN \subset (ABC') \\ I \in CM \subset (BCA') \end{cases} \Rightarrow I \in BP = (ABC') \cap (BCA').$$

Vậy I chính là điểm đồng quy của ba mặt phẳng $(A'BC), (B'AC), (C'AB)$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, BA .

Theo bổ đề trên ta có S, N, E thẳng hàng và $I \in AN$ nên

$$I \in (SAE).$$





Tương tự $I \in (SCF)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC thì

$$SG = (SAE) \cap (SCF) \text{ nên } I \in SG.$$

Từ đó dễ dàng lập luận được quỹ tích điểm I là đoạn thẳng SG trừ S và G .

Câu 28:

a) Gọi O, O' lần lượt là trọng tâm các mặt $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Dễ thấy $DBB'D'$ là hình bình hành nên

$$B'D' \parallel BD \subset (BDA')$$

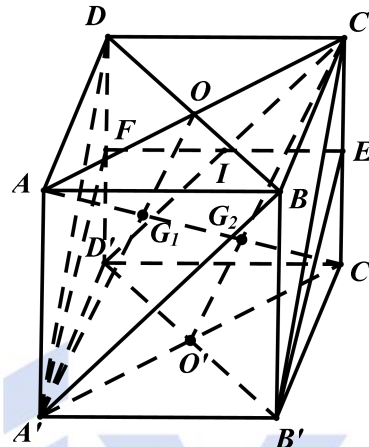
$$\Rightarrow B'D' \parallel (BDA') \quad (1).$$

Tương tự $OCO'A'$ là hình bình hành nên

$$O'C' \parallel OA' \subset (A'BD)$$

$$\Rightarrow CO' \parallel (A'BD) \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $(A'BD) \parallel (CB'D')$.



b) Ta có $A'O$ là trung tuyến của tam giác $A'BD$ và $\frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác $A'BD$.

Tương tự G_2 cũng là trọng tâm của tam giác $CB'D'$. Dễ thấy OG_1 và $O'G_2$ là đường trung bình của các tam giác ACG_2 và $A'C'G_1$ nên

$$AG_1 = G_1G_2 = G_1C' = \frac{1}{3}AC'.$$

c) Gọi I là trung điểm của CD' . Do G_2 là trọng tâm tam giác $CB'D'$ nên $I \in B'G_2 \subset (A'B'G_2)$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} I \in (A'B'G_2) \cap (CDD'C') \\ A'B' \parallel C'D' \\ A'B' \subset (A'B'G_2) \\ C'D' \subset (CDD'C') \end{cases} \Rightarrow (A'B'G_2) \cap (CDD'C') = EF \parallel C'D'$$

$E \in CC', F \in DD'$. Thiết diện là hình bình hành $A'B'EF$



Câu 29: a) Dễ thấy $PN \parallel CD'$ và $QM \parallel A'B$ mà $A'B \parallel C'D$ nên $PN \parallel QM$ hay M, N, P, Q đồng phẳng.

b) Do $PC'MA$ là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC' .

$$\Rightarrow O \in (MNPQ).$$

Mặt khác $A'B \parallel MQ \subset (MNPQ)$

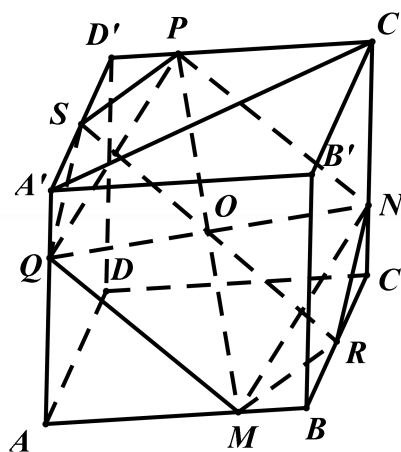
$$\Rightarrow A'B \parallel (MNPQ).$$

Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với $A'B$ thì Δ cố định và $\Delta \subset (MNPQ)$. Hay $(MNPQ)$ luôn chứa đường thẳng cố định Δ .

$$(MNPQ) \parallel (A'BC') \Rightarrow BC' \parallel (MNPQ) \Rightarrow BC' \parallel NR$$

$$\Leftrightarrow \frac{BR}{BC} = \frac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \frac{a}{2}. \text{ Đảo lại } x = \frac{a}{2}, \text{ dễ dàng chứng}$$

minh được $(MNPQ) \parallel (A'BC')$.



c) Dễ thấy Δ cắt $BC, A'D'$ tại các trung điểm R và S của chúng.

