



QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

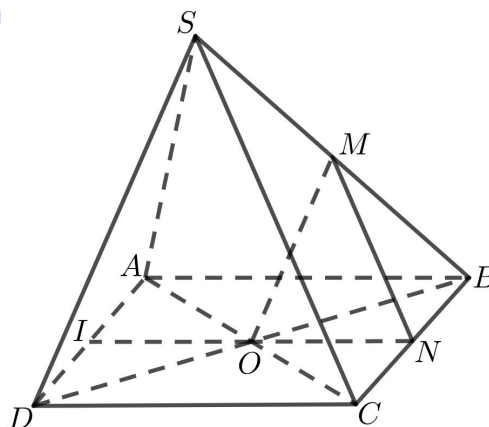
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, BC .

- Đường thẳng AB song song với đường thẳng CD .
- Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng đi qua S và song song với AC .
- Đường thẳng CD song song với mặt phẳng (OMN) .
- Hai mặt phẳng (SAD) và (OMN) song song.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



- Đúng vì đáy $ABCD$ là hình bình hành.
- Sai vì giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng SO .

c) Đúng.

Ta có ON là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow ON // CD$.

Mà $ON \subset (OMN), CD \not\subset (OMN)$.

$\Rightarrow CD // (OMN)$.

d) Sai.

Trong $(ABCD)$ gọi $I = ON \cap AD$.



$$\Rightarrow \begin{cases} I \in ON \subset (OMN) \\ I \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow I \text{ là điểm chung của hai mặt phẳng } (SAD) \text{ và } (OMN).$$

Vậy hai mặt phẳng (SAD) và (OMN) không song song.

Câu 2: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$.

a) $BB' // (ACC'A')$.

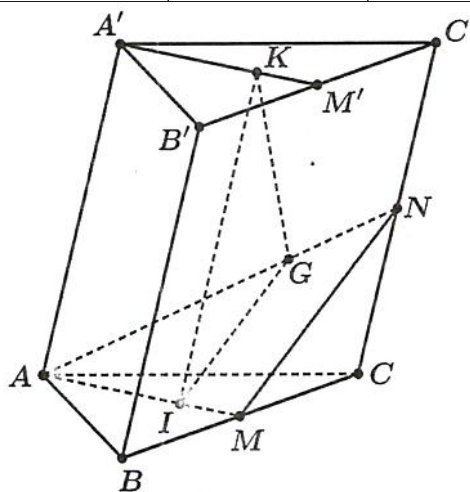
b) $(ABC) // (A'B'C')$.

c) IG cắt $(BCC'B')$.

d) $(IKG) // (BCC'B')$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Đúng

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BB' // AA' \\ AA' \subset (ACC'A') \\ BB' \not\subset (ACC'A') \end{cases} \Rightarrow BB' // (ACC'A').$$

b) Đúng

Ta có: $(ABC) // (A'B'C')$ (do $(ABC), (A'B'C')$ là hai mặt phẳng chứa hai đáy của lăng trụ nên song song với nhau).

c) Sai

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Gọi N là trung điểm của CC' , tam giác AMN có

$$\frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN} = \frac{2}{3} \quad (\text{tính chất trọng tâm})$$

Suy ra $IG // MN$ mà $MN \subset (BCC'B')$; $IG \not\subset (BCC'B')$ nên $IG // (BCC'B')$ (1)

d) Đúng

MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên

$$\begin{cases} MM' // BB' \\ MM' = BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM' // AA' \\ MM' = AA' \end{cases} \Rightarrow AMM'A' \text{ là hình bình hành.}$$



Vì I, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ nên

$$IM = KM' = \frac{1}{3} A'M' = \frac{1}{3} AM, \text{ mà } IM \parallel KM' \text{ nên } IKM'M \text{ là hình bình hành.}$$

Suy ra $IK \parallel MM', MM' \subset (BCC'B'), IK \not\subset (BCC'B') \Rightarrow IK \parallel (BCC'B') \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(IKG) \parallel (BCC'B')$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$.

a) Tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành.

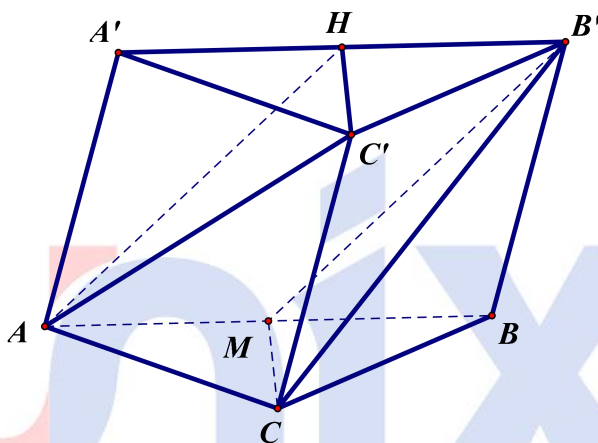
b) $AC' \parallel (A'B'B)$.

c) $(AA'C) \parallel (BB'C')$.

d) $B'C \parallel (AHC')$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) Đúng.

Ta có: $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành.

b) Sai.

Ta có: AC' cắt mặt phẳng $(A'B'B)$ tại A .

c) Sai.

Ta có: $(AA'C)$ và $(BB'C')$ có chung nhau điểm C' .

d) Đúng.

Gọi M là trung điểm của AB

Suy ra $MB' \parallel AH \Rightarrow MB' \parallel (AHC') \quad (1)$

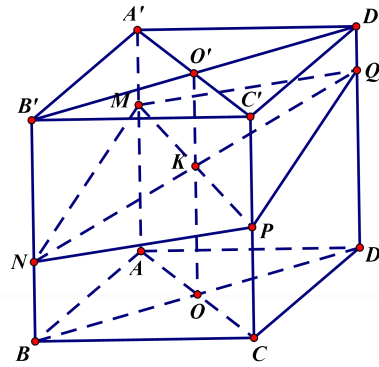
Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$

Suy ra $MH \parallel BB'$ và $MH = BB'$ nên $MH \parallel CC'$ và $MH = CC' \Rightarrow MHC'C$ là hình bình hành
 $\Rightarrow MC \parallel HC' \Rightarrow MC \parallel (AHC') \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \Rightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P

sao cho $\frac{A'M}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{B'N}{BB'} = \frac{2}{3}, \frac{C'P}{CC'} = \frac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q .



- a) Hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$ song song với nhau.
 b) Mặt phẳng $(CB'D')$ song song với mặt phẳng $(BC'D)$.
 c) $NP // MQ$
 d) Tỷ số $\frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Mệnh đề này **ĐÚNG**.

b) Mệnh đề này **SAI**.

Ta có
$$\begin{cases} C'B \subset (C'BD) \\ CB' \subset (CB'D') \Rightarrow (C'BD) \cap (CB'D') \\ CB' \cap C'B \end{cases}$$

c) Mệnh đề này **ĐÚNG**.

$$\begin{cases} (BB'C'C) // (AA'D'D) \\ (MNP) \cap (BB'C'C) = NP \Rightarrow NP // MQ \\ (MNP) \cap (AA'D'D) = MQ \end{cases}$$

d) Mệnh đề này **SAI**.

Tương tự:
$$\begin{cases} (AA'B'B) // (CC'D'D) \\ (MNP) \cap (AA'B'B) = MN \Rightarrow MN // PQ \\ (MNP) \cap (CC'D'D) = PQ \end{cases}$$

Suy ra mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

Gọi O, O', K lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', MNPQ$ thì O, O', K thẳng hàng.

Ta có $B'N + D'Q = 2O'K = A'M + C'P \Rightarrow \frac{B'N}{BB'} + \frac{D'Q}{DD'} = \frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{6}$$

Câu 5: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt.

- a) $AD // (BEF)$.



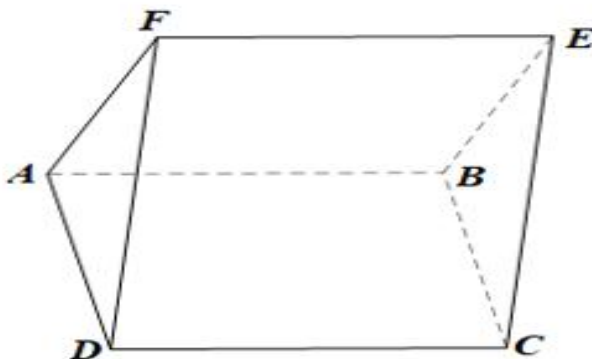
b) $(AFD) \parallel (BEC)$.

c) $(ABD) \parallel (EFC)$.

d) Sáu điểm A, B, C, D, E, F là 6 đỉnh của một hình lăng trụ tam giác.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------



a) Sai: AD và (BEF) cắt nhau tại A .

b) Đúng: Vì $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AF \parallel BE \end{cases}$.

c) Sai: Vì (ABD) và (EFC) có C chung.

d) Đúng: Vì $(AFD) \parallel (BEC)$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc cạnh SA và (P) là mặt phẳng qua E và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Giao tuyến của $mp(P)$ với mặt bên (SAB) là đường thẳng đi qua E và song song với CD .

