



CHƯƠNG

IV

# QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

## BÀI: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

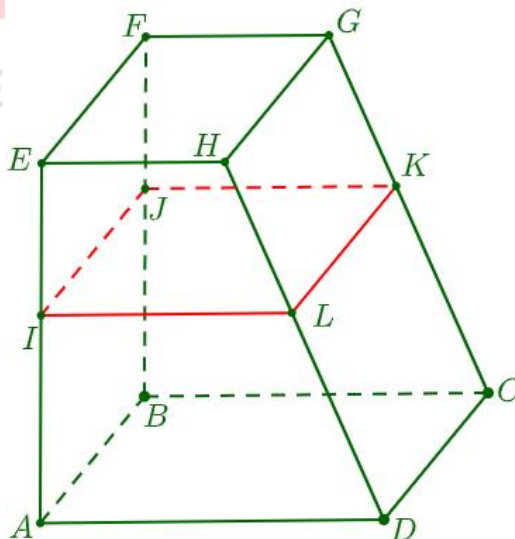
**Câu 1:** Trên các cạnh bên  $AA', BB', CC', DD'$  của hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P, Q$ . Biết  $AM = 5, BN = 10, CP = 22$  và 4 điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng. Độ dài  $DQ$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Trả lời: 17**

Ta có  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp nên 4 điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng khi và chỉ khi  
 $AM + CP = BN + DQ \Leftrightarrow DQ = AM + CP - BN \Leftrightarrow DQ = 17$ .

**Câu 2:** Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới ( $ABCD$ ) và mâm tầng trên ( $EFGH$ ) song song với nhau. Bác thợ mộc đo được  $AE = 70$  cm,  $CG = 80$  cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa ( $IJKL$ ) song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách  $EI = 35$  cm. Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài  $GK$  để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí.

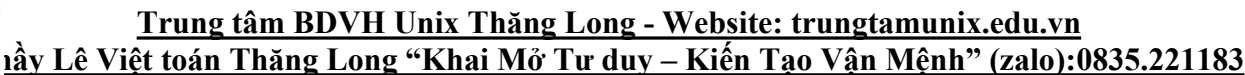


**Lời giải**

**Trả lời: 40**

Ta có đường thẳng  $EA$  cắt ba mặt phẳng song song  $(EFGH), (IJKL), (ABCD)$  lần lượt tại  $E, I, A$ ; Đường thẳng  $GC$  cũng cắt ba mặt phẳng trên lần lượt tại  $G, K, C$ .

Áp dụng định lý Thales trong không gian, ta có:



Suy ra

$$GK = \frac{8}{7}EI = \frac{8}{7} \cdot 35 = 40 \text{ (cm)}.$$

Vậy độ dài  $GK = 40$  cm.

**Câu 3:** Bác An mua một tủ dép hình hộp chữ nhật như hình vẽ để tự lắp ráp. Đến tầng trên cùng thì vị trí chốt chặn bản lề  $B_1$  chưa được đánh dấu trên tấm gỗ. Dựa vào các kích thước sẵn có  $AH = 120$  ;  $AC = 30$  ;  $A_1H_1 = 120$  ;  $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{1}{3}$  , để mặt phẳng  $(CFC_1)$  song song với mặt phẳng  $(EGE_1)$  và hai mặt đáy. Bác An đã xác định được khoảng cách từ điểm  $A_1$  tới  $B_1$  là



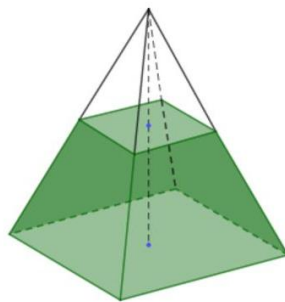
**Trả lời: 10**

Cát tuyến AH cắt ba mặt phẳng song song ( $CFC_1$ ) và 2 đáy tại 3 điểm  $C, A, H$ ; Cát tuyến GC cũng cắt ba mặt phẳng trên theo thứ tự tại  $C_1, A_1, H_1$

Áp dụng định lí Thales trong không gian:  $\frac{AC}{AH} = \frac{A_1C_1}{A_1H_1} \Rightarrow A_1C_1 = 30$

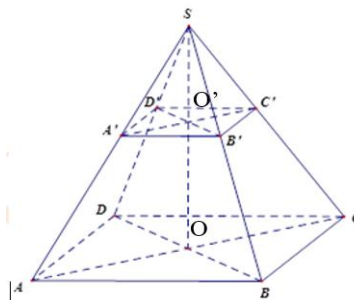
Theo đề :  $\frac{A_1 B_1}{A_1 C_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow A_1 B_1 = 10$

**Câu 4:** Một khối gỗ có dạng hình chóp có đáy là hình vuông và tất cả các cạnh bằng 0,5 m. Một người muốn thiết kế thành đồ trang trí bằng cách chia đi phần đỉnh của khối gỗ này và gắn dây đèn trang trí theo cách cạnh của khối hình mới (tham khảo hình bên dưới). Biết rằng lưỡi cưa đi qua 3 trung điểm của ba cạnh bên của khối gỗ. Chiều dài của dây đèn trang trí là bao nhiêu m (làm tròn đến hàng đơn vị).



### Lời giải

**Trả lời: 4**



Hình chóp  $S.ABCD$  mô tả khối gỗ.

Cửa đi phần đỉnh của khối gỗ, lưỡi cửa đi qua các trung điểm của ba cạnh bên của khối gỗ nghĩa là cắt hình chóp bởi một mặt phẳng đi qua các điểm  $A', B', C'$  với

$A', B', C'$  là trung điểm của  $SA, SB, SC$ .

Trong mp( $ABCD$ ): gọi  $O$  là giao điểm của  $AC, BD$ .

Trong mp( $SAC$ ): gọi  $O'$  là giao điểm của  $A'C', SO$ .

Trong ( $SBD$ ): gọi  $D'$  là giao điểm của  $B'O', SD$ . Ta thấy  $D'$  là trung điểm của  $SD$ .

Ta có ( $SAC$ ) cắt các mặt của hình chóp theo các giao tuyến là  $A'B', B'C', C'D', D'A'$ .

Dây đèn trang trí được gắn vào cách cạnh  $AB, BC, CD, DA, A'B', B'C', C'D', D'A', AA', BB', CC', DD'$  nên tổng chiều dài sợi dây bằng  $l = AB + BC + CD + DA + A'B' + B'C' + C'D' + D'A' + AA' + BB' + CC' + DD'$ .

Do  $A', B'$  là trung điểm của  $SA, SB$  nên  $A'B' = \frac{1}{2} AB = 0,25m$ .

Tương tự  $B'C' = C'D' = D'A' = 0,25m$ .

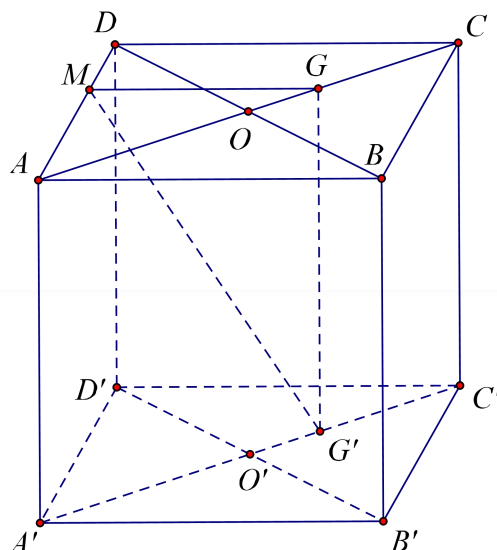
Do  $A', B', C', D'$  là trung điểm của  $SA, SB, SC, SD$  nên  $AA' = BB' = CC' = DD' = 0,25m$ .

Vậy  $l = 0,54 + 0,25.8 = 4m$ .

**Câu 5:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài cạnh là  $a$ . Lấy  $G, G'$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $BCD$  và tam giác  $B'C'D'$ . Điểm  $M \in AD$  ( $M$  không trùng với  $A, D$ ) sao cho  $\frac{MD}{AM} = x$ . Để mặt phẳng  $(GG'M)$  song song với mặt phẳng  $(DCC'D')$  thì  $x$  bằng

### Lời giải

**Trả lời: 0,5**



Gọi  $O; O'$  lần lượt là giao điểm 2 đường chéo của 2 mặt đáy hình lập phương như hình vẽ.

Theo tính chất trọng tâm của tam giác thì  $\frac{CG}{CO} = \frac{C'G'}{C'O'} = \frac{2}{3} \Rightarrow GG' \parallel CC'$  (định lý Thales đảo) (1)

$O$  là trung điểm  $AC$  nên  $\frac{CG}{AG} = \frac{1}{2}$

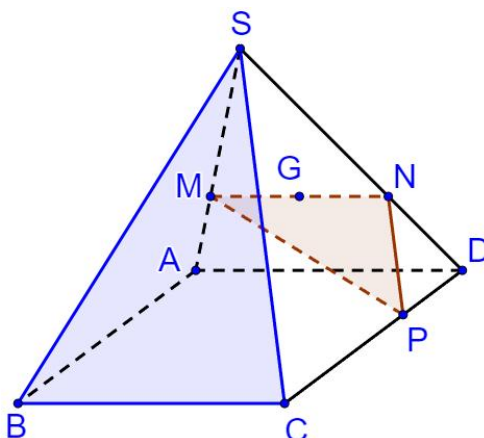
Từ (1) để mặt phẳng  $(GG'M)$  song song với mặt phẳng  $(DCC'D')$  thì  $\Rightarrow MG \parallel CD$ .

