



ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Lời giải

Trả lời: 2

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		1	2	1	$+\infty$

Vậy hàm số có giá trị cực đại bằng 2.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Tính tổng $x_1 + x_2$.

Lời giải

Trả lời: -2

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} = x - 5 + \frac{6}{x + 1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{6}{(x + 1)^2}.$$

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0$: phương trình này có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị là x_1, x_2 .

Vậy tổng hai nghiệm $x_1 + x_2 = -2$.



Câu 3: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = -x + 1 + 2\sqrt{x^2 - 4x + 7}$.

Lời giải

Trả lời: 2

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -1 + \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+7}}.$$

$$\text{Suy ra: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+7} = 2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2-12x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Vậy giá trị cực tiểu của hàm số $y = -x + 1 + 2\sqrt{x^2 - 4x + 7}$ là $f_{CT} = f(3) = 2$.

Câu 4: Tìm số cực trị của hàm số $y = \log_4(x^2 - 4x + 3)$ là

Lời giải

Trả lời: 0

Điều kiện: $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1; x > 3$.

Vậy tập xác định $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y = \log_4(x^2 - 4x + 3), y' = \frac{2x-4}{(x^2-4x+3)\ln 4}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-4}{(x^2-4x+3)\ln 4} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \notin D.$$

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số trên khoảng $(0; 2\pi)$.

Lời giải

Trả lời: 3

$$y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right), y' = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$



Vì $x \in (0; 2\pi)$ nên $x = \left\{ \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}; \frac{7\pi}{4} \right\}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π		
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 điểm cực đại tại $x = \frac{\pi}{12}; x = \frac{3\pi}{4}; x = \frac{17\pi}{12}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-2)^2(x-4)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Lời giải

Trả lời: 2

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

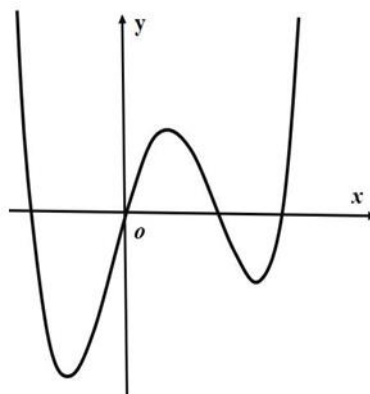
Trong 3 nghiệm trên $x = 2$ là nghiệm kép nên không phải cực trị hàm số $y = f(x)$.

Bảng biến thiên

x	0		2		4		
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$			CĐ				CT

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị tại $x = 0$ và $x = 4$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên





Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Trả lời: 2

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Qua các nghiệm này $f'(x)$ đều đổi dấu nên hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Trả lời: 2

Theo bảng xét dấu y' ta thấy hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 3$

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(0; 2025)$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Lời giải

Trả lời: 2016

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+) Ta có: $y' = x^2 - 6x + m$.

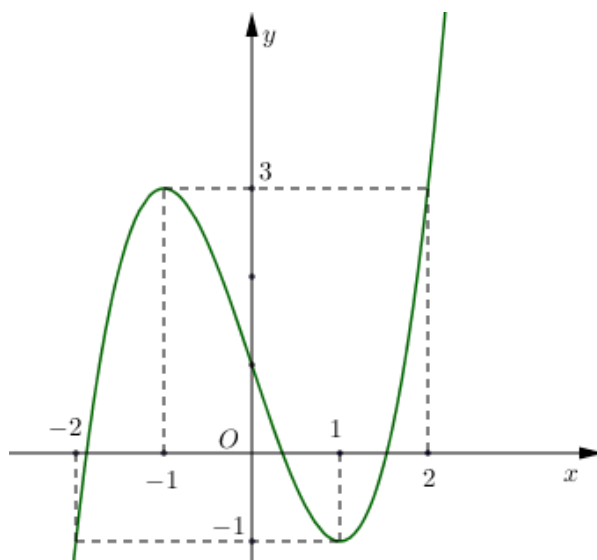
+) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 9.$$

Do m nguyên thuộc khoảng $(0; 2025)$ nên $m \in \{9, 10, \dots, 2024\}$.

Suy ra có 2016 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 10: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau đây.



Biết hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(a; b)$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2024b - 2025a$.

Lời giải

Trả lời: 4049

Dựa vào đồ thị ta suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. Do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng con của tập hợp $(-1; 1)$. Suy ra P lớn nhất khi $a = -1; b = 1$.

Khi đó $P = 2024b - 2025a = 2024 \cdot 1 - 2025 \cdot (-1) = 4049$.