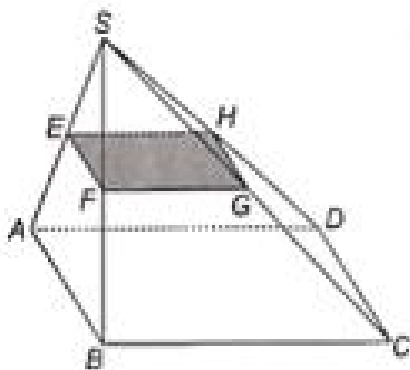
b) Giao tuyến của $mp(P)$ với mặt bên (SBC) là đường thẳng song song với BC .

c) Giao tuyến của $mp(P)$ với mặt bên (SCD) là đường thẳng song song với BD .

d) Hình tạo bởi các giao tuyến của $mp(P)$ với các mặt bên của hình chóp là hình bình hành.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



Trong $mp(SAB)$, dựng $EF \parallel AB, F \in SB$.

Trong $mp(SBC)$, dựng $FG \parallel BC, G \in SC$.

Trong $mp(SCD)$, dựng $GH \parallel CD, H \in SD$.

Vậy ta có: $(P) \cap (SAB) = EF, (P) \cap (SBC) = FG, (P) \cap (SCD) = GH, (P) \cap (SAD) = EH$.

a) Đúng: Vì $EF \parallel AB \parallel CD$.

b) Đúng.

c) Sai.

d) Đúng: Hình tạo bởi các giao tuyến là hình bình hành $EFGH$.

Câu 7: Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song nhau, nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' .

a) $mp(AA', BB')$ song song với $mp(CC', DD')$.

b) $A'B' \parallel C'D'$

c) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang

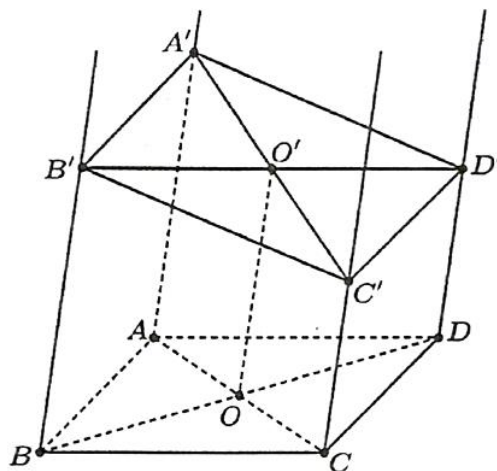
d) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó $OO' \parallel AA'$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Chứng minh $mp(AA', BB')$ và $mp(CC', DD')$ song song:

Ta có $AA' \parallel DD'$ và $AB \parallel CD$ nên $mp(AA', BB') \parallel mp(CC', DD')$.



b) Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} mp(AA', BB') // mp(CC', DD') \\ (Q) \cap mp(AA', BB') = A'B' \\ (Q) \cap mp(CC', DD') = C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' // C'D' .(1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $A'D' // B'C'$. (2)

c) Từ (1) và (2) suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

d) Chứng minh $OO' // AA'$:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (ACC'A') \cap (BDD'B') = OO' \\ AA' \subset (ACC'A'), BB' \subset (BDD'B') \\ AA' // BB' \end{cases}$$

$$\Rightarrow OO' // AA' // BB' \text{ hay } OO' // AA'.$$

Câu 8: Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Khi đó:

a) $AMM'A'$ là hình bình hành

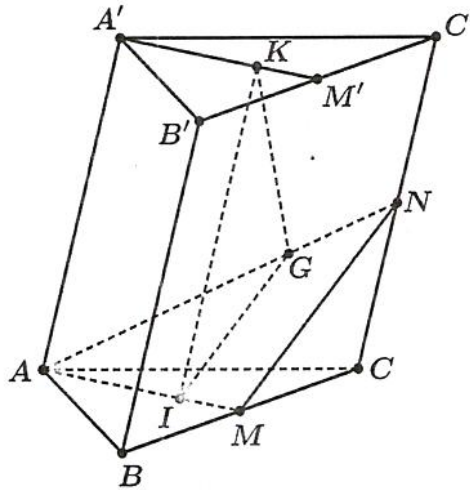
b) $\frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN} = \frac{1}{3}$

c) (IKG) cắt $(BCC'B')$

d) $(A'KG) // (AIB')$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$.

MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên

$$a) \begin{cases} MM' \parallel BB' \\ MM' = BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM' \parallel AA' \\ MM' = AA' \end{cases} \Rightarrow AMM'A' \text{ là hình bình hành.}$$

Vì I, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ nên

$$IM = KM' = \frac{1}{3} AM' = \frac{1}{3} AM, \text{ mà } IM \parallel KM' \text{ nên } IKM'M \text{ là hình bình hành.}$$

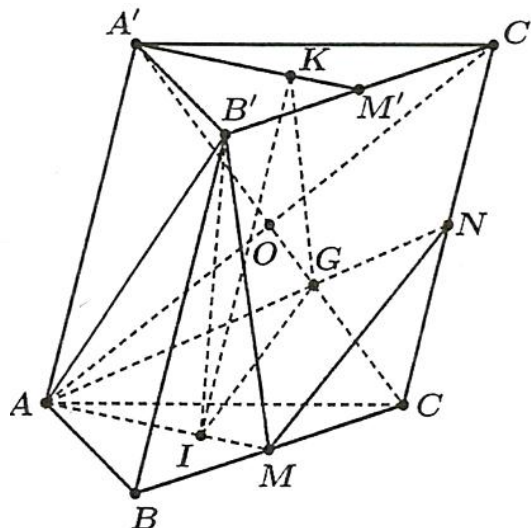
$$\text{Suy ra } IK \parallel MM', MM' \subset (BCC'B') \Rightarrow IK \parallel (BCC'B'). (1)$$

Gọi N là trung điểm của CC' , tam giác AMN có

$$b) \frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN} = \frac{2}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

$$\text{Suy ra } IG \parallel MN \text{ mà } MN \subset (BCC'B') \text{ nên } IG \parallel (BCC'B'). (2)$$

c) Từ (1) và (2) suy ra $(IKG) \parallel (BCC'B')$.





Vì $(A'KG) \equiv (A'M'C), (AIB') \equiv (AMB')$, ta cần chứng minh

$$(A'M'C) // (AMB').$$

Dễ thấy $AMM'A'$ là hình bình hành nên $AM // A'M'$ mà $A'M' \subset (A'M'C)$ nên $AM // (A'M'C)$. (3)

Ta có : $\begin{cases} CM // B'M' \\ CM = B'M' \end{cases} \Rightarrow CMB'M'$ là hình bình hành, suy ra

$$B'M // CM', CM' \subset (A'M'C) \Rightarrow B'M // (A'M'C). (4)$$

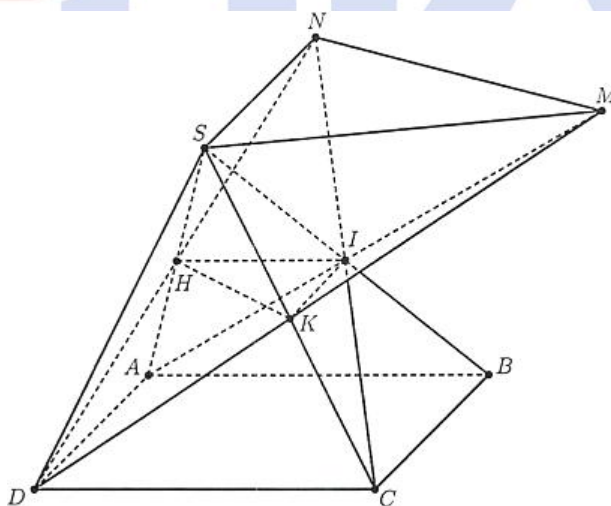
d) Từ (3) và (4) suy ra $(A'M'C) // (AMB')$, hay $(A'KG) // (AIB')$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Gọi M là giao điểm của AI và KD, N là giao điểm của DH và CI .