Khi đó  $\frac{MD}{AM} = \frac{CG}{AG} = \frac{1}{2} = x$  (theo định lý Thales). Vậy  $x = 0,5$

**Câu 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAD$ . Đường thẳng  $d$  qua  $G$  và song song với  $AD$  cắt  $SA, SD$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .  $P$  là một điểm nằm trên  $CD$ . Để  $(MNP) \parallel (SBC)$  thì tỉ số  $\frac{CP}{DP}$  bằng

**Lời giải**

**Trả lời: 2**



Ta có  $MN \parallel AD \parallel BC$ . Suy ra để  $(MNP) \parallel (SBC)$  thì  $NP \parallel SC$

$$\Leftrightarrow \frac{CP}{DP} = \frac{SN}{DN} = 2$$

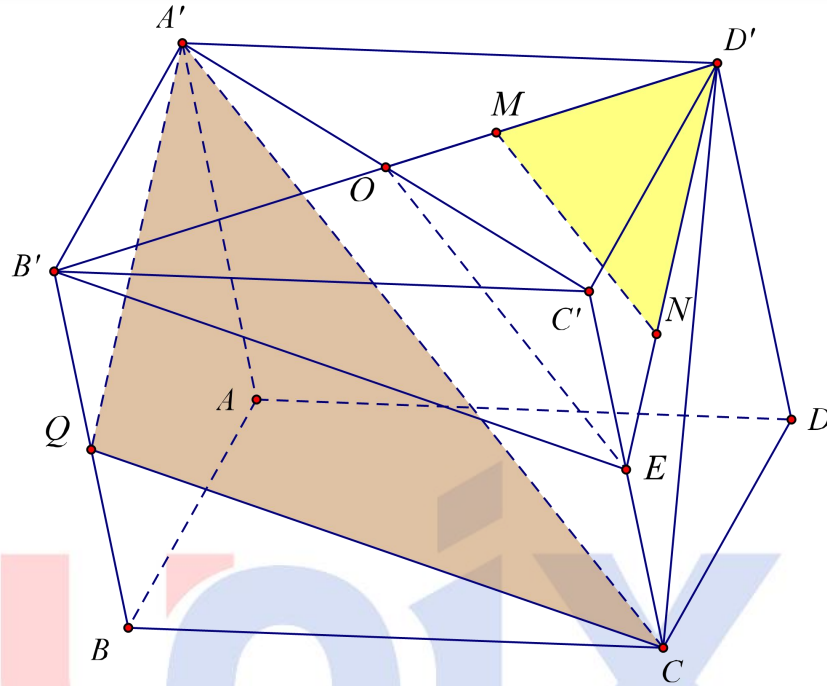
Vậy  $\frac{CP}{DP} = 2$ .



**Câu 7:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $M, N$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $A'C'D'$  và tam giác  $CC'D'$ . Lấy điểm  $Q$  thuộc cạnh  $BB'$  theo tỉ lệ  $\frac{BQ}{BB'} = \frac{x}{y}$  (với  $\frac{x}{y}$  là phân số tối giản) sao cho hai mặt phẳng  $(D'MN) \parallel (A'CQ)$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $T = 2x + y$  bằng:

**Lời giải**

**Trả lời: 4**



Gọi  $O$  là giao điểm 2 đường chéo  $A'C'$  và  $B'D'$ ;  $E$  là trung điểm  $CC'$ . Khi đó mặt phẳng  $(D'MN)$  trở thành mặt phẳng  $(D'B'E)$

$MN \parallel OE$  theo định lý Thales;

$OE \parallel A'C$  theo tính chất đường trung bình trong tam giác  $(A'C'C)$ . Từ đó suy ra  $MN \parallel A'C$

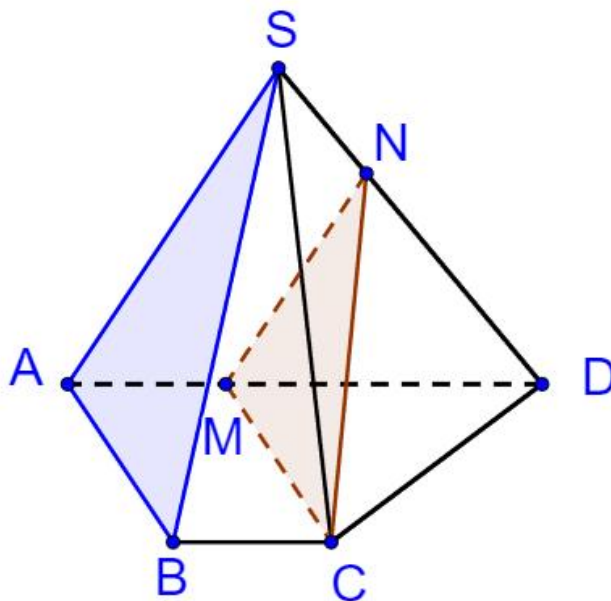
$\begin{cases} A'C \not\subset (D'MN) \\ A'C \parallel MN \end{cases} \Rightarrow A'C \parallel (D'MN)$ . Để  $(D'MN) \parallel (A'CQ)$  thì  $CQ \parallel B'E$ . Vì  $BB'C'C$  là hình

hình hành nên  $Q$  là trung điểm  $BB'$  suy ra  $\frac{BQ}{BB'} = \frac{1}{2} = \frac{x}{y}$ . Vậy  $T = 2x + y = 4$

**Câu 8:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang,  $AD \parallel BC$ ,  $AD = xBC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là 2 điểm nằm trên  $AD, SD$  thỏa mãn  $\frac{AM}{AD} = \frac{SN}{SD} = y$ . Để  $(CMN) \parallel (SAB)$  thì khi đó giá trị  $x.y$  bằng

**Lời giải**

**Trả lời: 1**



Ta có:  $\frac{AM}{AD} = \frac{SN}{SD} = y \Rightarrow MN \parallel SA$ . Để  $(CMN) \parallel (SAB)$  thì  $MC \parallel AB$

$\Leftrightarrow ABCM$  là hình bình hành

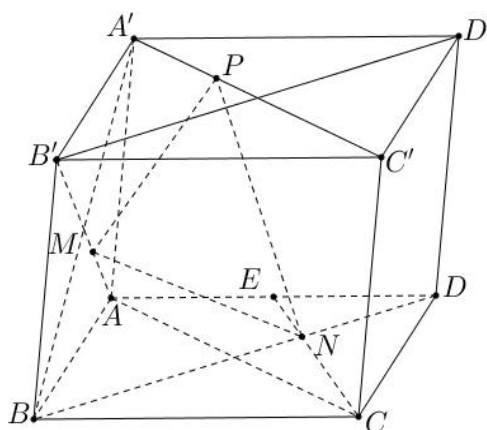
$$\Leftrightarrow AM = BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x.y = 1$$

Vậy  $x.y = 1$ .

**Câu 9:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ ,  $ABCD$  là hình thoi,  $\widehat{BAD} = 120^\circ$ . Gọi  $M$  là trọng tâm tam giác  $A'AB$ . Điểm  $N, P$  lần lượt nằm trên  $BD, A'C'$ . Khi  $(MNP) \parallel (BB'C'C)$  thì tỉ số  $\frac{BN}{A'P}$  (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng

**Lời giải**

**Trả lời: 3,46**



Ta có:  $(MNP) \parallel (BB'C'C) \Rightarrow (AA'D'D) \parallel (MNP) \parallel (BB'C'C)$ .

Theo hệ quả của định lý Ta-lét trong không gian ta có  $(AA'D'D); (MNP); (BB'C'C)$  cắt hai đường thẳng  $AB'$  và  $DB$  theo hai những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Nghĩa là:  $\frac{AM}{MB'} = \frac{ND}{NB}$ , mà  $M$  là trọng tâm tam giác  $A'AB$  suy ra

$$\frac{ND}{NB} = \frac{AM}{MB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow NB = \frac{2}{3}BD.$$



Mà  $ABCD$  là hình thoi,  $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow BD = AB\sqrt{3} \Rightarrow NB = \frac{2AB\sqrt{3}}{3}$  (1).

Lại có ba mặt phẳng  $(AA'D'D)$ ;  $(MNP)$ ;  $(BB'C'C)$  cắt hai đường thẳng  $AB'$  và  $A'C'$  theo hai những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Nghĩa là:  $\frac{AM}{MB'} = \frac{A'P}{PC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'P = \frac{1}{3} A'C'$ .

