



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

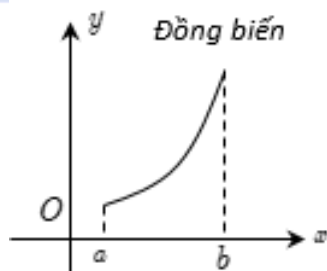
+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

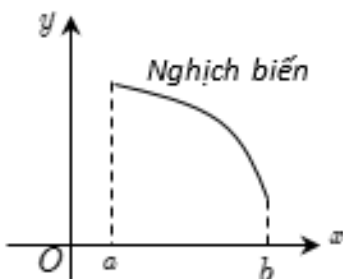
+) Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .

Chú ý:

+ Nếu hàm số **đồng biến** trên $a; b$ thì từ trái sang phải **đồ thị đi lên**.



+ Nếu hàm số **nghịch biến** trên $a; b$ thì từ trái sang phải **đồ thị đi xuống**.



2. Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.



- +) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K .
- +) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

3. Định lý: (Tổng quát) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

- +) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K .
- +) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

4. Lưu ý:

- +) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta nói hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.
- +) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta nói hàm số nghịch biến trên đoạn $[a; b]$.
- +) Tương tự với các khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên các nửa khoảng.

5. Sử dụng bảng biến thiên để xét tính đơn điệu của hàm số.

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D .

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận

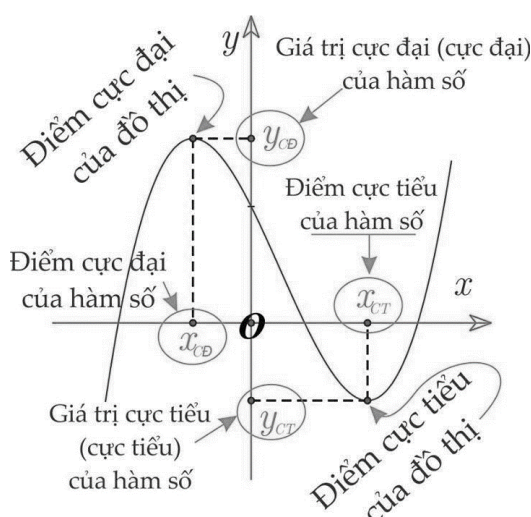
Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm, ta có thể sử dụng **Phương pháp sử dụng MTCT**.

Cách 1: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio. Quan sát bảng kết quả nhận được về tính tăng, giảm giá trị của $f(x)$ và dự đoán.

Cách 2: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba).



II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ



1. Khái niệm cực trị của hàm số: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

*** Chú ý**

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số, kí hiệu là f_{CD} (f_{CT}), còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

+) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại còn gọi là **cực đại** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

2. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lý 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$.

+) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

+) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	a	x_0	b	x	a	x_1	b
$f'(x)$	+			$f'(x)$	-		
$f(x)$	↗ f_{CD} ↘			$f(x)$	↘ f_{CT} ↗		



Trung tâm BDVH Unix Thăng Long - Website: trungtamunix.edu.vn

Thầy Lê Việt toán Thăng Long “Khai Mở Tư duy – Kiến Tạo Vận Mệnh” (zalo):0835.221183





NHẬN XÉT:

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D .

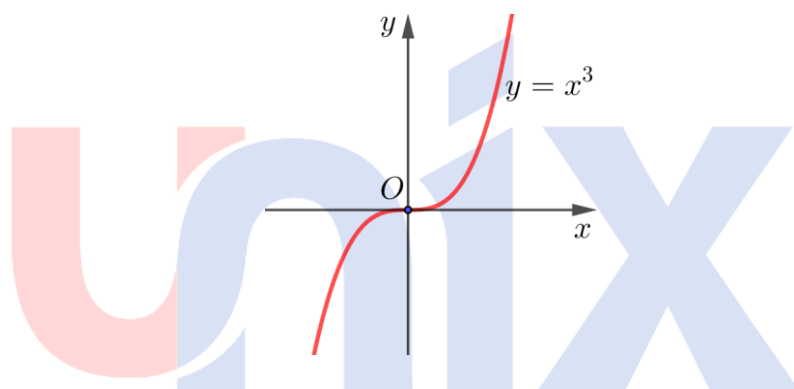
Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận

Chú ý: Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần.

Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Câu 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.



Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 3: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 26x - 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 + 10x - 26 = -(x-5)^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 4: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x - 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 5: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 6: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 + 4x^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 + 8x = 4x(x^2 + 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 7: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 - 7$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -8x^3 + 8x = -8x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	-5	-7	-5	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 8: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{3x+1}{1-x}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.



Câu 9: Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{3-2x}{x+7}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

Ta có $y' = \frac{(-2) \cdot 7 - 1 \cdot 3}{(x+7)^2} = \frac{-17}{(x+7)^2} < 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -7)$ và $(-7; +\infty)$.

Câu 10: Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có: $y' = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 11: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$+\infty$	4	$+\infty$	



Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Câu 12: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 - x + 5}{x + 2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có: $y' = \frac{-x^2 - 4x - 7}{(x + 2)^2} < 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Câu 13: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - 1}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ thì $\tan x \in (0; 1); \cos x \neq 0$.

Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x (\tan x - 1)^2} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 14: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{nếu } x < -1 \\ -2x^2 + 2x + 7 & \text{nếu } -1 \leq x \leq 2 \\ 3x - 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < -1 \\ -4x + 2 & \text{nếu } -1 < x < 2; y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$	$+$



Từ bảng xét dấu của y' ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 15: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số: $y = |x^2 - 2x - 3|$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Cách 1:

$$y = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{nếu } x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 3 \\ -(x^2 - 2x - 3) & \text{nếu } -1 < x < 3 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x - 2 & \text{nếu } x < -1 \text{ hoặc } x > 3 \\ -(2x - 2) & \text{nếu } -1 < x < 3 \end{cases}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$+$ 0 $-$	$ $	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.

Cách 2: Ta có $y' = \frac{2(x^2 - 2x - 3)(x - 1)}{\sqrt{(x^2 - 2x - 3)^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$+$ 0 $-$	$ $	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.

Câu 16: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x\sqrt{4 - x^2}$.

Lời giải



Tập xác định $D = [-2; 2]$.

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của y' :

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2			
y'	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, nghịch biến trên các khoảng $(-2; -\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; 2)$.

Câu 17: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

b) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Lời giải

a) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

Tập xác định: $D = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} > 0, \forall x \in (5; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

b) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow -2$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 2$	$\nearrow +\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1), (-1; 0)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2), (0; +\infty)$.

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$



Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	

Vậy các điểm cực trị của hàm số là $x = 0$ và $x = 4$.

Câu 18: Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

b) $y = \sqrt{-x^2 + 4}$

Lời giải

a) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

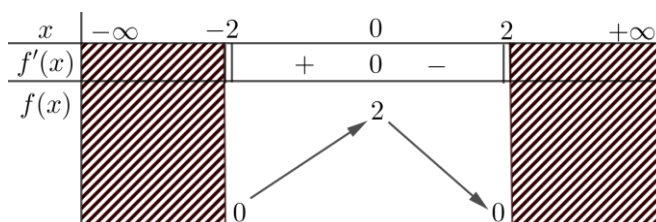
x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	

Vậy các điểm cực trị của hàm số là $x = 0$ và $x = 4$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow -x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Tập xác định $D = [-2; 2]$.

$y' = \frac{-x}{\sqrt{-x^2 + 4}}$. Cho $y' = 0 \Rightarrow x = 0$.



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. Xét sự biến thiên và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 20: Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$.