Câu 11: Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng lớn nhất $(-\infty, a)$ và $(b; c)$. Tính $a^{2023} + b^{2024} + c^{2025}$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có:

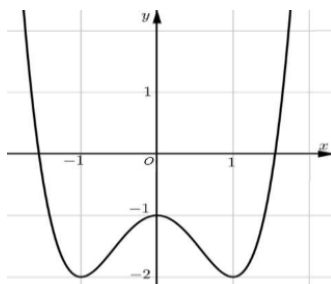
$$\begin{aligned} y &= x^4 - 2x^2 \\ y' &= 4x^3 - 4x \\ y' &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0		0		0	$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$			
			-1		-1			

Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên $(-\infty, -1)$ và $(0; 1)$ nên $a = -1; b = 0; c = 1$.

$$a^{2023} + b^{2024} + c^{2025} = 0.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây



Biết hàm số $y = f(x) + 2025$ đồng biến trên các khoảng $(-a, 0)$ và $(a; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -a)$ và $(0; a)$. Tính $10a$.

Lời giải

Trả lời: 10

Hàm số $y = f(x) + 2025$ đồng biến trên khoảng $(-1, 0)$ và $(1; +\infty)$. Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. Suy ra $a = 1$. Vậy $10a = 10$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Biết $f(1) < f(7)$. Có bao nhiêu số nguyên $x \geq 1$ thỏa mãn $f(3) < f(x) < f(7)$?

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		1		3		7	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+		
$f(x)$			$f(1)$		$f(3)$		$f(7)$	

Vì $\begin{cases} f(1) < f(7) \\ x \geq 1 \end{cases}$ nên $f(3) < f(x) < f(7) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ 3 < x < 7 \end{cases}$, mà $x \in \mathbb{Z}$ nên có 5 giá trị x thỏa mãn bài toán.

Câu 14: Các nhà khoa học tính toán phương án tiếp cận Sao Hỏa cho tàu đổ bộ theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Sao Hỏa. Trong khoảng 60 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt Sao Hỏa được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,02t^3 + 2t^2 - 40t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét. Biết vận tốc tức thời của con tàu giảm trên khoảng $(a; 60)$ với a là số thực dương nhỏ nhất. Tìm a (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 33,33



Ta có: $v(t) = h'(t) = -0,06t^2 + 4t - 40$.

$$v'(t) = -0,12t + 4.$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,12t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{100}{3}.$$

Bảng xét dấu của $v'(t)$ là

t	0	$\frac{100}{3}$	60
$v'(t)$	+	0	-

Ta thấy hàm số $v(t)$ nghịch biến trên $\left(\frac{100}{3}; 60\right)$ nên vận tốc tức thời của con tàu giảm trên khoảng $\left(\frac{100}{3}; 60\right)$.

$$\text{Vậy } a = \frac{100}{3} \approx 33,3.$$

Câu 15: Xét chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 13t + 1$ với $t \geq 0$. Khi đó vận tốc $v(t)$ của chất điểm tại thời điểm t là $x'(t)$. Biết vận tốc của chất điểm tăng trên khoảng $(a; +\infty)$ với a là số thực dương nhỏ nhất. Tìm a (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 2,13

Ta có: $v(t) = x'(t) = 4t^2 - 17t + 13$.

$$v'(t) = 8t - 17.$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t - 17 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17}{8}.$$

Bảng xét dấu của $v'(t)$ là

t	0	$2,125$	$+\infty$
$v'(t)$	-	0	+

Ta thấy hàm số $v(t)$ đồng biến trên $\left(\frac{17}{8}; +\infty\right)$ nên vận tốc của chất điểm tăng trên khoảng $\left(\frac{17}{8}; +\infty\right)$.

$$\text{Vậy } a = \frac{17}{8} \approx 2,13.$$



Câu 16: Doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một loại sản phẩm mới trong một số năm nhất định được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{3000}{1+10e^{-t}}$, trong đó $t \geq 0$ là khoảng thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm đó. Đạo hàm $f'(t)$ biểu thị tốc độ bán hàng. Tốc độ bán hàng tăng liên tục trong khoảng bao nhiêu năm? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Trả lời: 2,3

$$\text{Tốc độ bán hàng } f'(t) = \frac{-3000(1+10e^{-t})'}{(1+10e^{-t})^2} = \frac{30000e^{-t}}{(1+10e^{-t})^2}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{30000e^{-t}}{(1+10e^{-t})^2} \text{ trên } [0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } g'(t) = 30000 \cdot \frac{-e^{-t}(1+10e^{-t})^2 - e^{-t} \cdot 20(1+10e^{-t})(-e^{-t})}{(1+10e^{-t})^4} = \frac{-30000e^{-t}(1-10e^{-t})}{(1+10e^{-t})^3}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 10e^{-t} = 0 \Leftrightarrow t = \ln 10$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$

t	0	$\ln 10$	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	30000	$g(\ln 10)$	0

Từ BBT ta có hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; \ln 10)$.

Vậy tốc độ bán hàng tăng liên tục trong khoảng $t = \ln 10 \approx 2,3$ năm.