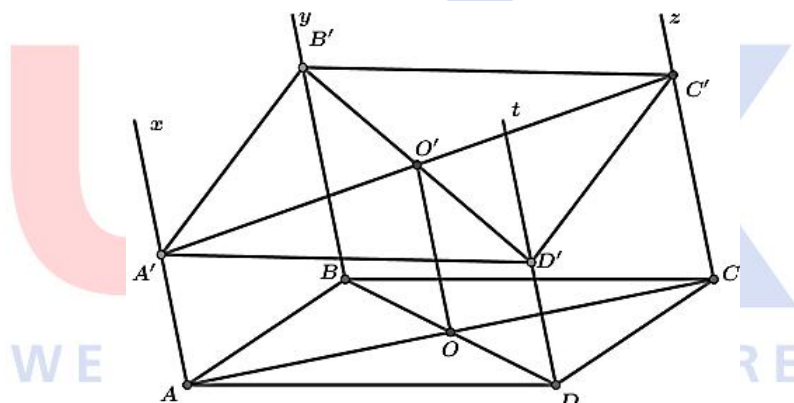
Mà  $ABCD$  là hình thoi,  $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow A'C' = AC = AB \Rightarrow A'P = \frac{AB}{3}$  (2).

(1), (2)  $\Rightarrow \frac{BN}{A'P} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$ .

**Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Qua  $A, B, C, D$  lần lượt vẽ các nửa đường thẳng  $Ax, By, Cz, Dt$  ở cùng phía so với mặt phẳng  $(ABCD)$ , song song với nhau và không nằm trong  $(ABCD)$ . Một mặt phẳng  $(P)$  cắt  $Ax, By, Cz, Dt$  tương ứng tại  $A', B', C', D'$  sao cho  $AA' = 3, BB' = 5, CC' = 4$ . Tính  $DD'$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 2**



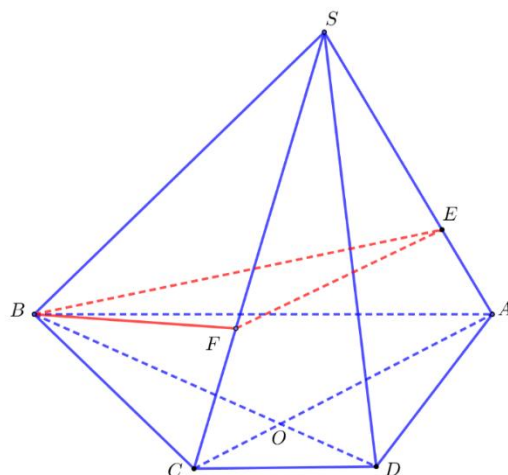
Do  $(P)$  cắt mặt phẳng  $(Ax, By)$  theo giao tuyến  $A'B'$ ; cắt mặt phẳng  $(Cz, Dt)$  theo giao tuyến  $C'D'$ , mà hai mặt phẳng  $(Ax, By)$  và  $(Cz, Dt)$  song song nên  $A'B' \parallel C'D'$ .

Tương tự có  $A'D' \parallel B'C'$  nên  $A'B'C'D'$  là hình bình hành.

Gọi  $O, O'$  lần lượt là tâm  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ . Dễ dàng có  $OO'$  là đường trung bình của hai hình thang  $AA'C'C$  và  $BB'D'D$  nên  $OO' = \frac{AA' + CC'}{2} = \frac{BB' + DD'}{2}$ .

Từ đó ta có  $DD' = 2$ .

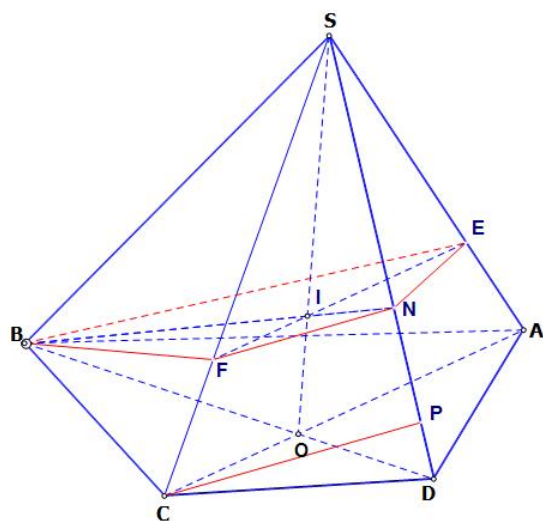
**Câu 11:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang,  $AB \parallel CD$  và  $AB = 2CD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Lấy  $E$  thuộc cạnh  $SA$ ,  $F$  thuộc cạnh  $SC$  sao cho  $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ .



Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $O$  và song song với mặt phẳng  $(BEF)$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $SD$  với  $(\alpha)$ . Tính tỉ số  $\frac{SP}{SD}$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 0,86**



Vì  $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$  nên đường thẳng  $EF \parallel AC$ . Mà  $EF \subset (BEF)$ ,  $AC \not\subset (BEF)$  nên  $AC$  song song với mặt phẳng  $(BEF)$ .

Vì  $AC$  qua  $O$  và song song với mặt phẳng  $(BEF)$  nên  $AC \subset (\alpha)$ .

Trong  $(SAC)$ , gọi  $I = SO \cap EF$ , trong  $(SBD)$ , gọi  $N = BI \cap SD$ . Suy ra  $N$  là giao điểm của đường thẳng  $SD$  với mặt phẳng  $(BEF)$ .

Hai mặt phẳng song song  $(BEF)$  và  $(\alpha)$  bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba là  $(SCD)$  theo hai giao tuyến lần lượt là  $FN$  và  $Ct$  nên hai giao tuyến đó song song nhau, tức là  $Ct \parallel FN$ .



Trong  $(SCD)$ ,  $Ct$  cắt  $SD$  tại  $P$ . Khi đó  $P$  là giao điểm của  $SD$  với  $(\alpha)$ .

Trong hình thang  $ABCD$ , do  $AB \parallel CD$  và  $AB = 2CD$  nên  $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD} = 2 \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}$ .

Trong tam giác  $SAC$ , có  $EF \parallel AC$  nên  $\frac{SE}{SA} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{IS}{IO} = 2$ .

Xét tam giác  $SOD$  với cát tuyến  $NIB$ , ta có:  $\frac{NS}{ND} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{NS}{ND} = \frac{BO}{BD} \cdot \frac{IS}{IO} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ .

Suy ra:  $\frac{SN}{SD} = \frac{4}{7}$ .

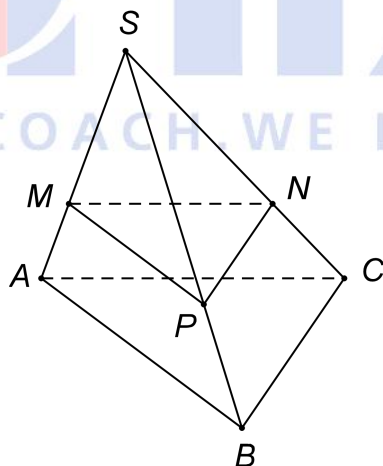
Lại có:  $\frac{SN}{SP} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ .

Từ và suy ra  $\frac{SP}{SD} = \frac{6}{7}$ .

**Câu 12:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $\widehat{BAC} = 30^\circ$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(ABC)$  cắt đoạn  $SA$  tại  $M$  sao cho  $SM = \frac{2}{3}SA$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABC$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Trả lời: 1,33**



Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 3$ .

Gọi  $N, P$  lần lượt là giao điểm của mặt phẳng  $(P)$  và các cạnh  $SC, SB$ .

Vì  $(P) \parallel (ABC)$  nên theo định lý Talet, ta có  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SC} = \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}$ .



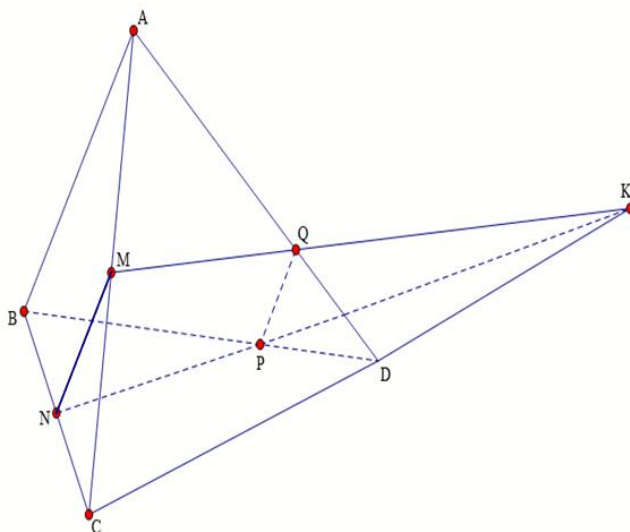
Khi đó  $(P)$  cắt hình chóp  $S.ABC$  theo thiết diện là tam giác  $MNP$  đồng dạng với tam giác

$$ABC \text{ theo tỉ số } k = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } S_{\Delta MNP} = k^2 \cdot S_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 = \frac{4}{3}.$$

**Câu 13:** Cho hình tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $CA, CB$ ;  $P$  là điểm trên cạnh  $BD$  sao cho  $BP = 2PD$ . Khi  $a = 12$ , tính diện tích của thiết diện tạo bởi tứ diện  $ABCD$  và mặt phẳng  $(MNP)$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 35,7**



Ta có  $AB \parallel MN$ ,  $AB \not\subset (MNP)$ ,  $MN \subset (MNP) \Rightarrow AB \parallel (MNP)$ .