Lời giải

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Tập xác định: } D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 3}. \text{ Khi đó, } y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại)}.$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$		$+$	
y				

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 21: Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = 2^{x^2-5x}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm: } f'(x) = 2^{x^2-5x} (x^2 - 5x)' \ln 2 = 2^{x^2-5x} (2x - 5) \ln 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$



x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\swarrow \searrow$ $2^{-\frac{25}{4}}$		

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

DẠNG 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM HỢP CHO BỞI BBT HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

$$y = f(x) \text{ HOẶC } y = f'(x).$$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

The diagram illustrates a piecewise linear function $y(x)$ defined on the interval $[-\infty, +\infty]$. The function is composed of three segments:

- Segment 1: From $(-\infty, -\infty)$ to $(0, -1)$.
- Segment 2: From $(0, -1)$ to $(1, -2)$.
- Segment 3: From $(1, -2)$ to $(+\infty, +\infty)$.

A blue shaded region is present below the x-axis between $x=0$ and $x=1$.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số, ta có:

Trong $(0;1)$ mũi tên “đi xuống” nên

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Trong $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$ mũi tên “đi lên” nên

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1); (3; +\infty)$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	-	0	+

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

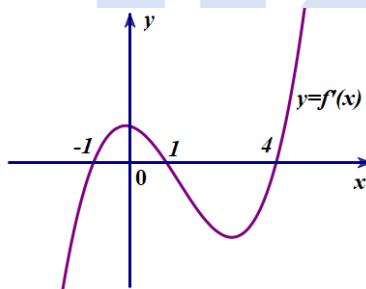
Lời giải

Ta có:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f'(x) = x^2 - 5x + 4$	+	0	-	0	+

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(4; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x).$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{cases}.$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}.$$



Vậy hàm số $y = g(x) = f(x) + 3$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 4)$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2x + 1)$.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(2x + 1)$. Ta có $g'(x) = 2 \cdot f'(2x + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ 2x + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số $y = f(2x + 1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(-2x + 6)$.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(-2x + 6)$.



$$g'(x) = -2 \cdot f'(-2x+6).$$

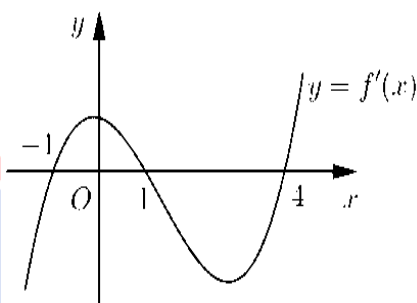
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(-2x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6=0 \\ -2x+6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	-	0	+
$g(x)$					

Vậy hàm số $y = f(-2x+6)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $g'(x) = -f'(2-x)$.

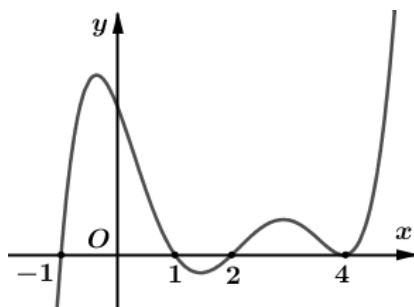
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=-1 \\ 2-x=1 \\ 2-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(2x - 4)$ nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $g'(x) = 2 \cdot f'(2x - 4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = -1 \\ 2x - 4 = 1 \\ 2x - 4 = 2 \\ 2x - 4 = 4 \text{ (nghiệm bội chẵn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{5}{2} \\ x = 3 \\ x = 4 \text{ (nghiệm bội chẵn)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$						

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

DẠNG 3: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC, BẢNG BIẾN THIÊN.

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần.

Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Kết luận hàm số đạt cực trị tại $x = ?$, $y = ?$ (nếu có).

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y			2			$+\infty$		$+\infty$
						4		

Hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

+ $f'(x)$ qua $x = -1$ đổi dấu từ “+” sang “-” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = -1$.

