



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

I. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D .

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$

II. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$ ta làm như sau:

Bước 1: Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 2: Tính $f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(a); f(b)$.

Bước 3: So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$.

Chú ý:

$$1) y' > 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \begin{cases} \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$



$$2) y' < 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \begin{cases} \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

3. Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

4. Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

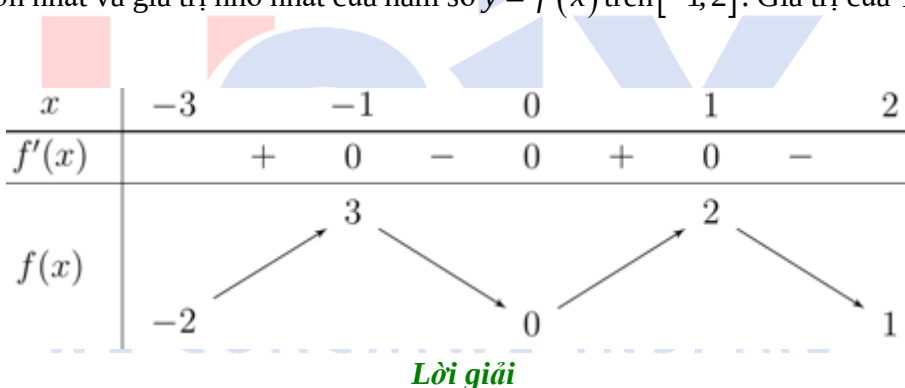
5. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÌM MAX-MIN TRÊN ĐOẠN BẰNG HÀM SỐ CỤ THỂ, BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHO TRÊN ĐOẠN VÀ KHOẢNG.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?



Ta có $M = \max_{[-1; 2]} f(x) = f(-1) = 3$ và $m = \min_{[-1; 2]} f(x) = f(0) = 0$.

Vậy $M + m = 3$.

Câu 2: a) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$.
b) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Lời giải

a) TXĐ: $\mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 + 4x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin [1; \sqrt{3}].$$

$$y(1) = 2; y(\sqrt{3}) = 14$$

$$\Rightarrow \max_{[1; \sqrt{3}]} y = 14 \text{ khi } x = \sqrt{3} \text{ và } \min_{[1; \sqrt{3}]} y = 2 \text{ khi } x = 1.$$



b) ĐS: $\max_{[-1;2]} y = 6$ khi $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ và $\min_{[-1;2]} y = 2$ khi $x = 0$.

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x} = -x - \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{-x^2 + 4}{x^2}$.

Trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 = 0 \\ \frac{3}{2} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ \frac{3}{2} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{6}$; $f(2) = -4$; $f(4) = -5$.

Do hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ nên $\max_{x \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]} f(x) = f(2) = -4$.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}$.

$y(0) = 1$; $y(1) = -1$; $y(2) = 3$.

Suy ra $\min_{[0; 2]} y = -1$.

Câu 5: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2}$ trên $\left[3; 2 + 2\sqrt{2}\right]$. Tính $M - m$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2}$ xác định và liên tục trên $\left[3; 2 + 2\sqrt{2}\right]$.

Ta có $y = x + \frac{2}{x - 2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{2}{(x - 2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \notin \left[3; 2 + 2\sqrt{2}\right] \\ x = 2 + \sqrt{2} \in \left[3; 2 + 2\sqrt{2}\right] \end{cases}$.

Ta có: $y(3) = 5$; $y(2 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$; $y(2 + 2\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2} + 4}{2}$.

Suy ra $M = \frac{5\sqrt{2} + 4}{2}$ và $m = 2 + 2\sqrt{2}$.



$$\text{Vậy } M - m = \frac{5\sqrt{2} + 4}{2} - (2 + 2\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 6: Kí hiệu m và M lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 3]$.
 . Tính giá trị của tỉ số $\frac{M}{m}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$y' = \frac{(2x+1)(x+1) - x^2 - x - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}; \begin{cases} x \in [0; 3] \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có $f(0) = 4; f(1) = 3; f(3) = 4$.

$$\text{Do đó } m = \min_{[0;3]} f(x) = 3; M = \max_{[0;3]} f(x) = 4 \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{4}{3}.$$

Câu 7: Gọi giá trị lớn nhất của hàm số, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ lần lượt là M, m . Tìm $M - 3m$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x} = -x - \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{-x^2 + 4}{x^2}.$$