- $HI // (ABCD)$
- $(HIK) // (ABCD)$.
- SM và HI chéo nhau
- (SMN) cắt (HIK)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



a) b) Vì HI là đường trung bình của tam giác SAB nên $HI // AB$,
 mà $AB \subset (ABCD) \Rightarrow HI // (ABCD)$. (1)

Tương tự ta có: $KI // BC, BC \subset (ABCD) \Rightarrow KI // (ABCD)$. (2)

Mặt khác: $HI \subset (HKI), KI \subset (HKI), HI \cap KI = I$. (3)



Từ (1), (2) và (3) suy ra $(HIK) // (ABCD)$.

c) d)

$$\text{Vì } \begin{cases} M \in AI, AI \subset (SAB) \\ M \in DK, DK \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAB) \cap (SCD) \\ \Rightarrow SM = (SAB) \cap (SCD).$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = SM \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \Rightarrow SM // AB // CD \Rightarrow SM // HI (1) \\ AB // CD \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} N \in DH, DH \subset (SAD) \\ N \in CI, CI \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N \in (SAD) \cap (SBC) \\ \Rightarrow SN = (SAD) \cap (SBC).$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = SN \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \Rightarrow SN // AD // BC \Rightarrow SN // KI (2) \\ AD // BC \end{cases}$$

Mặt khác ba điểm S, M, N không thẳng hàng. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $(SMN) // (HIK)$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

a) $MN // (SBC)$

b) $(OMN) // (SBC)$.

c) Gọi E là trung điểm đoạn AB và F là một điểm thuộc đoạn ON . Khi đó EF cắt với mặt phẳng (SBC) .

d) Gọi G là một điểm trên mặt phẳng $(ABCD)$ cách đều AB và CD . Khi đó GN cắt (SAB)

Lời giải

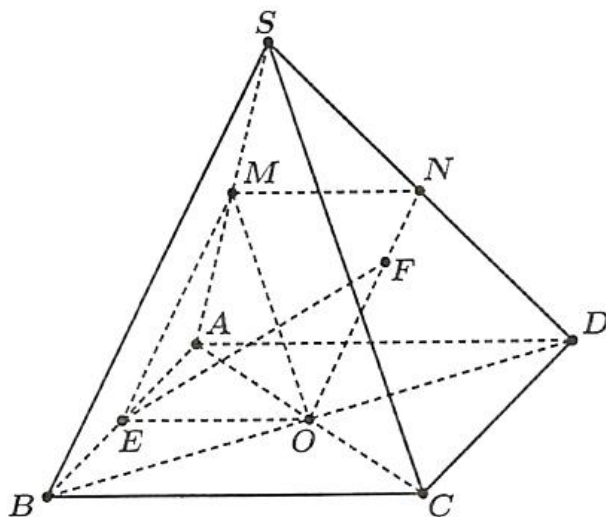
a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) b) Vì MN là đường trung bình của tam giác SAD

nên $MN // AD \Rightarrow MN // BC \Rightarrow MN // (SBC)$. (1)

Tương tự, ta có O, N theo thứ tự là trung điểm của BD, SD nên ON là đường trung bình của tam giác $SBD \Rightarrow ON // SB \Rightarrow ON // (SBC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN) // (SBC)$.

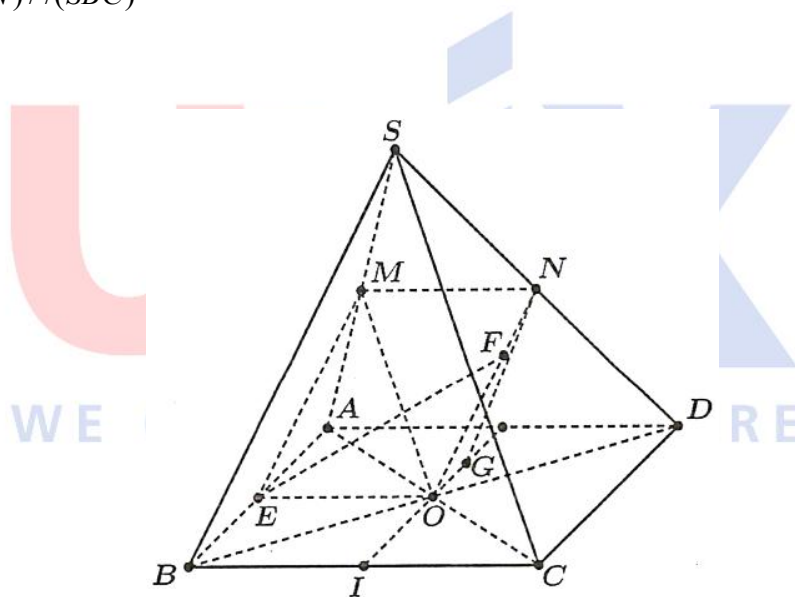


c) Ta có OE là đường trung bình của tam giác ABD nên $OE \parallel AD \Rightarrow OE \parallel MN$.

Do đó $E \in (OMN)$. Mặt khác $F \in ON, ON \subset (OMN) \Rightarrow F \in (OMN)$.

Ta có: $\begin{cases} EF \subset (OMN) \\ (OMN) \parallel (SBC) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel (SBC).$

d)



Vì G thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ và cách đều AB, CD nên G thuộc đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ (ứng với hai cạnh AB, CD).

Gọi I là trung điểm BC thì I, O, G thẳng hàng.

Ta có OI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $OI \parallel AB \Rightarrow OI \parallel (SAB)$. (3)

Tương tự, ta có $ON \parallel SB \Rightarrow ON \parallel (SAB)$. (4)

Từ (3), (4) suy ra $(OIN) \parallel (SAB)$ mà $NG \subset (OIN)$ nên $NG \parallel (SAB)$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD, B'D'C$.

a) $A'D'CB$ là hình bình hành

b) $(A'BD) \parallel (B'D'C)$



c) G_1, G_2 cùng thuộc AC'

d) $G_1G_2 = \frac{2}{3}AC'$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) b)

Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\begin{cases} A'D' // BC \\ A'D' = BC \end{cases} \Rightarrow A'D'CB$ là hình bình hành.

Suy ra $A'B // CD' \Rightarrow A'B // (B'D'C)$. (1)

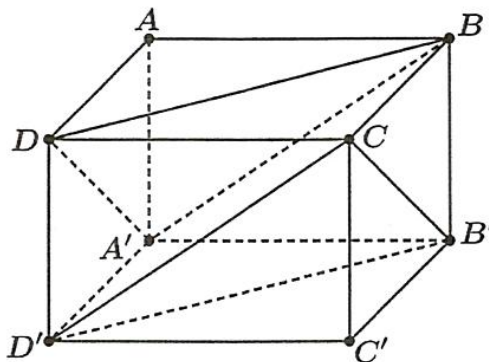
Tương tự, ta có: $\begin{cases} A'B' // CD \\ A'B' = CD \end{cases} \Rightarrow A'B'CD$ là hình bình hành.

Suy ra $A'D // B'C \Rightarrow A'D // (B'D'C)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(A'BD) // (B'D'C)$.

c) d)

Gọi O, O', I theo thứ tự là tâm của các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', ACC'A'$.

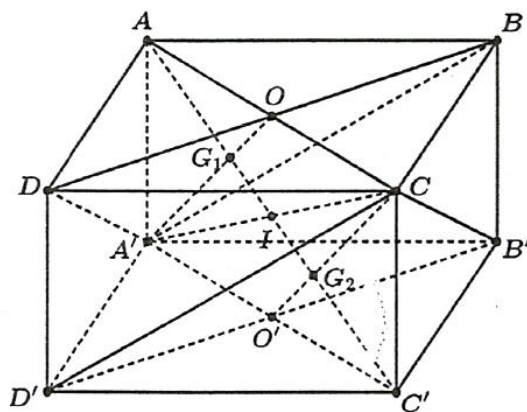


Vì G_1 là trọng tâm tam giác $AB'D$ nên $\frac{A'G_1}{A'O} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1$ là trọng tâm tam giác $A'AC$, suy ra $G_1 = AI \cap A'O$. (3)

Tương tự, G_2 là trọng tâm tam giác $B'D'C$ nên $\frac{CG_2}{C'O} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow G_2$ là trọng tâm tam giác $A'C'C$, suy ra $G_2 = C'I \cap C'O$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra G_1, G_2 cùng thuộc AC' .



Chứng minh $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' = \frac{1}{3}AC'$:

Ta có: $\frac{AG_1}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG_1}{AC'} = \frac{1}{3}$; $\frac{C'G_2}{C'I} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C'G_2}{AC'} = \frac{1}{3}$.