Câu 17: Một chất điểm chuyển động trên trục Ox theo phương trình $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$, trong đó x là li độ của chất điểm tại thời điểm t giây. Trong 10 giây đầu tiên, ở thời điểm nào chất điểm bắt đầu chuyển động theo hướng dương của trục Ox ?

Lời giải

Trả lời: 4

Chất điểm chuyển động theo hướng dương khi li độ x tăng hay hàm số $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$ đồng biến.



Xét hàm số $x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$ trên $[0; 10]$.

$$x'(t) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = 4k, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có: $0 \leq t \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq 4k \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{5}{2}$. Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0; k = 1; k = 2 \Rightarrow t \in \{0; 4; 8\}$

t	0	4	8	10
$x'(t)$	–	0	+	–
$x(t)$	2	–2	2	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy chất điểm bắt đầu chuyển động theo chiều dương tại thời điểm $t = 4$ (s).

Câu 18: Nhân dịp Ngày Phụ nữ Việt Nam 20 - 10, câu lạc bộ Mĩ thuật của Minh muốn tổ chức kinh doanh thiệp chúc mừng ngày 20-10 để gây quỹ sinh hoạt cho câu lạc bộ. Mỗi tấm thiệp mua về với giá 10 nghìn đồng. Các bạn trong câu lạc bộ sẽ sáng tác thêm nội dung của thiệp (vẽ thêm hình ảnh người, hoa cỏ, lời chúc...) và sau đó bán lại. Với mức giá bán 25 nghìn đồng cho một tấm thiệp, câu lạc bộ có thể bán được 600 chiếc. Nếu giảm giá bán 1 nghìn đồng mỗi tấm thiệp thì số lượng hàng bán ra sẽ tăng thêm 50 chiếc. Vậy câu lạc bộ nên đặt giá bán bằng bao nhiêu nghìn đồng để gây quỹ được nhiều quỹ sinh hoạt nhất?

Lời giải

Trả lời: 23,5

Gọi x (nghìn đồng) là số tiền giảm giá cho mỗi tấm thiệp, $0 \leq x \leq 25$.

Số lượng tấm thiệp bán ra là $600 + 50x$ (chiếc).

Hàm chi phí cho $600 + 50x$ tấm thiệp là $(600 + 50x) \cdot 10$ (nghìn đồng).

Hàm doanh thu cho $600 + 50x$ tấm thiệp là $(600 + 50x)(25 - x)$ (nghìn đồng).

Khi đó lợi nhuận mà câu lạc bộ thu được là

$$P(x) = (600 + 50x)(25 - x) - (600 + 50x) \cdot 10 = (15 - x)(600 + 50x) = 9\,000 + 150x - 50x^2.$$

Bài toán trở thành, tìm giá trị của x với $0 \leq x \leq 25$ để $P(x) = -50x^2 + 150x + 9\,000$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $P'(x) = -100x + 150 = 0$ khi $x = 1,5$.

Xét trên đoạn $[0; 25]$, ta có: $P(0) = 9\,000$; $P(1,5) = 9\,112,5$; $P(25) = -18\,500$.



Đổi chiều các kết quả vừa tính ta được $P(1,5) = 9\,112,5$ (nghìn đồng) là giá trị lớn nhất của hàm lợi nhuận, khi $0 \leq x \leq 25$.

Vậy câu lạc bộ nên đặt giá bán mới bằng 23,5 nghìn đồng thì sẽ gây được nhiều quỹ sinh hoạt nhất.

Câu 19: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1-x}{x+m-2}$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

Lời giải

Trả lời: -10

Ta có: $y = \frac{1-x}{x+m-2} \Rightarrow y' = \frac{1-m}{(x+m-2)^2}$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$ thì:

$$\begin{cases} 1-m > 0 \\ 2-m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 1$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\} \Rightarrow$ Tổng các giá trị nguyên m thỏa mãn: -10.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3} m - 2 x^3 - m - 2 x^2 + m - 3 x + m^2$$
 nghịch biến trên $-\infty; +\infty$

Lời giải

Trả lời: 3

Với $m = 2$: $y = -x + 4$ luôn NB trên $-\infty; +\infty$. Do đó $m = 2$ thỏa mãn.

Với $m \neq 2$: Hàm số nghịch biến trên $-\infty; +\infty$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m - 2 x^2 - 2 m - 2 x + m - 3 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ m - 2^2 - m - 2 m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m - 2 m - 2 m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2.$$

Vậy $m \leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, mà m nguyên không âm. Do đó $m \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow$ có 3 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S

Lời giải

Trả lời: 3

$$\text{Ta có } y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x-m)^2}.$$



Để thoả mãn ta có $\begin{cases} -m^2 + 2m + 3 > 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 2.$

Vậy $S = \{0; 1; 2\}.$