+ $f'(x)$ và $f(x)$ không xác định tại $x = 0$ nên hàm số $f(x)$ không có cực trị tại $x = 0$.

+ $f'(x)$ qua $x = 1$ đổi dấu từ “-” sang “+” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Câu 32: Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			6		-26		$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Cách 2: $y'' = 6x - 6$.

$y''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$.

$y''(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Câu 33: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$.



Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 34: Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -6x^2 - 6x - 6 = -6 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 35: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$		-5	-3	-5		$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = -3$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}, y_{CT} = -5$.

Cách 2: $y'' = 6x^2 - 4$.

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = -3$.

$y''(\pm\sqrt{2}) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}, y_{CT} = -5$.

Câu 36: Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 8x; y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1: Bảng biến thiên



x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CD} = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -5$.

Cách 2: $y'' = -12x^2 + 8$.

$y''(\pm\sqrt{2}) = -16 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CD} = -1$.

$y''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -5$.

Câu 37: Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 8x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 1$.

Cách 2: $y'' = 12x^2 + 8$. $y''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 1$.

Câu 38: Tìm cực trị của hàm số $y = (1-x)^3(3x-8)^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 15(1-x)^2(3x-8)(2-x)$.



$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
y'	-	0	-	0	+
y	$+\infty$		-4	0	$-\infty$

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{8}{3}$, $y_{CD} = 0$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -4$.

Câu 39: Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2^{x^2-5x}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2^{x^2-5x} (x^2-5x)' \ln 2 = 2^{x^2-5x} (2x-5) \ln 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-5=0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$2^{-\frac{25}{4}}$	

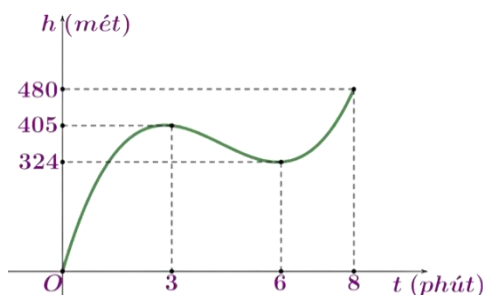
Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{5}{2} \Rightarrow y_{CT} = 2^{-\frac{25}{4}}$.

DẠNG 4: TOÁN THỰC TẾ ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ PHƯƠNG PHÁP

Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ tức thời* của chuyển động tại t_0 .

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là *gia tốc tức thời* tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Câu 40: Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên dưới.



Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $h(t)$, ta nhận xét:

- + Trong khoảng thời gian từ 3 phút đến 6 phút thì khinh khí cầu giảm dần độ cao.
- + Trong 3 phút đầu tiên và trong khoảng thời gian từ 6 phút đến 8 phút thì khinh khí cầu tăng dần độ cao.

Câu 41: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

Xét hàm $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ trên $[0; +\infty)$.

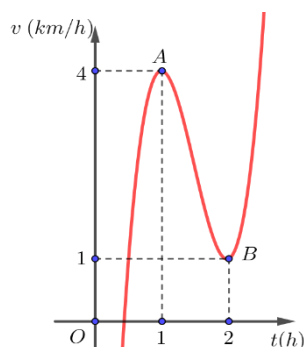
$$v'(t) = 6t - 12. \text{ Cho } v'(t) = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	-	0	+
$v(t)$	9	-3	$+\infty$

Vậy trong khoảng thời gian 2 giây đầu tiên thì vận tốc chất điểm giảm dần và sau thời điểm 2 giây thì vận tốc chất điểm tăng dần.

Câu 42: Một vật chuyển động với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên dưới. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1\text{h}$ vật có vận tốc $v_1 = 4\text{km/h}$ và tại thời điểm $t_2 = 2\text{h}$ vật có vận tốc $v_2 = 1\text{km/h}$. Tính vận tốc của vật tại thời



Lời giải

Giả sử hàm số vận tốc có dạng: $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, $t > 0$.