Do vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' = \frac{1}{3}AC'$.

Vậy G_1, G_2 cùng thuộc AC' , đồng thời chia AC' thành ba phần bằng nhau.

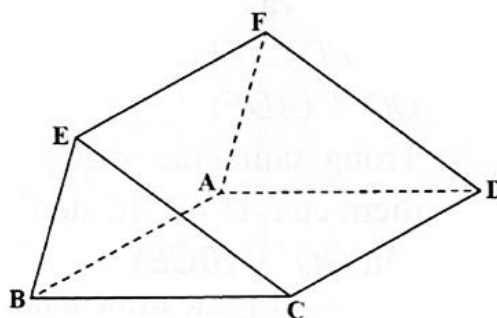
Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là trọng tâm $\triangle ABE$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF) . Lấy N là giao điểm của (P) và AC .

- a) $EFDC$ là hình thang
- b) $FD \parallel EC$
- c) $(ADF) \parallel (BCE)$.

d) $\frac{AN}{NC} = 3$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	c) Sai
--------	---------	---------	--------



a) b) c) Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Chứng minh rằng: $(ADF) \parallel (BCE)$.

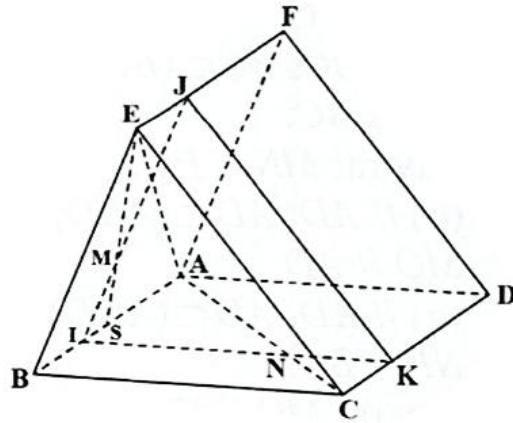


Ta có $\begin{cases} EF // CD (// AB) \\ EF = CD (= AB) \end{cases} \Rightarrow EFDC \text{ là hình bình hành.}$

$\Rightarrow FD // EC.$

Ta có $\begin{cases} AD // BC; AF // BE \\ AD, AF \subset (ADF); AD \cap AF = A \Rightarrow (ADF) // (BCE) \\ BC, BE \subset (BCE); BC \cap BE = B \end{cases}$

d) Tính $\frac{AN}{NC}.$



Vẽ mp (P) chứa M và $(P) // (ADF)$ cắt AB, AC, CD, EF lần lượt tại $I, N, K, J.$

Ta có: $\frac{AI}{BI} = \frac{AN}{NC} (IN // BC)$

Ta có: $\frac{EJ}{IS} = \frac{ME}{MS} = 2 (IS // JE)$

$BI = EJ$ (tứ giác BIJE là hình bình hành)

$$\Rightarrow \frac{BI}{IS} = 2 \Rightarrow \frac{BI}{2} = \frac{IS}{1} = \frac{BI + IS}{2 + 1} = \frac{BS}{3}$$

$$\Rightarrow BI = \frac{2}{3} BS; IS = \frac{1}{3} BS$$

$$\text{Ta có: } AI = AS + IS = BS + \frac{1}{3} BS = \frac{4}{3} BS \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{\frac{4}{3} BS}{\frac{2}{3} BS} = 2 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = 2$$

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

a) $(BDA') // (B'D'C').$

b) Đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C.$

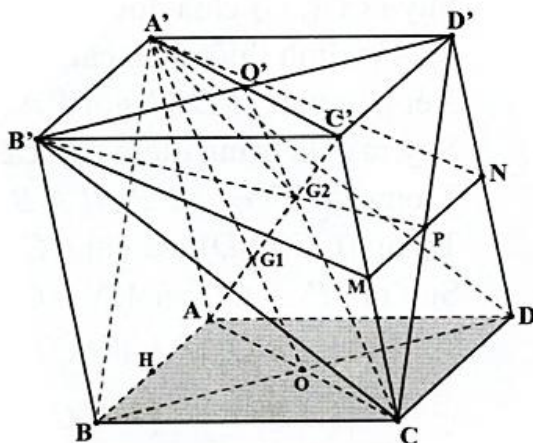
c) $AG_1 = 2G_1G_2$



d) Mặt phẳng $(A'B'G_2)$ cắt hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ tạo thành một tứ giác là hình bình hành

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Chứng minh: $(BDA') // (B'D'C)$.

Ta có $BA'D'C$ là hình bình hành nên $BA' // D'C$.

Ta có $BB'D'D$ là hình bình hành nên $B'D' // BD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BA' // D'C \\ BD // B'D' \\ BA', BD \subset (BDA'); BA' \cap BD = B \\ B'D', D'C \subset (B'D'C); B'D' \cap D'C = D' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (BDA') // (B'D'C).$$

b) Chứng minh đường chéo AC' qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC; AC \subset (ACC'A') \\ O \in BD; BD \subset (BDA') \end{cases} \Rightarrow O \in (ACC'A') \cap (BDA').$$

Mà $A' \in (ACC'A') \cap (BDA')$ nên $A'O = (ACC'A') \cap (BDA')$

Trong $(ACC'A')$, gọi $E = A'O \cap AC'$.

$$\text{Ta có } \frac{A'E}{EO} = \frac{A'C'}{AO} = 2 \text{ (Thales)}$$

Suy ra E trùng với trọng tâm G_1 của tam giác BDA' . (1)



Trong $(A'B'C'D')$, gọi $O' = A'C' \cap B'D'$.

$$\Rightarrow \begin{cases} O' \in A'C'; A'C' \subset (ACC'A') \\ O' \in B'D'; B'D' \subset (B'D'C) \end{cases} \Rightarrow O' \in (ACC'A') \cap (B'D'C).$$

Mà $C \in (ACC'A') \cap (B'D'C)$ nên $CO = (ACC'A') \cap (B'D'C)$.

Trong $(ACC'A')$, gọi $F = CO \cap AC'$.

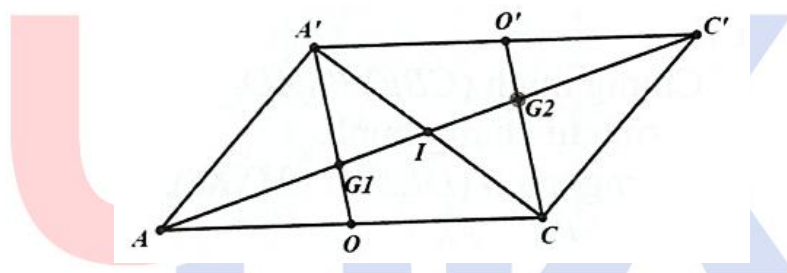
Ta có $\frac{CF}{FO} = \frac{AC}{C'O} = 2$ (Thales)

Suy ra F trùng với trọng tâm G_2 của tam giác $B'D'C$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AC' qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) Chứng minh G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Trong $(AA'C'C)$, gọi $I = A'C \cap AC'$.



Ta có G_1 là trọng tâm của tam giác $A'AC$ nên $AG_1 = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{3} AC'$.

Ta có G_2 là trọng tâm của tam giác $A'CC'$ nên $AG_2 = \frac{2}{3} C'I = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{3} AC'$.

Ta có $G_1G_2 = AC' - AG_1 - C'G_2 = AC' - \frac{1}{3} AC' - \frac{1}{3} AC' = \frac{1}{3} AC'$.

Từ đó ta có $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' \left(= \frac{1}{3} AC' \right)$.

Suy ra G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Xét tam giác $B'D'C$, gọi $P = B'G_2 \cap CD'$.

Suy ra P là trung điểm của CD' .

Trong $(A'B'G_2)$, vẽ $Px // A'B'$.



Trong $(CC'D'D)$, Px cắt CC', DD' lần lượt tại M và N .