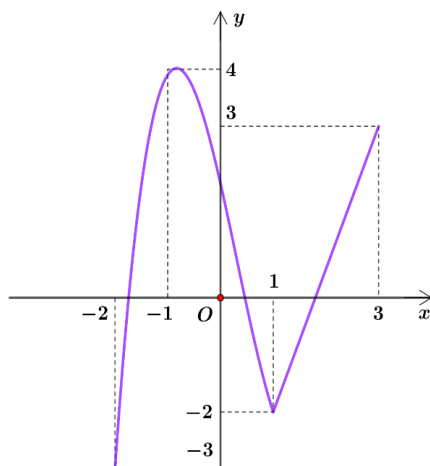
$$\text{Trên khoảng } \left(\frac{3}{2}; 4\right): f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 = 0 \\ \frac{3}{2} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Ta có } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-25}{6}; f(2) = -4; f(4) = -5.$$

Do hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ nên $\max_{x \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]} f(x) = f(2) = -4$.

$\min_{x \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]} f(x) = f(4) = -5$. Hay $M = -4; m = -5$ suy ra $M - 3m = 11$.

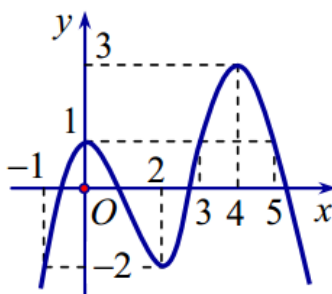
Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị của $2m - 3M$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta xác định được $m = -3$; $M = 4$. Ta có $2m - 3M = -6 - 12 = -18$.

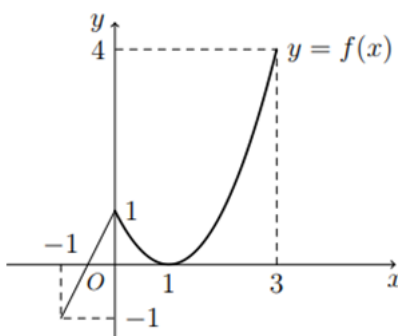
Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 5]$. Giá trị của $M - m$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Dựa vào hình vẽ, ta có $M = 3$; $m = -2 \Rightarrow M - m = 5$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 3]$. Tính $M - m$.



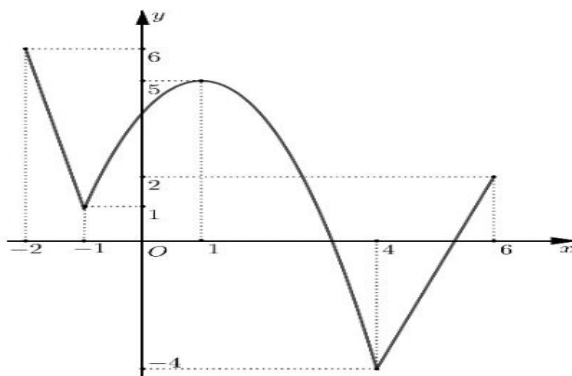
Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-1; 3]$ là -1 tại điểm $x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất trên $[-1; 3]$ là 4 tại điểm $x = 3$. Do đó $M = 4, m = -1$.

Giá trị $M - m = 4 - (-1) = 5$.



Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$. Giá trị của $2M + 3m$ là



Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy: $M = 6, m = -4$.

Vậy giá trị $2M + 3m = 2.6 + 3.(-4) = 0$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$, gọi y_0 là GTNN của hàm số đã cho, đạt được tại điểm x_0 . Tính $6x_0 + y_0^4$.

Lời giải

TXĐ: $D = [-2; 5]$.

Xét hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-2; 5]$

Ta có: $y' = \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}} + \frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}} \quad (-2 < x < 5)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}} + \frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}} = 0$

$\Leftrightarrow (2x-4)\sqrt{-x^2+3x+10} = (2x-3)\sqrt{-x^2+4x+21}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 5 \\ (2x-4)(2x-3) \geq 0 \\ (2x-4)^2(-x^2+3x+10) = (2x-3)^2(-x^2+4x+21) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right] \cup [2; 5) \\ 25(2x-3)^2 = 49(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right] \cup [2; 5) \\ x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{29}{17} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in (-2; 5)$

Xét: $y(-2) = 3; y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}; y(5) = 4 \Rightarrow \min_{[-2; 5]} y = y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}$

Suy ra, $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \sqrt{2} \Rightarrow 6x_0 + y_0^4 = 10$