Thiết diện là lục giác $MPNPSQ$. Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ = NP, MR = NS, RN = SQ$ do đó chu vi thiết diện là

$$2p = 2(RM + MQ + QS). \text{ Ta có } MR = QS = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}, QM = x\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } 2p = 2\left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}\right).$$

$$\text{Đặt } f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2}; x \in [0; a].$$

Theo CauChy -Schwarz

$$\sqrt{(a^2 + 4(a-x)^2)(1^2 + 1^2)} \geq a + 2(a-x) \Rightarrow \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x)$$

$$\text{Nên } f(x) \geq x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x) = \frac{3a}{\sqrt{2}}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } \min(2p) = 3\sqrt{2}a.$$

Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có



$x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \leq \sqrt{2}a + a \Leftrightarrow (a-x)^2 \left[(a-x)^2 - a^2 \right] \leq 0$ đúng $\forall x \in [0; a]$. Đẳng thức xảy ra khi $x = a$. Vậy $\max(2p) = 2a(\sqrt{2} + 1)$.

Câu 30:

a) Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MN \Rightarrow MN \parallel AB \text{ Tương tự} \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \end{cases}$

$(\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel SA$.

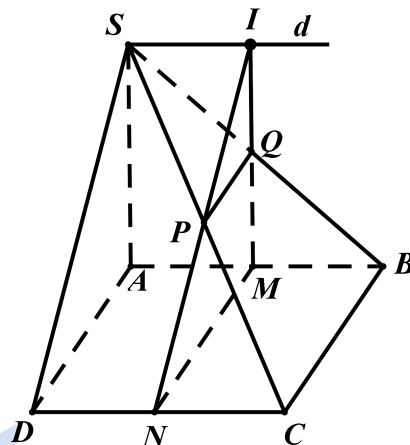
$(\alpha) \cap (SCD) = NP \parallel SD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Do $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ (SBC) \cap (\alpha) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel MN \quad (1)$

Ta có $MN \parallel AD, MQ \parallel SA$ mà $AD \perp SA$ nên $MN \perp MQ \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.



b) Gọi $d = (SAB) \cap (SCD)$, khi đó $I = NP \cap MQ \Rightarrow \begin{cases} I \in NP \subset (SCD) \\ I \in MQ \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow I \in d$ từ đây dễ dàng tìm được quỹ tích của điểm I .

Câu 31: a) Trong $(ABB'A')$ gọi

$J = MN \cap AB$,

trong (ABC) gọi $Q = JP \cap AC$.

Ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên

$(MNP) \cap (A'B'C') = MR \parallel PQ$.

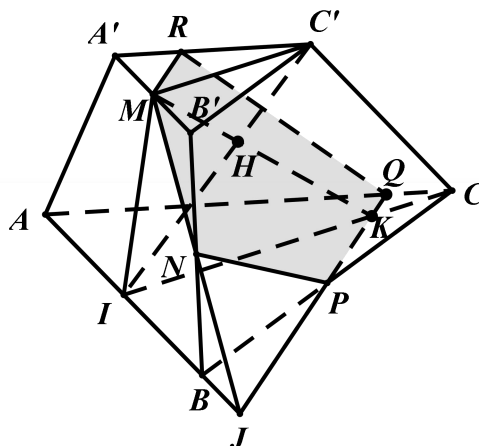
Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

b) Trong (ABC) gọi $K = PQ \cap IC$ thì

$K \in (MNP) \Rightarrow MK \subset (MNP)$.

Do $CI \parallel C'M$ nên trong $(MICC')$ gọi

$H = IC' \cap MK \Rightarrow H = IC' \cap (MNP)$.





Câu 32: a) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M
và song song với $(A'D'CB)$ và
 $N' = (\alpha) \cap BD$.