Suy ra $MN // CD$ và $MN = CD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (A'B'G_2) \cap (A'B'C'D') = A'B' \\ (A'B'G_2) \cap (B'C'CB) = B'M \\ (A'B'G_2) \cap (CC'D'D) = MN \\ (A'B'G_2) \cap (AA'D'D) = NA' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ thiết diện của $(A'B'G_2)$ và hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là tứ giác $A'B'MN$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN // A'B' \\ MN = A'B' (= CD) \end{cases} \Rightarrow \text{thiết diện } A'B'MN \text{ là hình bình hành.}$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

a) ON chéo nhau với SB

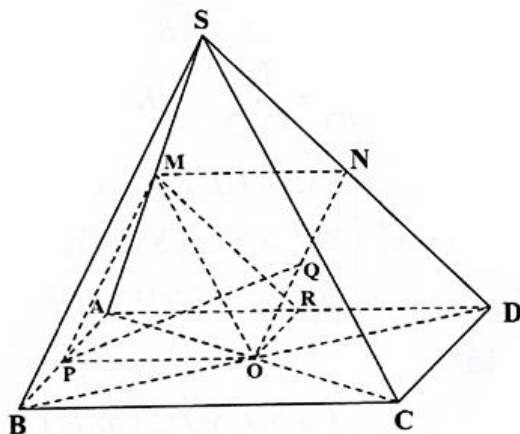
b) $(OMN) // (SBC)$.

c) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON . Khi đó PQ cắt (SBC)

d) Gọi R là trung điểm AD . Khi đó $(MOR) // (SCD)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------



a) b) Ta có $OM // SC$ (đường trung bình tam giác SAC). Ta có $ON // SB$ (đường trung bình tam giác SBD).

$$\text{Ta có } \begin{cases} ON // SB; OM // SC \\ OM, ON \subset (OMN), OM \cap ON = O \\ SB, SC \subset (SBC), SB \cap SC = S \end{cases}$$



$$\Rightarrow (OMN) // (SBC)$$

c) Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và ON . Chứng minh: $PQ // (SBC)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} OP // AB \\ AB // MN \end{cases}$$

$$\Rightarrow OP // MN \Rightarrow OMPN \text{ là hình thang} \Rightarrow P \in (OMN).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} NP \subset (OMN) \\ (OMN) // (SBC) \end{cases} \Rightarrow NP // (SBC)$$

d) Gọi R là trung điểm AD . Chứng minh: $(MOR) // (SCD)$.

Ta có $OR // CD$ (đường trung bình của tam giác ACD)

$$\text{Ta có } \begin{cases} OM // SC (cmt) \\ OR // CD (cmt) \\ OM, OR \subset (MOR), OM \cap OR = O \\ SC, SD \subset (SCD), SC \cap SD = S \end{cases} \Rightarrow (MOR) // (SCD)$$

Câu 15: Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

a) $II' // BB'$

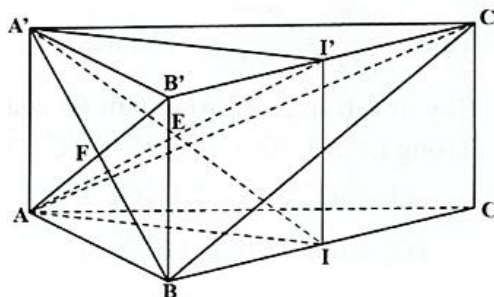
b) $AA'I'I$ là hình bình hành

c) IA' song song $(AB'C')$.

d) Giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$ là đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng AI' , $A'I$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) b) Ta có I', I là trung điểm của $B'C'$ và BC .

Suy ra II' là đường trung bình của hình bình hành $BB'C'C$.

Suy ra $II' = BB'$ và $II' // BB'$.



$$\text{Ta có } \begin{cases} II' // AA' (// BB') \\ II' = AA' (= BB') \end{cases}$$

$\Rightarrow AA'II'$ là hình bình hành. $\Rightarrow AI // A'I'$.

c) Trong $(IAA'I')$, gọi $E = AI' \cap A'I$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} E \in AI'; AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I \end{cases} \Rightarrow \text{Suy ra } E = A'I \cap (AB'C').$$

d) Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$.

Trong $(AA'B'B)$, gọi $F = AB' \cap A'B$.

$$\Rightarrow \begin{cases} F \in AB'; AB' \subset (AB'C') \\ F \in A'B; A'B \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow F \in (AB'C') \cap (A'BC') \quad (1)$$

Ta có $E = AI' \cap A'I$.

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in AI'; AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I; A'I \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow E \in (AB'C') \cap (A'BC') \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EF = (AB'C') \cap (A'BC')$.

Câu 16: Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$.

a) $AMM'A'$ là hình bình hành

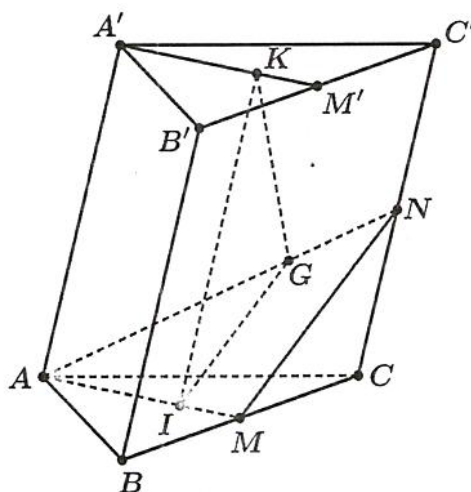
$$\text{b) } \frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN} = \frac{1}{3}$$

c) (IKG) cắt $(BCC'B')$

d) $(A'KG) // (AIB')$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$.

MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên

$$a) \begin{cases} MM' // BB' \\ MM' = BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM' // AA' \\ MM' = AA' \end{cases} \Rightarrow AMM'A' \text{ là hình bình hành.}$$

Vì I, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ nên

$$IM = KM' = \frac{1}{3}AM' = \frac{1}{3}AM, \text{ mà } IM // KM' \text{ nên } IKM'M \text{ là hình bình hành.}$$

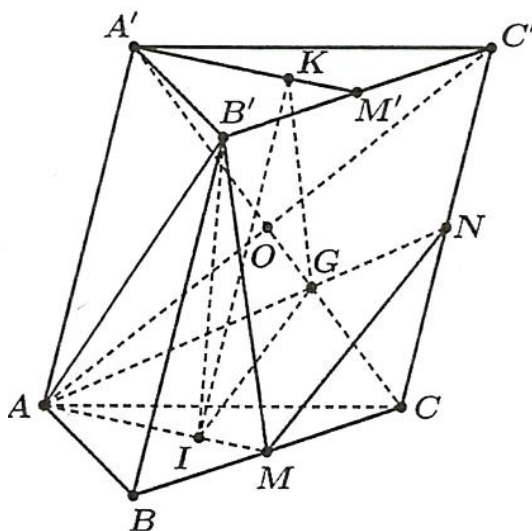
$$\text{Suy ra } IK // MM', MM' \subset (BCC'B') \Rightarrow IK // (BCC'B'). (1)$$

Gọi N là trung điểm của CC' , tam giác AMN có

$$b) \frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN} = \frac{2}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

$$\text{Suy ra } IG // MN \text{ mà } MN \subset (BCC'B') \text{ nên } IG // (BCC'B'). (2)$$

$$c) \text{ Từ (1) và (2) suy ra } (IKG) // (BCC'B').$$





Vì $(A'KG) \equiv (A'M'C), (AIB') \equiv (AMB')$, ta cần chứng minh

$$(A'M'C) // (AMB').$$

Dễ thấy $AMM'A'$ là hình bình hành nên $AM // A'M'$ mà $A'M' \subset (A'M'C)$ nên $AM // (A'M'C)$. (3)

Ta có : $\begin{cases} CM // B'M' \\ CM = B'M' \end{cases} \Rightarrow CMB'M'$ là hình bình hành, suy ra:

$$B'M // CM', CM' \subset (A'M'C) \Rightarrow B'M // (A'M'C). (4)$$

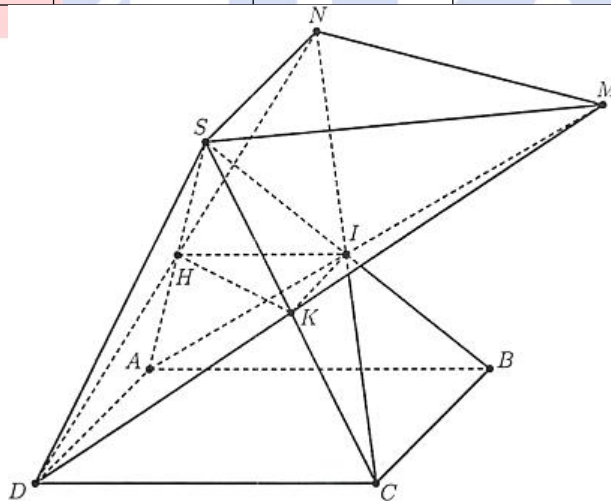
d) Từ (3) và (4) suy ra $(A'M'C) // (AMB')$, hay $(A'KG) // (AIB')$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Gọi M là giao điểm của AI và KD, N là giao điểm của DH và CI .