Lại có  $AB \subset (ABD)$ , do đó  $(MNP) \cap (ABD) = PQ$  ( $Q \in AD$ ) và  $PQ \parallel AB \parallel MN$ .

$(MNP) \cap (ABC) = MN$ ,  $(MNP) \cap (BCD) = NP$ ,  $(MNP) \cap (ACD) = MQ$ .

Vậy thiết diện của tứ diện  $ABCD$  bị cắt bởi  $(MNP)$  là hình thang  $MNPQ$ .

Mặt khác các tam giác  $ACD, BCD$  đều và bằng nhau nên  $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$  là hình thang cân. Gọi  $K = MQ \cap NP$

$MN = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$ ;  $PQ = \frac{1}{3} AB = \frac{a}{3}$ . Ta có  $\frac{PQ}{MN} = \frac{2}{3}$ ,  $PQ \parallel MN \Rightarrow \frac{KP}{KN} = \frac{2}{3}$  và  $N$  là trung điểm của  $CB \Rightarrow P$  là trọng tâm tam giác  $BCK \Rightarrow D$  là trung điểm của  $CK \Rightarrow CK = 2a$ .

$$NP = \frac{1}{3} \sqrt{CK^2 + CN^2 - 2CK \cdot CN \cdot \cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

$$\text{Chiều cao của hình thang } MNPQ \text{ là } h = \sqrt{NP^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{51}}{12}.$$

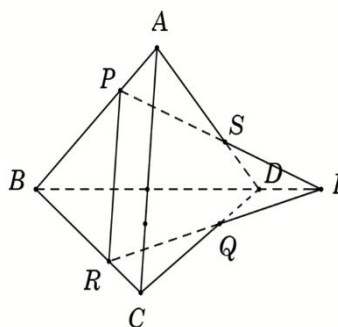
$$\text{Diện tích hình thang } MNPQ \text{ là: } S = \frac{MN + PQ}{2} h = \frac{5a^2\sqrt{51}}{144} = \frac{5 \cdot 12^2 \sqrt{51}}{144} \approx 35,7.$$

**Câu 14:** Cho tứ diện  $ABCD$  và ba điểm  $P, Q, R$  lần lượt trên ba cạnh  $AB, CD, BC$  sao cho  $PR \parallel AC$  và  $CQ = 3QD$ . Gọi giao điểm của  $AD$  và  $(PQR)$  là  $S$ . Khi đó,  $AD = k \cdot DS$ , hãy tìm  $k$ .



### Lời giải

Trả lời: 4



Gọi  $I$  là giao điểm của  $BD$  và  $RQ$ . Gọi  $S = IP \cap AD$ .

Ta có  $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QD} = 1$  và  $\frac{CQ}{QD} = 3$  suy ra  $\frac{DI}{IB} \cdot \frac{BR}{RC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{RC}{BR}$ .

Vì  $PR$  song song với  $AC$  suy ra  $\frac{RC}{BR} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AP}{PB}$ .

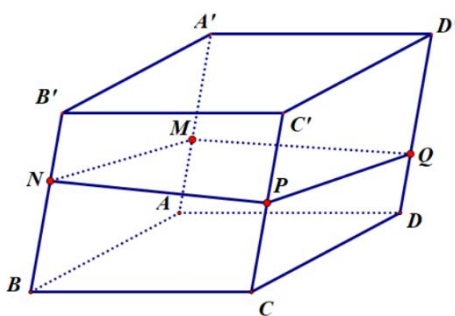
Lại có  $\frac{SA}{SD} \cdot \frac{DI}{IB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SD} = 3 \Rightarrow SA = 3SD$ .

Suy ra  $AD = 4DS$ .

**Câu 15:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ ; điểm  $M, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AA', CC'$ ; điểm  $N$  thuộc đoạn  $BB'$  sao cho  $\frac{B'N}{NB} = \frac{2}{3}$ ;  $mp(MNP) \cap DD' = \{Q\}$ . Tính  $\frac{DQ}{D'Q}$ .

### Lời giải

Trả lời: 0,67

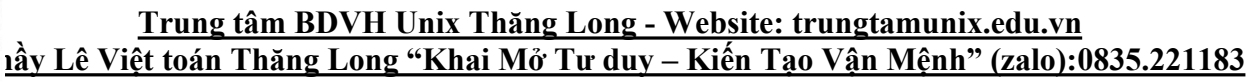


Đặt  $AA' = 10 \Rightarrow AM = 5, BN = 6, CP = 5$ ;

Do hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành, nên ta có

$$AM + CP = BN + DQ \Leftrightarrow 5 + 5 = 6 + DQ \Leftrightarrow DQ = 4 \Leftrightarrow \frac{DQ}{D'Q} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

**Câu 16:** Cho hình chóp  $SABCD$ . Biết tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$  và có  $AC = 3\sqrt{3}$ ;  $BD = 3$ . Tam giác  $SBD$  là tam giác đều. Mặt phẳng  $(\alpha)$  di động song song với  $SBD$  và đi qua điểm  $I$  thuộc đoạn  $OC$  sao cho  $AI = 2\sqrt{3}$ . Khi đó diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(\alpha)$  là:



Mà  $S_{SBD} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$  nên  $S_{SMN} = \sqrt{3}.$



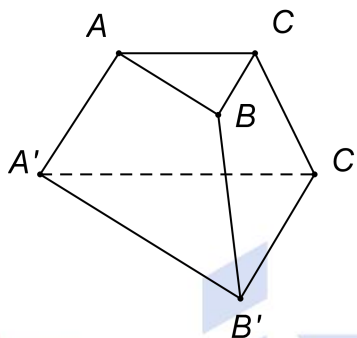
Để ý hai tam giác  $MNP$  và  $SIC$  đồng dạng với tỉ số  $\frac{AM}{AI} = \frac{2x}{a}$

$$\Rightarrow \frac{C_{MNP}}{C_{SIC}} = \frac{2x}{a} \Leftrightarrow C_{MNP} = \frac{2x}{a}(SI + IC + SC) = \frac{2x}{a}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + a\right) = 2x(\sqrt{3} + 1) = 2.14(\sqrt{3} + 1) \approx 76,5.$$

**Câu 18:** Cho hình chóp cắt tam giác  $ABC.A'B'C'$  có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại  $A$  và  $A'$  và có  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$ . Khi đó tỉ số diện tích  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$  bằng

**Lời giải**

**Trả lời: 0,25**

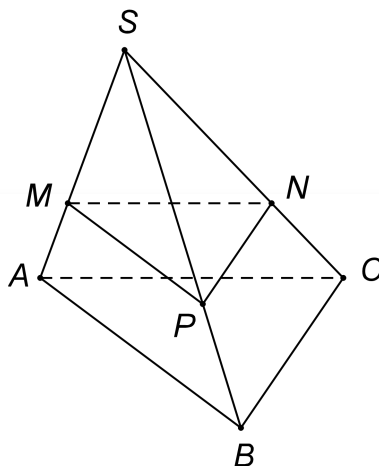


Hình chóp cắt  $ABC.A'B'C'$  có hai mặt đáy là hai mặt phẳng song song nên tam giác  $ABC$  đồng dạng tam giác  $A'B'C'$  suy ra  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{4}$ .

**Câu 19:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $AB = AC = 4$ ,  $\widehat{BAC} = 30^\circ$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(ABC)$  cắt đoạn  $SA$  tại  $M$  sao cho  $SM = 2MA$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABC$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Trả lời: 1,78**





Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 4$ .

Gọi  $N, P$  lần lượt là giao điểm của mặt phẳng  $(P)$  và các cạnh  $SB, SC$ .

Vì  $(P) \parallel (ABC)$  nên theo định lí Talet, ta có  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$ .