Ta có $\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB}$ (1)

Ta có $AD' = BD = a\sqrt{2}$ nên $AM = DN'$ mà
 $AM = DN$

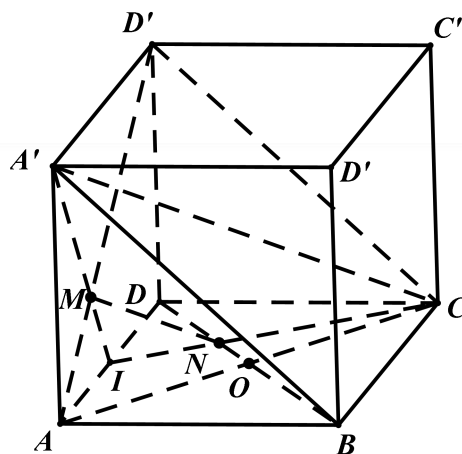
$\Rightarrow DN = DN' \Rightarrow N \equiv N'$.

Vậy $MN \subset (\alpha) \parallel (A'D'CB)$ do đó MN song
song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì dễ thấy M, N lần lượt là

trọng tâm các tam giác $A'AD$ và CAD nên
 $A'M$ và CN cắt nhau tại trung điểm I của
 AD .

Khi đó $\frac{IM}{IA'} = \frac{IN}{IC} \Rightarrow MN \parallel A'C$.



Câu 33: a) Gọi O, M, E, F lần lượt là trung
điểm của $AC', AC, BC, B'C'$.

Chứng minh $(IGK) \parallel (BCC'B')$.

Ta có

$\frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC'} \Rightarrow IG \parallel CC' \subset (BCC'B')$

$\Rightarrow IG \parallel (BCC'B') \quad (1)$

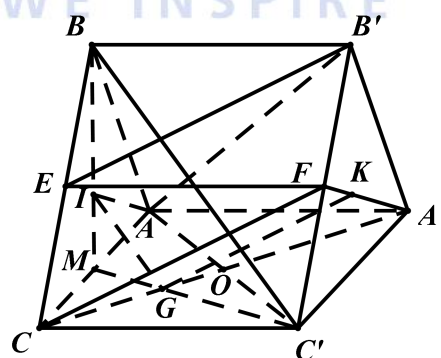
Tương tự $\frac{A'G}{A'C} = \frac{OA' + \frac{1}{3}OA'}{A'C}$
 $= \frac{\frac{4}{3}OA'}{A'C} = \frac{2}{3}$.

Lại có $\frac{A'K}{A'F} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A'G}{A'C} = \frac{A'K}{A'F}$

$\Rightarrow GK \parallel CF \subset (BCC'B')$

$\Rightarrow GK \parallel (BCC'B') \quad (2)$.

Từ (1), (2) suy ra $(IGK) \parallel (BCC'B')$.





Chứng minh $(A'KG) \parallel (AIB')$.

Dễ thấy $AA'FE$ là hình bình hành nên

$A'F \parallel AE$ hay $A'F \parallel (AIB')$ (3). Cũng dễ

thấy $CF \parallel EB' \subset (AIB') \Rightarrow CF \parallel (AIB')$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $(A'CF) \parallel (AIB')$ mà

$(A'CF)$

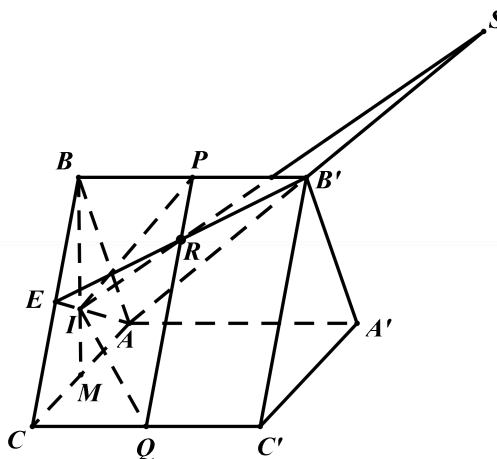
chính là $(A'KG)$ nên $(A'KG) \parallel (AIB')$.

b) Trong $(BCC'B')$ gọi $R = PQ \cap B'E$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \in PQ \\ R \in B'E \subset (AB'E) \end{cases}$$

Trong $(AB'E)$ gọi $S = IR \cap AB'$ thì đường

thẳng IR chính là đường thẳng cần dựng.