- $HI // (ABCD)$
- $(HIK) // (ABCD)$.
- SM và HI chéo nhau
- (SMN) cắt (HIK)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



a) b) Vì HI là đường trung bình của tam giác SAB nên $HI // AB$,
 mà $AB \subset (ABCD) \Rightarrow HI // (ABCD)$. (1)

Tương tự ta có: $KI // BC, BC \subset (ABCD) \Rightarrow KI // (ABCD)$. (2)

Mặt khác: $HI \subset (HKI), KI \subset (HKI), HI \cap KI = I$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(HIK) // (ABCD)$.



c) d)

$$\forall \begin{cases} M \in AI, AI \subset (SAB) \\ M \in DK, DK \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAB) \cap (SCD) \\ \Rightarrow SM = (SAB) \cap (SCD).$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = SM \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \Rightarrow SM // AB // CD \Rightarrow SM // HI (1) \\ AB // CD \end{cases}$$

$$\forall \begin{cases} N \in DH, DH \subset (SAD) \\ N \in CI, CI \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N \in (SAD) \cap (SBC) \\ \Rightarrow SN = (SAD) \cap (SBC).$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = SN \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \Rightarrow SN // AD // BC \Rightarrow SN // KI (2) \\ AD // BC \end{cases}$$

Mặt khác ba điểm S, M, N không thẳng hàng. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $(SMN) // (HIK)$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

a) $MN // (SBC)$

b) $(OMN) // (SBC)$.

c) Gọi E là trung điểm đoạn AB và F là một điểm thuộc đoạn ON . Khi đó EF cắt với mặt phẳng (SBC) .

d) Gọi G là một điểm trên mặt phẳng $(ABCD)$ cách đều AB và CD . Khi đó GN cắt (SAB)

Lời giải

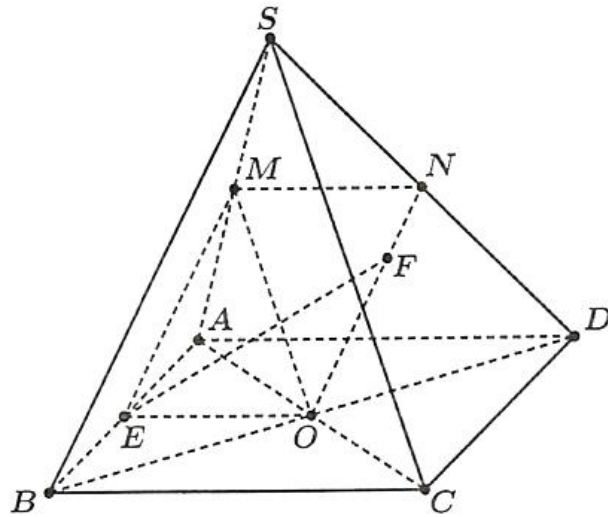
a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) b) Vì MN là đường trung bình của tam giác SAD

nên $MN // AD \Rightarrow MN // BC \Rightarrow MN // (SBC)$. (1)

Tương tự, ta có O, N theo thứ tự là trung điểm của BD, SD nên ON là đường trung bình của tam giác $SBD \Rightarrow ON // SB \Rightarrow ON // (SBC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN) // (SBC)$.

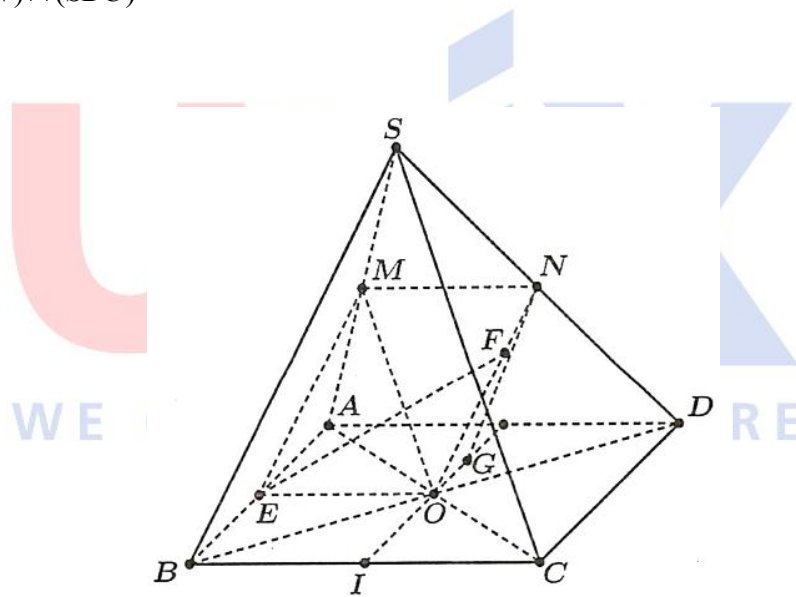


c) Ta có OE là đường trung bình của tam giác ABD nên $OE \parallel AD \Rightarrow OE \parallel MN$.

Do đó $E \in (OMN)$. Mặt khác $F \in ON, ON \subset (OMN) \Rightarrow F \in (OMN)$.

Ta có: $\begin{cases} EF \subset (OMN) \\ (OMN) \parallel (SBC) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel (SBC).$

d)



Vì G thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ và cách đều AB, CD nên G thuộc đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ (ứng với hai cạnh AB, CD).

Gọi I là trung điểm BC thì I, O, G thẳng hàng.

Ta có OI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $OI \parallel AB \Rightarrow OI \parallel (SAB)$. (3)

Tương tự, ta có $ON \parallel SB \Rightarrow ON \parallel (SAB)$. (4)

Từ (3), (4) suy ra $(OIN) \parallel (SAB)$ mà $NG \subset (OIN)$ nên $NG \parallel (SAB)$.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD, B'D'C$.

a) $A'D'CB$ là hình bình hành

b) $(A'BD) \parallel (B'D'C)$



c) G_1, G_2 cùng thuộc AC'

d) $G_1 G_2 = \frac{2}{3} AC'$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) b)

Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\begin{cases} A'D' // BC \\ A'D' = BC \end{cases} \Rightarrow A'D'CB$ là hình bình hành.

Suy ra $A'B // CD' \Rightarrow A'B // (B'D'C)$. (1)

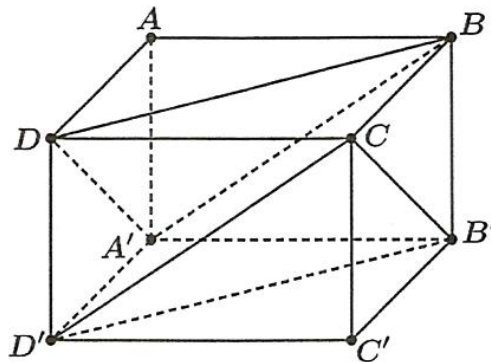
Tương tự, ta có: $\begin{cases} A'B' // CD \\ A'B' = CD \end{cases} \Rightarrow A'B'CD$ là hình bình hành.

Suy ra $A'D // B'C \Rightarrow A'D // (B'D'C)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(A'BD) // (B'D'C)$.

c) d)

Gọi O, O', I theo thứ tự là tâm của các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', ACC'A'$.

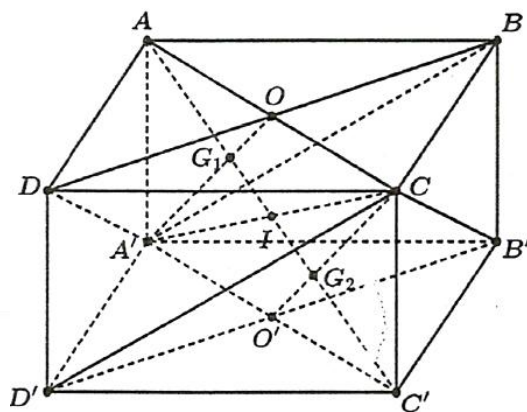


Vì G_1 là trọng tâm tam giác $AB'D$ nên $\frac{AG_1}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1$ là trọng tâm tam giác $A'AC$, suy ra $G_1 = AI \cap A'O$. (3)

Tương tự, G_2 là trọng tâm tam giác $B'D'C$ nên $\frac{CG_2}{CO} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow G_2$ là trọng tâm tam giác $A'C'C$, suy ra $G_2 = C'I \cap CO'$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra G_1, G_2 cùng thuộc AC' .



Chứng minh $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' = \frac{1}{3}AC'$:

Ta có: $\frac{AG_1}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG_1}{AC'} = \frac{1}{3}$; $\frac{C'G_2}{C'I} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C'G_2}{AC'} = \frac{1}{3}$.

Do vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' = \frac{1}{3}AC'$.

Vậy G_1, G_2 cùng thuộc AC' , đồng thời chia AC' thành ba phần bằng nhau.