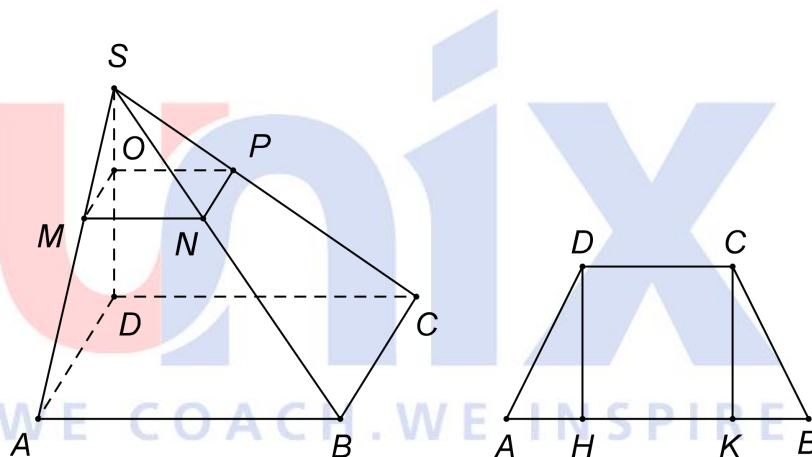
Khi đó  $(P)$  cắt hình chóp  $S.ABC$  theo thiết diện là tam giác  $MNP$  đồng dạng với tam giác

$ABC$  theo tỉ số  $k = \frac{2}{3}$ . Vậy  $S_{\triangle MNP} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{16}{9}$ .

**Câu 20:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cân với cạnh bên  $BC = 2$ , hai đáy  $AB = 6, CD = 4$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(ABCD)$  và cắt cạnh  $SA$  tại  $M$  sao cho  $SA = 3SM$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Trả lời: 0,96**



Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $D, C$  trên  $AB$

$ABCD$  là hình thang cân  $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK; CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1$ .

Tam giác  $BCK$  vuông tại  $K$ , có  $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ .

Suy ra diện tích hình thang  $ABCD$  là  $S_{ABCD} = CK \cdot \frac{AB + CD}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{4 + 6}{2} = 5\sqrt{3}$ .

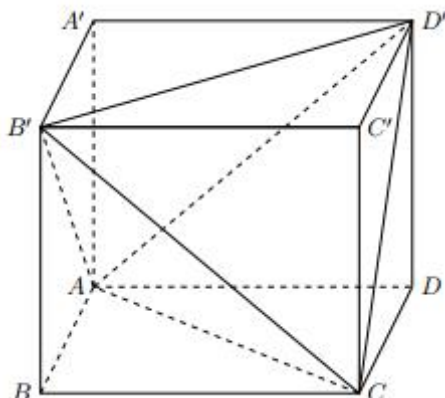
Gọi  $N, P, Q$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  và các cạnh  $SB, SC, SD$ .

Vì  $(P) \parallel (ABCD)$  nên theo định lí Talet, ta có  $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3}$ .

Khi đó  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện  $MNPQ$  có diện tích  $S_{MNPQ} = k^2 \cdot S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ .

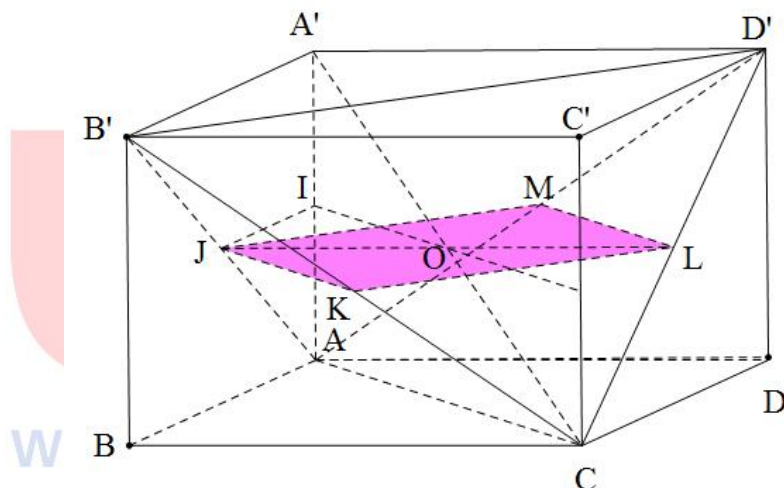


**Câu 21:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Xét tứ diện  $AB'CD'$ . Cắt tứ diện đó bằng mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mặt phẳng  $(ABC)$ . Tính diện tích của thiết diện thu được khi  $a = 6$



**Lời giải**

**Trả lời: 18**



Cách xác định mặt phẳng thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mặt phẳng  $(ABC)$  với tứ diện  $AB'CD'$ :

Trong  $(ACC'A')$  kẻ đường thẳng qua  $O$  và song song với  $AC$ , cắt  $AA'$  tại trung điểm  $I$

Trong  $(ABB'A')$  kẻ đường thẳng qua  $I$  song song với  $AB$ , cắt  $AB'$  tại trung điểm  $J$ .

Trong  $(B'AC)$  kẻ đường thẳng qua  $J$  song song với  $AC$ , cắt  $B'C$  tại trung điểm  $K$ .

Trong  $(B'CD')$  kẻ đường thẳng qua  $K$  song song với  $B'D'$ , cắt  $D'C$  tại trung điểm  $L$ .

Trong  $(D'AC)$  kẻ đường thẳng qua  $L$  song song với  $AC$ , cắt  $AD'$  tại trung điểm  $M$ .

Mặt phẳng vừa tạo thành song song với  $(ABC)$  và tạo với tứ diện  $AB'CD'$  thiết diện là hình bình hành  $MJKL$ .



Ta có

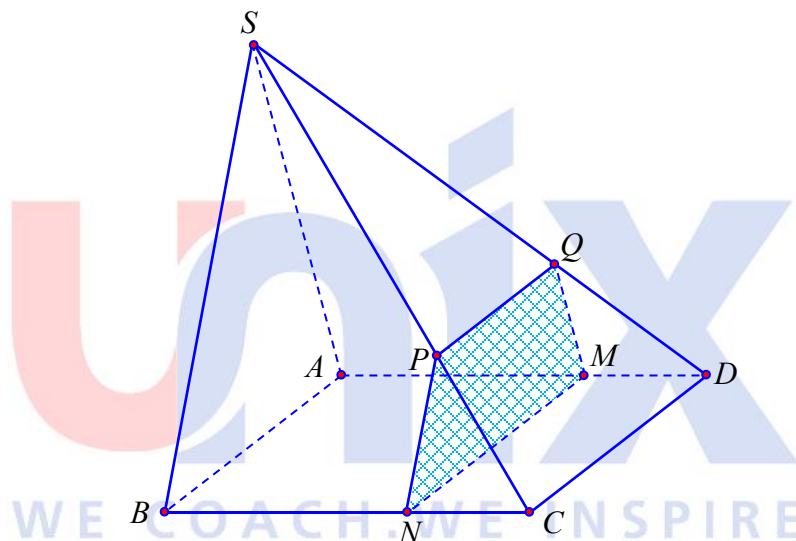
$$\begin{cases} JM // B'D' \\ ML // A'C' \end{cases} \Rightarrow \text{Tứ giác } MJKL \text{ là hình chữ nhật.}$$

$$S_{MJKL} = JM \cdot ML = \frac{1}{2} B'D' \cdot \frac{1}{2} A'C' = \frac{1}{4} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{6^2}{2} = 18.$$

**Câu 22:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành, mặt bên  $SAB$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $SB = 2a$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn  $AD$  sao cho  $AM = 2MD$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $(SAB)$ . Khi  $a = 7$ , tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 23,6**



Ta có:

$$\begin{cases} (P) // (SAB) \\ M \in AD, M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ABCD) = MN \\ (P) \cap (SCD) = PQ \end{cases} \text{ và } MN // PQ // AB$$

$$\begin{cases} (P) // (SAB) \\ M \in AD, M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (SAD) = MQ \\ (P) \cap (SBC) = NP \end{cases} \text{ và } \begin{cases} MQ // SA \\ NP // SB \end{cases}$$

Mà tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  nên  $SA \perp AB \Rightarrow MN \perp MQ$

Từ và suy ra  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang vuông tại  $M$  và  $Q$ .

Mặt khác

$$MQ // SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{DQ}{DS} \Rightarrow MQ = \frac{1}{3} SA \text{ và } \frac{DQ}{DS} = \frac{1}{3}.$$



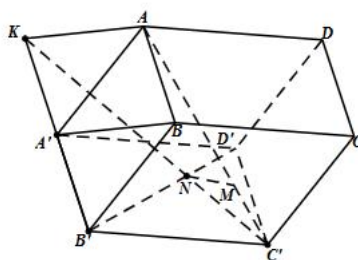
$$\circ PQ \parallel CD \Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB, \text{ với } AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a$$

$$\text{Khi đó } S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MQ.(PQ + MN) \Leftrightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \frac{SA}{3} \cdot \left( \frac{2AB}{3} + AB \right)$$

$$\Leftrightarrow S_{MNPQ} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{18} = \frac{5.7^2\sqrt{3}}{18} \approx 23,6.$$

**Câu 23:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xác định các điểm  $M, N$  tương ứng trên các đoạn  $AC', B'D'$  sao cho  $MN$  song song với  $BA'$  và tính tỉ số  $\frac{MA}{MC'}$ .

**Lời giải**



Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng  $(A'B'C'D')$  theo phương  $BA'$ , ta có:

$N$  là hình chiếu của  $M$  hay  $N$  là giao điểm của  $B'D'$  với hình chiếu của  $AC'$  qua phép chiếu này.