Câu 34: a) Ta có $MA \parallel NN'$ (1)

$$\text{Do } \begin{cases} MN \parallel (\alpha) \\ (AMNN') \cap (\alpha) = AN' \end{cases}$$

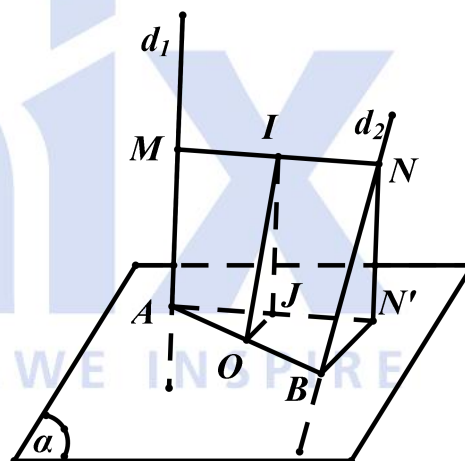
$$\Rightarrow AN' \parallel MN \text{ (2)}$$

Từ (1), (2) suy ra $AMNN'$ là hình bình hành.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d_2 và song song

với d_1 thì $NN' \subset (\beta) \Rightarrow N' \in (\beta)$ từ đó ta có

N' thuộc giao tuyến d_3 của (α) và (β) .



b) Ta có $MN = AN'$ nên MN nhỏ nhất khi AN' nhỏ nhất $\Leftrightarrow AN' \perp d_3$.

Từ đó ta xác định Δ như sau:

- Dựng (β) chứa d_2 và $(\beta) \parallel d_1$.

- Dựng giao tuyến $d_3 = (\alpha) \cap (\beta)$.

- Gọi N' là hình chiếu của A trên d_3 .

- Từ N' dựng đường thẳng song song với d_1 cắt d_2 tại N .

- Từ N dựng đường thẳng Δ song song với $N'A$ thì Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

c) Gọi J là trung điểm của AN' thì $(OIJ) \parallel (\beta)$ mà O cố định và (β) cố định nên (OIJ) cố định. Vậy OI thuộc mặt phẳng cố định đi qua O và song song với (β) .



Câu 35: a) Ta có $(ABC), (DBC), (\alpha)$ đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là BC, MN, PQ nên theo định lý về giao tuyến thì BC, MN, PQ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Ta chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân trong trường hợp BC, MN, PQ đồng quy

Gọi E là trung điểm của BC thì $\frac{EI}{EA} = \frac{EJ}{ED} \Rightarrow IJ \parallel AD$.

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} IJ \subset (\alpha) \\ AD \subset (ACD) \\ IJ \parallel AD \\ (\alpha) \cap (ACD) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel IJ.$$

Tương tự $MQ \parallel IJ$ nên $MNPQ$ là hình thang.

Dễ thấy $DQ = AM = x, DP = AN = y$. Theo định lý cô sin ta có

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy$$

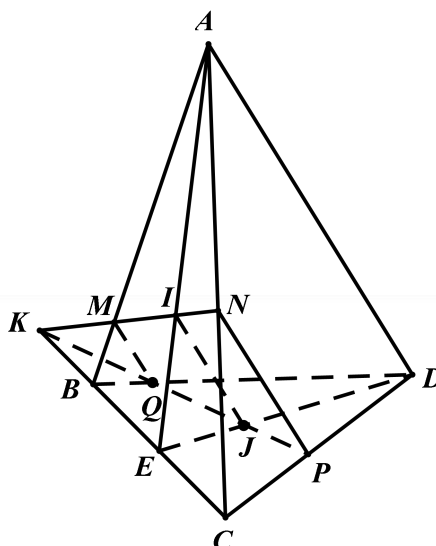
Tương tự

$$PQ^2 = DP^2 + DQ^2 - 2DP \cdot DQ \cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy$$

$$\Rightarrow MN = PQ$$

Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

Trường hợp BC, MN, PQ song song không có gì khó khăn bạn đọc tự kiểm tra.