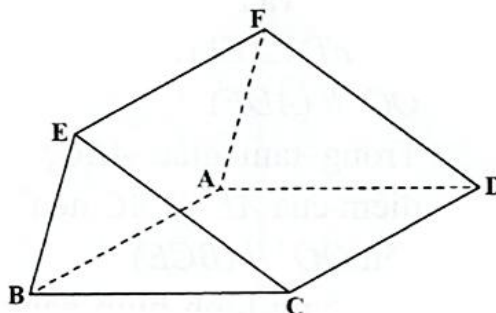
Câu 20: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là trọng tâm $\triangle ABE$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF) . Lấy N là giao điểm của (P) và AC .

- a) $EFDC$ là hình thang
- b) $FD \parallel EC$
- c) $(ADF) \parallel (BCE)$.

d) $\frac{AN}{NC} = 3$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------



a) b) c) Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Chứng minh rằng: $(ADF) \parallel (BCE)$.

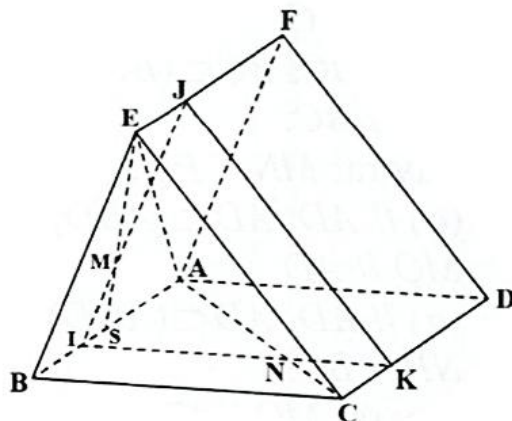
Ta có $\begin{cases} EF \parallel CD (\parallel AB) \\ EF = CD (= AB) \end{cases} \Rightarrow EFDC \text{ là hình bình hành.}$



$$\Rightarrow FD // EC.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD // BC; AF // BE \\ AD, AF \subset (ADF); AD \cap AF = A \Rightarrow (ADF) // (BCE) \\ BC, BE \subset (BEC); BC \cap BE = B \end{cases}$$

d) Tính $\frac{AN}{NC}$.



Vẽ mp (P) chứa M và $(P) // (ADF)$ cắt AB, AC, CD, EF lần lượt tại I, N, K, J .

$$\text{Ta có: } \frac{AI}{BI} = \frac{AN}{NC} (IN // BC)$$

$$\text{Ta có: } \frac{EJ}{IS} = \frac{ME}{MS} = 2 (IS // JE)$$

$BI = EJ$ (tứ giác BIJE là hình bình hành)

$$\Rightarrow \frac{BI}{IS} = 2 \Rightarrow \frac{BI}{2} = \frac{IS}{1} = \frac{BI + IS}{2 + 1} = \frac{BS}{3}$$

$$\Rightarrow BI = \frac{2}{3}BS; IS = \frac{1}{3}BS$$

$$\text{Ta có: } AI = AS + IS = BS + \frac{1}{3}BS = \frac{4}{3}BS \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{\frac{4}{3}BS}{\frac{2}{3}BS} = 2 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = 2$$

Câu 21: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

a) $(BDA') // (B'D'C')$.

b) Đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.

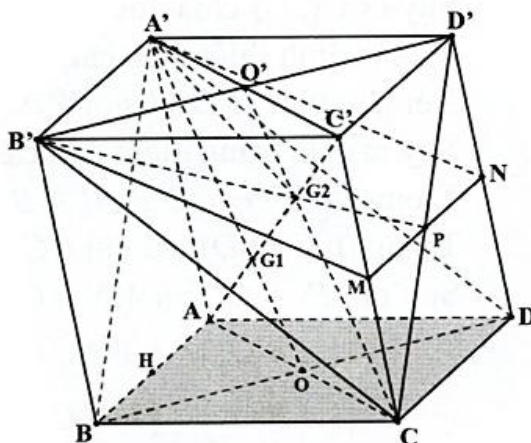
c) $AG_1 = 2G_1G_2$

d) Mặt phẳng $(A'B'G_2)$ cắt hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ tạo thành một tứ giác là hình bình hành



Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Chứng minh: $(BDA') // (B'D'C)$.

Ta có $BA'D'C$ là hình bình hành nên $BA' // D'C$.

Ta có $BB'D'D$ là hình bình hành nên $B'D' // BD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BA' // D'C \\ BD // B'D' \\ BA', BD \subset (BDA'); BA' \cap BD = B \\ B'D', D'C \subset (B'D'C); B'D' \cap D'C = D' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (BDA') // (B'D'C).$$

b) Chứng minh đường chéo AC' qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC; AC \subset (ACC'A') \\ O \in BD; BD \subset (BDA') \end{cases} \Rightarrow O \in (ACC'A') \cap (BDA').$$

Mà $A' \in (ACC'A') \cap (BDA')$ nên $A'O = (ACC'A') \cap (BDA')$

Trong $(ACC'A')$, gọi $E = A'O \cap AC'$.

$$\text{Ta có } \frac{A'E}{EO} = \frac{A'C'}{AO} = 2 \text{ (Thales)}$$

Suy ra E trùng với trọng tâm G_1 của tam giác BDA' . (1)

Trong $(A'B'C'D')$, gọi $O' = A'C' \cap B'D'$.



$$\Rightarrow \begin{cases} O' \in A'C'; A'C' \subset (ACC'A') \\ O' \in B'D'; B'D' \subset (B'D'C) \end{cases} \Rightarrow O' \in (ACC'A') \cap (B'D'C).$$

Mà $C \in (ACC'A') \cap (B'D'C)$ nên $CO = (ACC'A') \cap (B'D'C)$.

Trong $(ACC'A')$, gọi $F = CO \cap AC'$.

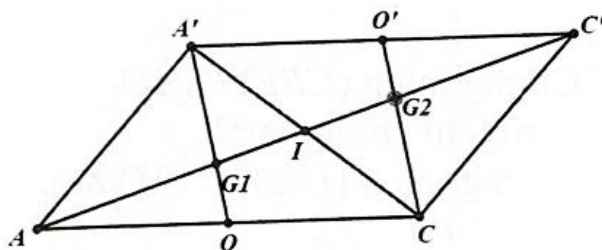
$$\text{Ta có } \frac{CF}{FO'} = \frac{AC}{C'O'} = 2 \text{ (Thales)}$$

Suy ra F trùng với trọng tâm G_2 của tam giác $B'D'C$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AC' qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) Chứng minh G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Trong $(AA'C'C)$, gọi $I = A'C \cap AC'$.



$$\text{Ta có } G_1 \text{ là trọng tâm của tam giác } A'AC \text{ nên } AG_1 = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{3} AC'.$$

$$\text{Ta có } G_2 \text{ là trọng tâm của tam giác } A'CC' \text{ nên } AG_2 = \frac{2}{3} C'I = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC' = \frac{1}{3} AC'.$$

$$\text{Ta có } G_1G_2 = AC' - AG_1 - C'G_2 = AC' - \frac{1}{3} AC' - \frac{1}{3} AC' = \frac{1}{3} AC'.$$

$$\text{Từ đó ta có } AG_1 = G_1G_2 = G_2C' \left(= \frac{1}{3} AC' \right).$$

Suy ra G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Xét tam giác $B'D'C$, gọi $P = B'G_2 \cap CD'$.

Suy ra P là trung điểm của CD' .

Trong $(A'B'G_2)$, vẽ $Px // A'B'$.

Trong $(CC'D'D)$, Px cắt CC', DD' lần lượt tại M và N .