Do đó ta xác định được  $M, N$  như sau:

- Trên tia  $B'A'$ , lấy điểm  $K$  sao cho  $A'K = B'A'$  thì  $ABA'K$  là hình bình hành nên  $AK \parallel BA'$ , suy ra  $K$  là hình chiếu của  $A$  qua phép chiếu song song.

- Gọi  $N = B'D' \cap KC'$ . Đường thẳng qua  $N$  và song song với  $AK$  cắt  $AC'$  tại  $M$ .

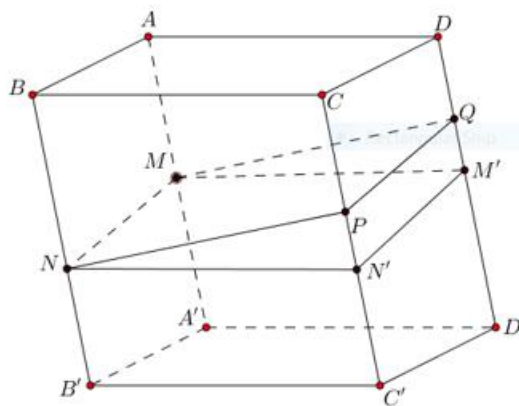
Từ đó ta xác định được điểm  $M, N$  cần tìm.

$$\text{Theo định lý Ta-let, ta có: } \frac{MA}{MC'} = \frac{NK}{NC'} = \frac{KB'}{C'D'} = 2.$$

**Câu 24:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các cạnh bên  $AA', BB', CC', DD'$  lần lượt tại  $M, N, P, Q$  sao cho  $AM = 5, BN = 8, CP = 7$ . Khi đó độ dài đoạn  $DQ$  bằng

**Lời giải**

**Trả lời: 4**



Ta có:

$$\begin{cases} (ABB'A') // (CDD'C') \\ (\alpha) \cap (ABB'A') = MN \Rightarrow MN // PQ \quad (1) \\ (\alpha) \cap (CDD'C') = PQ \end{cases}$$

Lấy  $M'$ ,  $N'$  lần lượt trên  $DD'$ ,  $CC'$  sao cho  $DM' = AM = 5$ ,  $CN' = BN = 8$ .

Ta có:

$$\begin{cases} BN // CN' \\ BN = CN' \end{cases} \Rightarrow BNN'C \text{ là hình bình hành} \Rightarrow NN' // BC \text{ và } NN' = BC$$

$$\begin{cases} DM' // AM \\ DM' = AM \end{cases} \Rightarrow AMM'D \text{ là hình bình hành} \Rightarrow AD // MM' \text{ và } MM' = AD$$

$$\Rightarrow MNN'M' \text{ là hình bình hành } MN' // MN \quad (2)$$

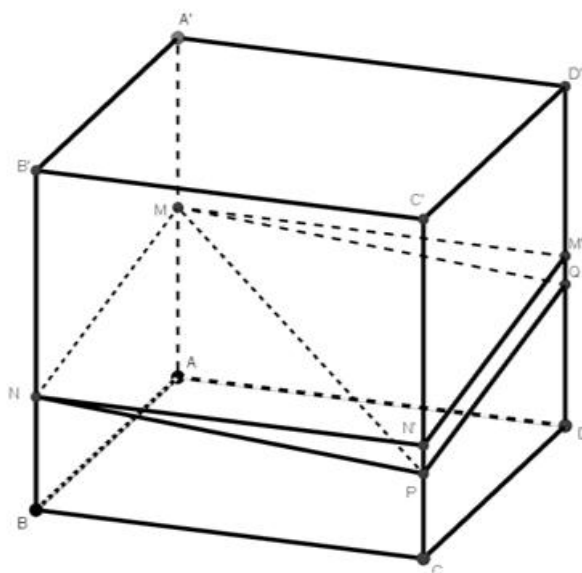
Từ (1), (2)  $\Rightarrow PQM'N'$  là hình bình hành  $\Rightarrow QM' = PN' = CN' - CP = 8 - 7 = 1$ .

Ta có:  $DQ = DM' - QM' = 5 - 1 = 4$ .

**Câu 25:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là các điểm nằm trên ba cạnh  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , sao cho  $AM = \frac{1}{2}AA'$ ,  $BN = \frac{1}{3}BB'$ ,  $CP = \frac{1}{4}CC'$ . Gọi  $Q$  là giao điểm của mặt phẳng  $(MNP)$  với đường thẳng  $DD'$ . Khi đó tỉ số  $\frac{D'Q}{DD'}$  bằng

**Lời giải**

**Trả lời: 0,58**



Lấy  $M'$ ,  $N'$  lần lượt trên các cạnh  $DD'$  và  $CC'$  sao cho  $M'D = MA$ ,  $N'C = NB$ .

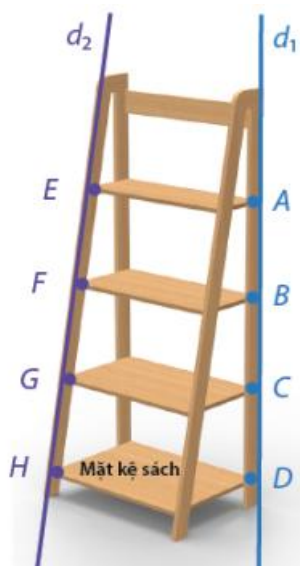
Ta có:

$$\begin{cases} (ABB'A') \parallel (CDD'C') \\ (\alpha) \cap (ABB'A') = MN \Rightarrow MN \parallel PQ \\ (\alpha) \cap (CDD'C') = PQ \end{cases}$$

$$D'Q = D'M' + QM' = \frac{DD'}{2} + (N'C - PC) = \frac{DD'}{2} + \left( \frac{DD'}{3} - \frac{DD'}{4} \right) = \frac{7DD'}{12}$$

$$\text{Vậy } \frac{D'Q}{DD'} = \frac{7}{12}.$$

**Câu 26:** Hình ảnh dưới đây là kệ sách gỗ có 4 mặt kệ với thanh gỗ đứng và thanh gỗ xiên. Giá đỡ các mặt kệ xuất hiện ở các vị trí  $A, B, C, D$  và  $E, F, G, H$ . Biết  $EF = 35$  cm và  $A, B, C, D$  cách đều nhau và các mặt kệ song song với mặt đất. Tính độ dài đoạn  $HE$ .



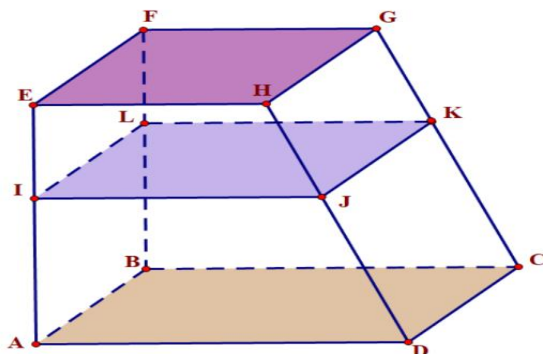
**Lời giải**



Trả lời: 105

- ♦ Áp dụng định lý Thales trong không gian, do  $A, B, C, D$  cách đều nhau nên  $E, F, G, H$  cũng cách đều nhau.
- ♦ Ta có  $EF = FG = GH = 35$  cm nên  $HE = 35.3 = 105$  cm.

**Câu 27:** Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới ( $ABCD$ ) và mâm tầng trên ( $EFGH$ ) song song với nhau. Bác thợ mộc đo được  $AE = 100$  cm,  $CG = 120$  cm và muốn đóng thêm mâm tầng giữa ( $IJKL$ ) song song với hai mâm tầng trên, tầng dưới và  $EI = 42$  cm. Tính độ dài đoạn thẳng  $KG$ .



Lời giải

Trả lời: 50,4

- ♦ Áp dụng định lý Thales trong không gian, ta có  $\frac{KG}{EI} = \frac{GC}{EA} \Leftrightarrow KG = \frac{42.120}{100} = 50,4$
- ♦ Vậy  $KG = 50,4$  cm.

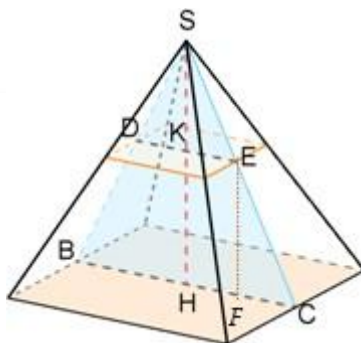
**Câu 28:** Một khay đá viên gồm 6 ngăn nhỏ có dạng là các hình chóp cụt với miệng và đáy là hình vuông. Đo được độ dài cạnh đáy nhỏ, cạnh đáy lớn lần lượt bằng 10 mm, 30mm và chiều cao mặt bên bằng 27mm. Tính chiều cao của một ngăn đá.



Hình 1: Khay đá có các ngăn có dạng hình chóp cụt

Lời giải

Trả lời: 25,1





Mỗi ngăn đá là một hình chóp cụt có hai đáy là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau. Các cạnh bên đồng quy tại S và dễ chứng minh được S và tâm K, H của hai đáy thẳng hàng.