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra



- a) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$
 b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$
 c) $y = f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$
 d) $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Lời giải

a) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

Tập xác định $D = (0; +\infty)$. Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; e\right]$

Xét $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$, $y(1) = 1$, $y(e) = e - 1$. Do đó $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$ và $M = \max_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$.

b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ có $y' = 1 - 2 \cos x \sin x = 1 - \sin 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Do $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

Mặt khác $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; $\min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = 1$.

c) $y = f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 - 2)2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}$. Ta có $f(-1) = -e^{-2}$; $f(1) = -e^2$; $f(2) = 2e^4$

Vậy $M = \max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 2e^4$; $m = \min_{[-1; 2]} f(x) = f(1) = -e^2$.

d) $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Xét hàm số $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $y' = -2 \sin 2x + 2 \cos x = -4 \sin x \cos x + 2 \cos x = 2 \cos x(-2 \sin x + 1)$.



$$\text{Giải } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $y' = 0$ có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}$.

Ta có $y(0) = 1; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$. Suy ra $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{3}{2}, \min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 1$.

DẠNG 2: TÌM MAX- MIN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 2$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x$ điều kiện $-1 \leq t \leq 1$ hàm số đã cho trở thành $y = f(t) = t^2 - 4t + 2$.

Ta có $f'(t) = 2t - 4, f'(t) < 0$ với $\forall t \in [-1; 1]$ nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$ do đó

$$\min_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(1) = -1 \text{ và } \max_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(-1) = 7.$$

Vậy hàm số đã cho có GTLN là 7 và GTNN là -1.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	3	-3	4	-2	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(\sin x - 1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $\sin x - 1 = t, (-2 \leq t \leq 0)$.

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2; 0]$.

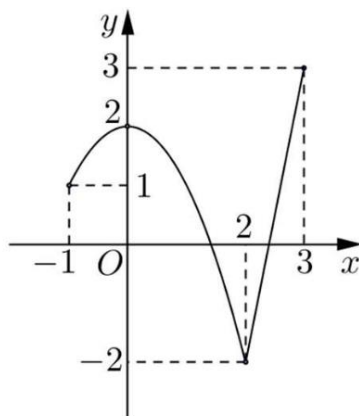
Từ bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2; 0]$ là 3 khi $t = -2$ hay

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(\sin x - 1)$ bằng 3.



Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(-\sin x + 2)$. Giá trị của $M - m$ bằng



Lời giải

Đặt $t = -\sin x + 2$ vì $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow t \in [1; 3]$. Xét hàm số $y = f(t)$ với $t \in [1; 3]$,

Từ đồ thị đã cho, ta có $M = \max_{[1;3]} f(t) = f(3) = 3; \min_{[1;3]} f(t) = f(2) = -2 \Rightarrow M - m = 5$.

DẠNG 3: BÀI TOÁN THỰC TẾ

I. Phương pháp:

Bước 1: Gọi ẩn và xác định điều kiện cho ẩn.

Bước 2: Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.

Bước 3: Xét hàm số biểu thị đại lượng mà đề bài yêu cầu. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên điều kiện của ẩn.

Bước 4: Kết luận.

Chú ý:

Ta cũng có thể sử dụng các bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Một số bất đẳng thức thường dùng.

1. Bất đẳng thức $AM - GM$:

- Cho hai số thực $a, b \geq 0$ ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ hay $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

- Cho ba số thực $a, b, c \geq 0$ ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ hay $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki :

- Cho hai bộ số thực $(a; b), (x; y)$ ta có: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

- Cho hai bộ số thực $(a; b; c), (x; y; z)$ ta có:

$$|ax + by + cz| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a : b : c = x : y : z$.



Câu 17: Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6\text{ cm}$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.

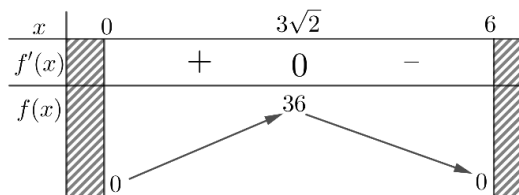
Lời giải

Cách 1.

Gọi chiều dài $AD = 2x (0 < x < 6) \Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x\sqrt{36 - x^2}$.

Xét $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$, ta có $f'(x) = \sqrt{36 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$.



Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 36 cm^2 .

Cách 2.

Đặt $AB = CD = 2x (0 < x < 6)$. Khi đó $AD = \sqrt{DO^2 - AO^2} = \sqrt{36 - x^2}$.