Suy ra $MN // CD$ và $MN = CD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (A'B'G_2) \cap (A'B'C'D') = A'B' \\ (A'B'G_2) \cap (B'C'CB) = B'M \\ (A'B'G_2) \cap (CC'D'D) = MN \\ (A'B'G_2) \cap (AA'D'D) = NA' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ thiết diện của $(A'B'G_2)$ và hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là tứ giác $A'B'MN$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN // A'B' \\ MN = A'B' (= CD) \end{cases} \Rightarrow \text{thiết diện } A'B'MN \text{ là hình bình hành.}$$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

a) ON chéo nhau với SB

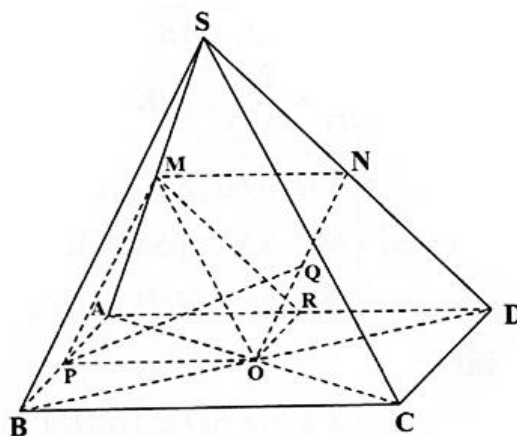
b) $(OMN) // (SBC)$.

c) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON . Khi đó PQ cắt (SBC)

d) Gọi R là trung điểm AD . Khi đó $(MOR) // (SCD)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------



a) b) Ta có $OM // SC$ (đường trung bình tam giác SAC). Ta có $ON // SB$ (đường trung bình tam giác SBD).

$$\text{Ta có } \begin{cases} ON // SB; OM // SC \\ OM, ON \subset (OMN), OM \cap ON = O \\ SB, SC \subset (SBC), SB \cap SC = S \end{cases}$$

$\Rightarrow (OMN) // (SBC)$

c) Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và ON . Chứng minh: $PQ // (SBC)$



$$\text{Ta có } \begin{cases} OP // AB \\ AB // MN \end{cases}$$

$\Rightarrow OP // MN \Rightarrow OMPN$ là hình thang $\Rightarrow P \in (OMN)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} NP \subset (OMN) \\ (OMN) // (SBC) \end{cases} \Rightarrow NP // (SBC)$$

d) Gọi R là trung điểm AD . Chứng minh: $(MOR) // (SCD)$.

Ta có $OR // CD$ (đường trung bình của tam giác ACD)

$$\text{Ta có } \begin{cases} OM // SC (\text{cmt}) \\ OR // CD (\text{cmt}) \\ OM, OR \subset (MOR), OM \cap OR = O \\ SC, SD \subset (SCD), SC \cap SD = S \end{cases} \Rightarrow (MOR) // (SCD)$$

Câu 23: Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

a) $II' // BB'$

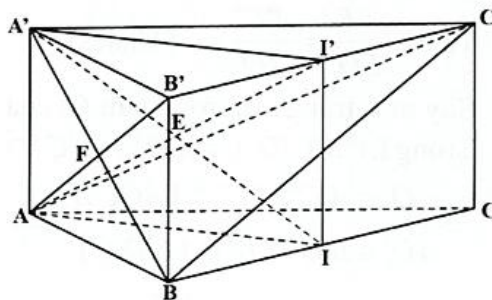
b) $AA'I'I$ là hình bình hành

c) IA' song song $(AB'C')$.

d) Giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$ là đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng $AI', A'I$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) b) Ta có I', I là trung điểm của $B'C'$ và BC .

Suy ra II' là đường trung bình của hình bình hành $BB'C'C$.

Suy ra $II' = BB'$ và $II' // BB'$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} II' // AA' (// BB') \\ II' = AA' (= BB') \end{cases}$$

$\Rightarrow AA'I'I$ là hình bình hành. $\Rightarrow AI // A'I'$.



c) Trong $(IAA'I')$, gọi $E = AI' \cap A'I$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} E \in AI'; AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I \end{cases} \Rightarrow \text{Suy ra } E = A'I \cap (AB'C').$$

d) Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$.

Trong $(AA'B'B)$, gọi $F = AB' \cap A'B$.

$$\Rightarrow \begin{cases} F \in AB'; AB' \subset (AB'C') \\ F \in A'B; A'B \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow F \in (AB'C') \cap (A'BC') \quad (1)$$

Ta có $E = AI' \cap A'I$.

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in AI'; AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I; A'I \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow E \in (AB'C') \cap (A'BC') \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EF = (AB'C') \cap (A'BC')$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

a) Điểm M là giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (ICD)

b) Ta có $SN = \frac{2}{3}SB$

c) Cho $AB = a$ thì $MN = \frac{a}{2}$

d) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Khi đó SK và BC chéo nhau

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

- Xác định M, N :

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ CI cắt SA tại M ;

Trong mặt phẳng (SBD) , kẻ DI cắt SB tại N .

$$\text{Vì } \begin{cases} M \in CI, CI \subset (ICD) \\ M \in SA \end{cases} \Rightarrow M = SA \cap (ICD).$$

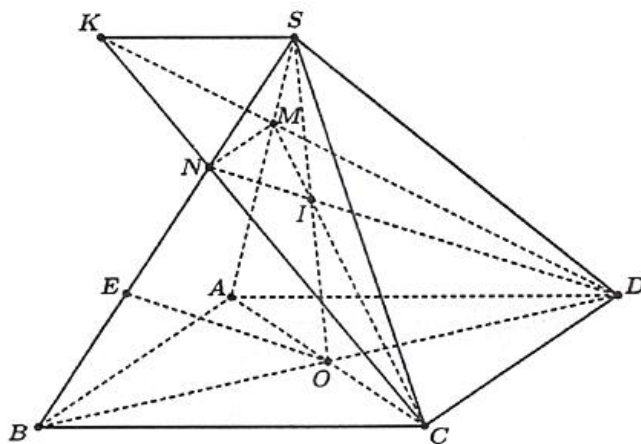
$$\text{Tương tự: } \begin{cases} N \in DI, DI \subset (ICD) \\ N \in SB \end{cases} \Rightarrow N = SB \cap (ICD).$$

-Tính MN theo a :



Gọi E là trung điểm BN , OE là đường trung bình của tam giác $BDN \Rightarrow OE // DN$.

Trong tam giác SOE , ta có NI qua trung điểm I của SO và $NI // OE$, N là trung điểm của SE .



-Vậy $SN = NE = EB$ hay $SN = \frac{1}{3}SB$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $SM = \frac{1}{3}SA$.

Khi đó hai tam giác SMN, SAB đồng dạng vì có góc S chung và $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$.

Xét tam giác SAB , theo định lý Thalès, ta có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}.$$

- Chứng minh $SK // BC // AD$:

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Ta có: $\begin{cases} K \in CN, CN \subset (SBC) \\ K \in DM, DM \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SBC) \cap (SAD).$

Vì vậy $SK = (SBC) \cap (SAD)$.

Khi đó: $\begin{cases} SK = (SBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow SK // BC // AD.$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD . K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD .

- Giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) là điểm thuộc đường thẳng KE
- Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N . Tứ giác $EFNM$ là hình bình hành
- Các đường thẳng AM, DN, SK cùng đi qua một điểm



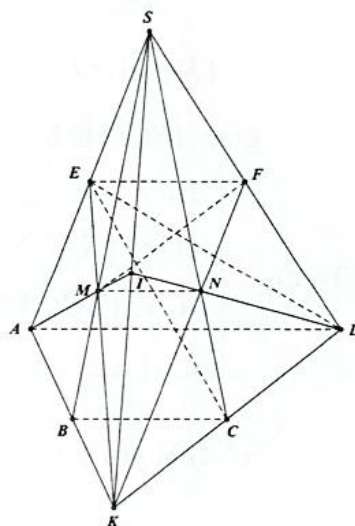
d) Cho biết $AD = 2BC$. Tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF bằng $\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{2}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Có $SK = (SAB) \cap (SCD)$.

Trong mp (SAB), gọi $M = KE \cap SB$, có $KE \subset (CDE)$. Do đó $SB \cap (CDE) = M$.



b) Trong mp (SCD), gọi $N = KF \cap SC$, có $KF \subset (EFM)$.

Do đó $SC \cap (EFM) = N$.

$$\text{Có} \Rightarrow \begin{cases} MN = (EFK) \cap (SBC) \\ EF \parallel BC; EF \subset (EFK), BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow MN \parallel EF \parallel BC.$$

Suy ra tứ giác $EFNM$ là hình thang.

c) Trong mp (ADNM), gọi $I = AM \cap DN$.

$$\text{Mà} \begin{cases} I \in AM, AM \subset (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD),$$

Hay $I \in SK$. Kết luận 3 đường thẳng AM, DN, SK đồng quy tại điểm I .

d) Khi $AD = 2BC$ dễ dàng chứng minh được B, C lần lượt là trung điểm của KA và KD . Suy ra M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAK và SDK .

Do đó $MN = \frac{2}{3}EF$, gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh K xuống hai đáy

$$MN \text{ và } EF, \text{ dễ thấy } h_1 = \frac{2}{3}h_2.$$



$$\text{Vậy } \frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{\frac{1}{2}MN \cdot h_1}{\frac{1}{2}EF \cdot h_2} = \frac{\frac{2}{3}EF \cdot \frac{2}{3}h_2}{EF \cdot h_2} = \frac{4}{9}.$$