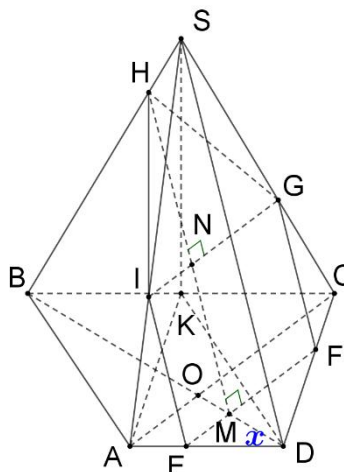
$$V\text{ì } BC = 3DE \text{ và } BD = EC \text{ nên } FC = DE = 10 \text{ mm}$$

$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{27^2 - 10^2} \approx 25,08 \text{ mm}$$

**Câu 29:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cân ( $AD \parallel BC$ ),  $BC = 2a$ ,  $AB = AD = DC = a$ , với  $a > 0$ . Mặt bên  $SBC$  là tam giác đều. Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết hai đường thẳng  $SD$  và  $AC$  vuông góc nhau,  $M$  là điểm thuộc đoạn  $OD$  ( $M$  khác  $O$  và  $D$ ),  $MD = x$ ,  $x > 0$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  và song song với hai đường thẳng  $SD$  và  $AC$ , cắt khối chóp  $S.ABCD$  theo một thiết diện. Khi  $a = 4\sqrt{3}$  tìm  $x$  để diện tích thiết diện đó là lớn nhất.

**Lời giải**

**Trả lời: 3**



Trong  $\text{mp}(SBD)$  kẻ đường thẳng qua  $M$  song song với  $SD$ , cắt cạnh  $SB$  tại  $H$ .

Trong  $\text{mp}(ABCD)$  kẻ đường thẳng qua  $M$  song song với  $AC$ , cắt các cạnh  $DA$  và  $DC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ .

Trong  $\text{mp}(SDA)$  kẻ đường thẳng qua  $E$  song song với  $SD$ , cắt cạnh  $SA$  tại  $I$ .

Trong  $\text{mp}(SDC)$  kẻ đường thẳng qua  $F$  song song với  $SD$ , cắt cạnh  $SC$  tại  $G$ .

Khi đó thiết diện của khối chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là ngũ giác  $EFGHI$ .

Dễ thấy  $ABCD$  là nửa lục giác đều có tâm là trung điểm  $K$  của  $BC$ . Do đó  $ADCK$  và  $ABND$  là hình thoi nên  $AC \perp KD$ . Mặt khác  $AC \perp SD$  nên  $AC \perp (SKD) \Rightarrow AC \perp SK$ .

Lại có  $SK \perp BC$ , suy ra  $SK \perp (ABCD) \Rightarrow SK \perp KD$ .

Ta có  $IG$  là giao tuyến của  $(\alpha)$  với  $(SAC)$ , mà  $AC \parallel (\alpha)$ , suy ra  $IG \parallel AC$ .

Mặt khác  $HM \parallel SD$  và  $SD \perp AC$ , suy ra  $HM \perp IG$  và  $HM \perp EF$  và  $IGFE$  là hình chữ nhật.

Diện tích thiết diện  $EFGHI$  bằng  $s = S_{EFGI} + S_{HGI} = IG \cdot NM + \frac{1}{2} IG \cdot HN$ .

Ta có  $AK = KD = AD = a$  nên  $\triangle AKD$  đều.



Mà  $BD \perp AK, AC \perp KD$  nên  $O$  là trọng tâm tam giác  $ADK$ . Suy ra  $OD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

$AC = BD = a\sqrt{3}$  ( $\triangle BAC$  vuông tại  $A$ , do  $KA = KB = KC$ ).

$$SD = \sqrt{SK^2 + KD^2} = 2a.$$

$$\text{Ta có } \frac{DM}{DO} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow EF = \frac{DM}{DO} \cdot AC = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot a\sqrt{3} = 3x.$$

$$\frac{GF}{SD} = \frac{CF}{CD} = \frac{OM}{OD} \Rightarrow GF = \frac{OM}{OD} \cdot SD = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot 2a = 2a - 2\sqrt{3}x.$$

$$\frac{HM}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow HM = \frac{BM}{BD} \cdot SD = \frac{a\sqrt{3} - x}{a\sqrt{3}} \cdot 2a = \frac{6a - 2x\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } HN = HM - NM = HM - GF = \frac{6a - 2x\sqrt{3}}{3} - (2a - 2\sqrt{3}x) = \frac{4x\sqrt{3}}{3}.$$

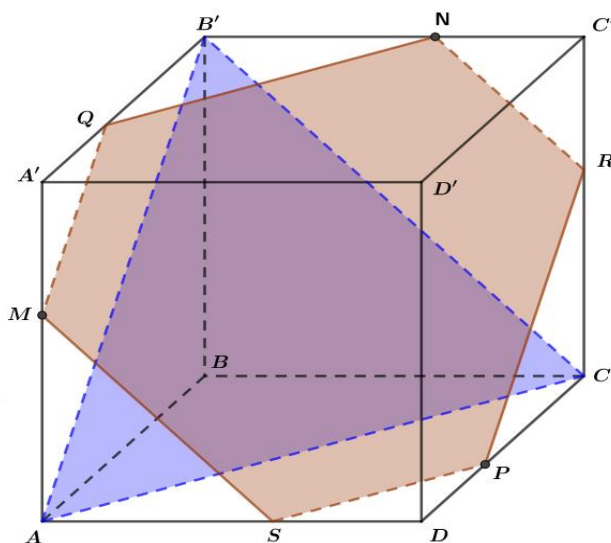
$$\text{Vậy } s = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot 3x + (2a - 2\sqrt{3}x) \cdot 3x = -4\sqrt{3}x^2 + 6ax = -\sqrt{3} \left( 2x - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } s \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } 2x - \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = 3.$$

**Câu 30:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $AB=4$ . Trên các cạnh  $AA', B'C', CD$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P$  sao cho  $MA = NB' = PC = x$  ( $2 \leq x < 4$ ). Khi thiết diện được tạo bởi mặt phẳng  $(MNP)$  cắt hình lập phương có diện tích bằng  $11\sqrt{3}$  thì giá trị  $x$  là

**Lời giải**

**Trả lời: 3**





$$+) \frac{MA}{MA'} = \frac{NB'}{NC'} \Rightarrow MN, AB', A'C' \text{ thuộc ba mặt phẳng song song hay } MN // (\alpha) \begin{cases} \text{chứa } AB' \\ // A'C' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \equiv (AB'C).$$

$$+) \frac{MA}{MA'} = \frac{PC}{PD} \Rightarrow MP, AC, A'D \text{ thuộc ba mặt phẳng song song hay } MP // (\beta) \begin{cases} \text{chứa } AC \\ // A'D \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\beta) \equiv (AB'C).$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} MN // (AB'C) \\ MP // (AB'C) \\ MN \cap MP \end{cases} \Rightarrow (MNP) // (AB'C).$$

$$+) \begin{cases} (MNP) // (AB'C) \\ (AA'B'B) \cap (AB'C) = AB' \Rightarrow (MNP) \cap (AA'B'B) = d \begin{cases} \text{qua } M \\ // AB' \end{cases}, d \cap A'B' = Q. \\ M \in (MNP) \cap (AA'B'B) \end{cases}$$

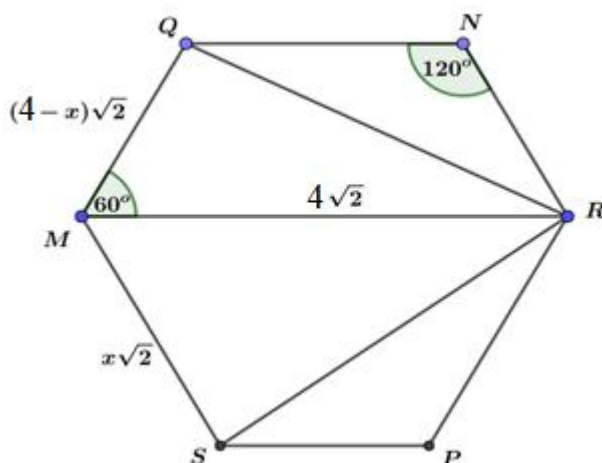
Tương tự, ta xác định được các giao tuyến của mặt phẳng  $(MNP)$  với các mặt  $ABCD$  và  $BB'C'C$  của hình lập phương. Từ đó, thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$  là lục giác  $MQNRPS$  như hình vẽ.

Tam giác  $AB'C$  đều và  $(\widehat{QM}, \widehat{QN}) = (\widehat{AB'}, \widehat{AC'}) = 60^\circ$ , từ đó dễ thấy lục giác  $MQNRPS$  có tất cả các góc bằng  $120^\circ$ .

Tam giác  $AMS$  vuông cân tại  $A$  nên  $MS = AM \cdot \sqrt{2} = x\sqrt{2}$ . Tương tự  $PR = QN = x\sqrt{2}$ .