$$\text{c) Ta có } S_{AMN} = S_{AIM} + S_{AIN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}xy \sin 60^\circ = \frac{1}{2}x \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \sin 30^\circ + \frac{1}{2}y \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \sin 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow a(x+y) = 3xy.$$

b) Ta có $AM + AN = x + y$. Theo BĐT Cauchy ta có

$$a(x+y) = 3xy \leq 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 4a(x+y) \Leftrightarrow x+y \geq \frac{4a}{3}$$

$\Rightarrow AM + AN \geq \frac{4a}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{2a}{3}$, khi đó (α) đi qua IJ và song song với BC .

Không giảm tổng quát ta có thể giả sử $x \geq y$ khi đó $x \in [\frac{2a}{3}; a]$

$$\text{Và } x+y = x + \frac{ax}{3x-a} = \frac{3x^2}{3x-a}$$



$$\Rightarrow x + y - \frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{3x-a} - \frac{3a}{2} = \frac{(a-x)(2a-x)}{3x-a} \leq 0 \Rightarrow x + y \leq \frac{3a}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi}$$

$$x = a \Rightarrow y = \frac{a}{2}. \text{ Khi đó } (\alpha) \text{ đi qua } B.$$

$$\text{Vậy } \min(AM + AN) = \frac{4a}{3}, \max(AM + AN) = \frac{3a}{2}.$$

c) Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân có

$$MQ = a - x, NP = a - y,$$

giả sử $x \geq y \Rightarrow a - x \leq a - y$.

$$\text{Ta có } HN = \frac{(a-y) - (a-x)}{2} = \frac{x-y}{2}$$

$$MH^2 = MN^2 - NH^2$$

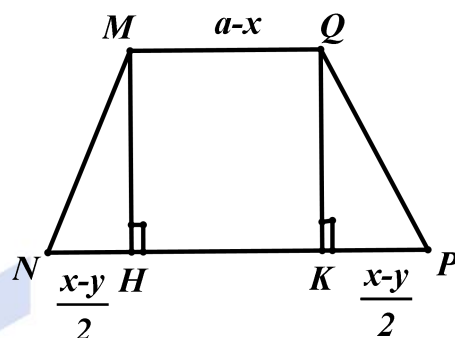
$$= x^2 + y^2 - xy - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3(x^2 + y^2) - 6xy}{4} = \frac{3s^2 - 8as}{4}$$

$$MH = \sqrt{3xy} = \sqrt{a(x+y)} = \frac{\sqrt{3s^2 - 8as}}{2}$$

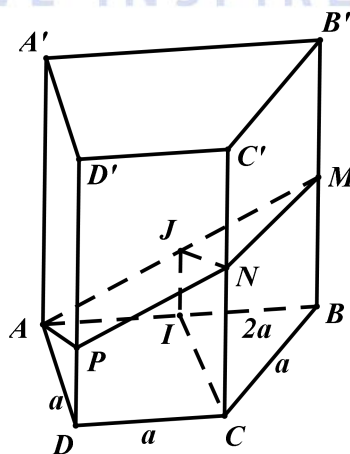
$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP)MH = \frac{1}{2}(2a - (x+y))\sqrt{3s^2 - 8as}$$

$$= \frac{1}{4}(2a-s)\sqrt{3s^2 - 8as}.$$



Câu 36: a) Ta có $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$,
 $(\alpha) \cap (ABB'A') = AM$

$(\alpha) \cap (CDD'C') = NP \Rightarrow AM \parallel NP$ (1) do đó
 $AMNP$ là hình thang.



b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AM thì $IC \parallel AD \Rightarrow IC \parallel (ADD'A')$

lại có $IJ \parallel BB' \parallel AA'$

$\Rightarrow IJ \parallel AA' \subset (ADD'A') \Rightarrow (CIJN) \parallel (ADD'A')$ Mặt khác $(\alpha) \cap (ADD'A') = AP$ và

$(\alpha) \cap (CIJN) = JN$ nên $JN \parallel AP$ (2)



Từ (1),(2) suy ra $APNJ$ là hình bình hành, do đó $PN = AJ = \frac{1}{2}AM$.