Ta có: $v'(t) = 3at^2 + 2bt + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, tại các thời điểm t_1, t_2 đồ thị hàm vận tốc đi qua các điểm cực trị $A(1; 4)$, $B(2; 1)$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} v(1) = 4 \\ v'(1) = 0 \\ v(2) = 1 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -27 \\ c = 36 \\ d = -11 \end{cases}$$

Suy ra: $v(t) = 6t^3 - 27t^2 + 36t - 11$ (km/h).

Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3h$ là: $v(3) = 6 \cdot 3^3 - 27 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 11 = 16$ km/h.

DẠNG 5: TÌM ĐK CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN MỘT MIỀN CHO TRƯỚC.

Câu 43: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$ (vì $a = 3 > 0$)

$\Leftrightarrow 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Vậy $m \geq 3$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 44: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.



+) Với $m=1$, hàm số trở thành $y = -3x + 1$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, chọn $m=1$ thỏa.

+) Với $m \neq 1$, ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3(2m-3)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 9(m-1)^2 - 9(m-1)(2m-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ (m-1)(-m+2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy $m \leq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m}{2x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Ta có: $y' = \frac{-1+2m}{(2x-1)^2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow -1+2m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Vậy $m > \frac{1}{2}$.

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

Ta có $y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2}$. Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$ thì $\begin{cases} y' < 0 \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}.$$

Câu 47: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = -3x^2 + 6x + m - 1$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 1, \forall x \in (-1; +\infty)$
(1).



Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 1$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$$g'(x) = 6x - 6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$			$-$	0	$+$
$g(x)$			10	-2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{(-1; +\infty)} g(x) = -2$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow m \leq \min_{(-1; +\infty)} g(x) \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Vậy $m \leq -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x - 1 - 5m}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2 - 4mx + 3m + 1}{(x - m)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{2x^2 - 4mx + 3m + 1}{(x - m)^2} \leq 0 \forall x \in (1; 5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4mx + 3m + 1 \leq 0 \forall x \in (1; 5) \\ m \notin (1; 5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3 \leq 0 \\ -17m + 51 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5$$

Do nguyên dương bé hơn 2024 nên $5 \leq m \leq 2023$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1 + m}{5x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$?

Lời giải



Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{5} \right\}$.

Ta có $y' = \frac{5x^2 + 2mx - 3m + 1}{(5x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{5x^2 + 2mx - 3m + 1}{(5x + m)^2} \leq 0 \forall x \in (-3; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2mx - 3m + 1 \leq 0 \forall x \in (-3; 1) \\ -\frac{m}{5} \notin (-3; 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9m + 46 \leq 0 \\ -m + 6 \leq 0 \\ \begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq 15 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{46}{9} \\ m \geq 6 \\ \begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq 15 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 15$$

Do nguyên dương không lớn hơn 2024 nên $15 \leq m \leq 2024$.

Vậy có tất cả 2010 giá trị.

Câu 50: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m - 1 \end{cases}$.

Nếu $1 \leq 2m - 1$ thì ta có biến đổi $y' \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2m - 1$.

.

Xét $2m - 1 < 1$ ta có biến đổi $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2m - 1; 1]$.

x	$-\infty$	$2m-1$			1	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+	
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
							$+\infty$

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ thì $(-2; 0) \subset [2m - 1; 1]$.



$$\Leftrightarrow 2m - 1 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}.$$

Câu 51: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $-1; 1$.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $-1; 1$ thì $y' \leq 0 \forall x \in -1; 1 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) \leq 0 \forall x \in -1; 1$.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy để hàm số nghịch biến trên khoảng $-1; 1$ thì

$$\begin{cases} m \leq -1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 52: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + (m+2)x - 3m+1}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2x^2 + 4x + 2m - 3}{(x-1)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 2m - 3 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \text{ (vì } a = -2 < 0)$$

$$\Leftrightarrow 4m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } m \leq \frac{1}{2}.$$