Tam giác  $A'MQ$  vuông cân tại  $A'$  nên  $MQ = A'M \cdot \sqrt{2} = (4-x)\sqrt{2}$ . Tương tự  $NR = SP = (4-x)\sqrt{2}$ .

$$\begin{cases} (MNP) // AC \\ (MNP) \cap (AA'C'C) = MR \Rightarrow MR // AC \Rightarrow MRCA \text{ là hình bình hành} \Rightarrow MR = AC = 4\sqrt{2}. \\ AC \subset (AA'C'C) \end{cases}$$





$$S_{MQNRPS} = S_{MQRS} + 2S_{QNR} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{2} + (4-x) \sqrt{2} x \sqrt{2} \cdot \sin 120^\circ = 8\sqrt{3} + \sqrt{3} (4-x)x.$$

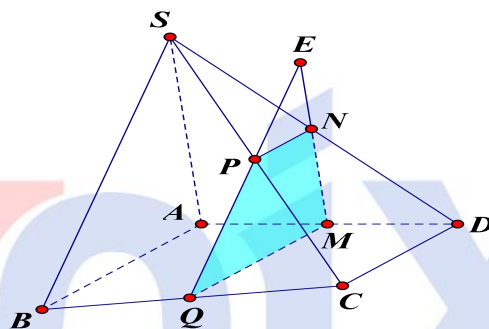
$$S_{MQNRPS} = 11\sqrt{3} \Leftrightarrow (4-x)x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện lấy  $x = 3$ .

**Câu 31:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang có hai đáy là  $AB, CD$ ,  $AB = 2CD$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $AD$  ( $M$  không trùng với  $A$  và  $D$ ) sao cho  $\frac{MA}{AD} = x$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(SAB)$ . Tìm  $x$  để diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng một nửa diện tích tam giác  $SAB$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 0,5**



Ta có  $\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (ABCD) \end{cases}$  nên giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $\text{mp}(ABCD)$  là đường thẳng đi qua  $M \in (\alpha), M \in (ABCD)$   
 $M$  và song song với  $CD$ , đường thẳng này cắt  $CB$  tại  $Q$ .

Ta có  $\begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAD) \end{cases}$  nên giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $\text{mp}(SAD)$  là đường thẳng đi qua  $M \in (\alpha), M \in (SAD)$   
 và song song với  $SA$ , đường thẳng này cắt  $SD$  tại  $N$ .

Ta có  $\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$  nên giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $\text{mp}(SCD)$  là đường thẳng đi qua  $N \in (\alpha), N \in (SCD)$   
 song song với  $CD$ , đường thẳng này cắt  $SC$  tại  $P$ .

Ta có  $MQ \parallel CD$ ,  $PN \parallel CD$  nên  $PN \parallel MQ$ . Do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình thang.

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là hình thang  $MNPQ$ .

Gọi  $E$  là giao điểm của  $MN$  và  $PQ$ .



Ta có:  $QM = \frac{MD}{AD} \cdot AB + \frac{AM}{AD} \cdot CD = (1-x)AB + xCD = \frac{2-x}{2}AB$ .

Hai tam giác  $SAB$  và  $EMQ$  đồng dạng nên  $\frac{S_{\Delta EMQ}}{S_{\Delta SAB}} = \left(\frac{MQ}{AB}\right)^2 = \frac{(2-x)^2}{4}$ . (1)

Vì  $\frac{NP}{CD} = \frac{NS}{SD} = \frac{AM}{AD} = x \Rightarrow NP = xCD = \frac{x}{2}AB$ .

Do đó  $\frac{NP}{QM} = \frac{x}{2-x}$  và

$\frac{S_{\Delta EPN}}{S_{\Delta EMQ}} = \left(\frac{NP}{QM}\right)^2 = \frac{x^2}{(2-x)^2} \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{\Delta EMQ}} = 1 - \frac{x^2}{(2-x)^2} = \frac{4-4x}{(2-x)^2}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $\frac{S_{MNPQ}}{S_{\Delta SAB}} = 1-x$ .

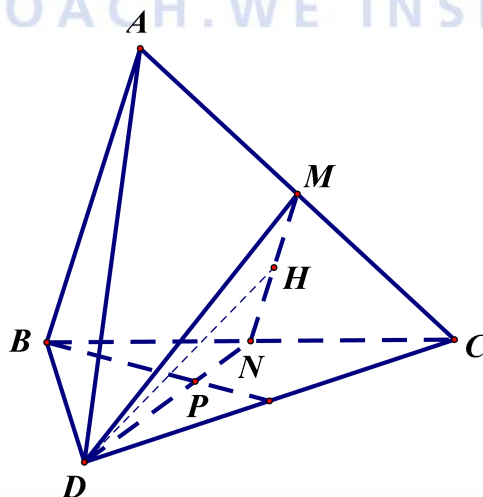
Do đó  $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{\Delta SAB} \Leftrightarrow 1-x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

Vậy  $x = \frac{1}{2}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 32:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có độ dài các cạnh bằng  $2a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AC$ ,  $BC$ ;  $P$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Khi  $a=2$ , hãy tính diện tích của thiết diện được cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$  của tứ diện  $ABCD$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 3,32**



Trong tam giác  $BCD$  có:  $P$  là trọng tâm,  $N$  là trung điểm  $BC$ . Suy ra  $N$ ,  $P$ ,  $D$  thẳng hàng. Vậy thiết diện là tam giác  $MND$ .

Xét tam giác  $MND$ , ta có  $MN = \frac{AB}{2} = a$ ;  $DM = DN = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .



Do đó tam giác  $MND$  cân tại  $D$ .

Gọi  $H$  là trung điểm  $MN$  suy ra  $DH \perp MN$ .

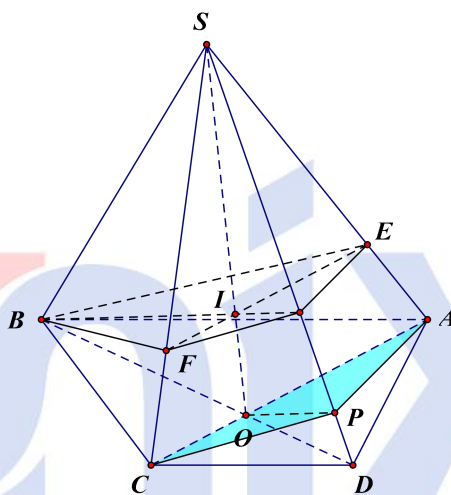
$$\text{Diện tích tam giác } S_{\triangle MND} = \frac{1}{2}MN \cdot DH = \frac{1}{2}MN \cdot \sqrt{DM^2 - MH^2} = \frac{a^2 \sqrt{11}}{4} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{11}}{4} = \sqrt{11} \approx 3,32.$$

**Câu 33:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang và  $AB \parallel CD$  và  $AB = 2CD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Lấy  $E$  thuộc cạnh  $SA$ ,  $F$  thuộc cạnh  $SC$  sao cho  $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $O$  và song song với mặt phẳng  $(BEF)$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $SD$  với  $(\alpha)$ .

Tính tỉ số  $\frac{SP}{SD}$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: 0,86**



Vì  $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$  nên đường thẳng  $EF \parallel AC$  mà  $EF \in (BEF)$ ;  $AC \notin (BEF)$  suy ra  $AC \parallel (BEF)$

Vì  $AC$  qua  $O$  và song song với mặt phẳng  $(BEF)$  nên  $AC \in (\alpha)$ .

Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , gọi  $I = SO \cap EF$ , trong  $(SBD)$ , gọi  $N = BI \cap SD$ . Suy ra  $N$  là giao điểm của đường thẳng  $SD$  với mặt phẳng  $(BEF)$ .

Hai mặt phẳng song song  $(BEF)$  và  $(\alpha)$  bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba là  $(SCD)$  theo hai giao tuyến lần lượt là  $FN$  và  $Ct$  nên hai giao tuyến đó song song với nhau, tức là  $Ct \parallel FN$ .

Trong  $(SCD)$ ,  $Ct$  cắt  $SD$  tại  $P$ . Khi đó  $P$  là giao điểm của  $SD$  với  $(\alpha)$ .

Trong hình thang  $ABCD$ , do  $AB \parallel CD$  và  $AB = 2CD$  nên

$$\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD} = 2 \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}.$$

Trong tam giác  $SAC$ , có  $EF \parallel AC$  nên  $\frac{SE}{SA} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{IS}{IO} = 2$ .

Xét tam giác  $SOD$  với cát tuyến  $NIB$ , ta có



$$\frac{NS}{ND} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{NS}{ND} = \frac{BO}{BD} \cdot \frac{IS}{IO} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Suy ra  $\frac{SN}{SD} = \frac{4}{7}$  (1).

Ta lại có:  $\frac{SN}{SP} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$  (Do  $CP // FN$ ) (2).

Từ (1) và (2) suy ra:  $\frac{SP}{SD} = \frac{6}{7} \approx 0,86$