Suy ra $S_{ABCD} = 2x\sqrt{36 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 36$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{36 - x^2}$ hay $x = 3\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 36 cm^2 .

Câu 18: Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B . Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Lời giải

Theo giả thiết :

- Thời gian làm việc của máy A là x ngày.
- Thời gian làm việc của máy B là y ngày.

Nên ta có $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$ (*).

Và $0 < y \leq 6 \Rightarrow 4 \leq x < 10$.

Số tiền lãi $f(x) = x^3 + 2x + 326(10 - x) - 27(10 - x)^3$ (thay (*) vào).

$\Leftrightarrow f(x) = 28x^3 - 810x^2 + 7776x - 23740$ với $x \in [4; 10)$.



Ta có $f'(x) = 84x^2 - 1620x + 7776$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 84x^2 - 1620x + 7776 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \vee x = \frac{72}{7} (l).$$

Bảng biến thiên.

x	4	9	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(4)$	$f(9)$	$f(10)$

Từ BBT ta có $x = 9$ là giá trị cần tìm.

Câu 19: Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25$ m, chiều rộng $AD = 20$ m được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30 m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .

Lời giải

Cách 1.

Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE = x$ (m) (với $0 \leq x \leq 25$).

$$\Rightarrow EM = 25 - x \text{ (m)}.$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25 - x)^2} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$$t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{30} \text{ (h)} \text{ (Với } 0 \leq x \leq 25)$$

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \frac{25 - x}{30\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}.$$

$$\text{Xét } t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \frac{25 - x}{30\sqrt{(25 - x)^2 + 100}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25 - x)^2 + 100} = (25 - x)\sqrt{100 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2((25 - x)^2 + 100) = (25 - x)^2(100 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(25 - x)^2 + 400x^2 - 100(25 - x)^2 - (25 - x)^2 x^2 = 0.$$



$$\Leftrightarrow 4(25-x)^2(x^2-25)+x^2(20^2-(25-x)^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5)+x^2(45-x)\right)=0 \Leftrightarrow x=5$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} t(0)=\frac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5)=\frac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25)=\frac{1+\sqrt{29}}{3} \end{cases}.$$

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (h).

Cách 2.

$$\text{Xét } t(x)=\frac{\sqrt{10^2+x^2}}{15}+\frac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}=\frac{\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30} \text{ (Với } 0 \leq x \leq 25).$$

$$\text{Lại có } \sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2} \geq \sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2} \text{ (do } |\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|).$$

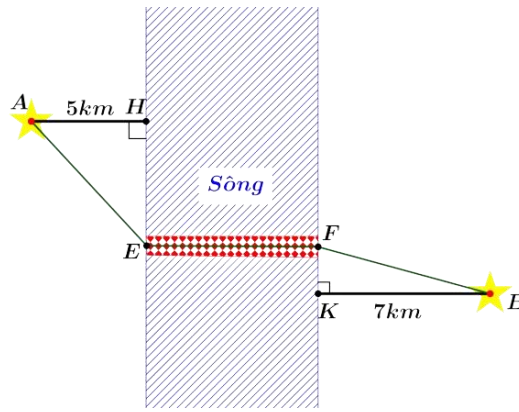
$$\Leftrightarrow \sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2} \geq \sqrt{5(x-5)^2+2000}.$$

$$\text{Do đó } t(x) \geq \frac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30} \geq \frac{\sqrt{2000}}{30} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } t(x)_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ (h) khi và chỉ khi } x=5 \text{ (m).}$$

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (h).

Câu 20: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7km (hình vẽ), biết $HE+KF=24\text{km}$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến km)



Lời giải

Đặt $HE = x$ và $FK = y$, với $x, y > 0$

Ta có: $HE + KF = 24 \Rightarrow x + y = 24$

$$\begin{cases} AE = \sqrt{25 + x^2} \\ BF = \sqrt{49 + y^2} = \sqrt{49 + (24 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận định AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất (vì EF không đổi).

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(24 - x)^2 + 49}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{x - 24}{\sqrt{x^2 - 48x + 625}}, \forall x \in (0; 24).$$

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

Bảng biến thiên

x	0	10	24
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			
	$12\sqrt{5}$		

Vậy GTNN của $f(x)$ bằng $7\sqrt{5}$ tại $x = 10 \Rightarrow BF = 7\sqrt{5} \approx 16 \text{ km}$.

Câu 21: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 3t^2 - t^3$. Tìm thời điểm t (giây) tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

Ta có $v = S'(t) = 6t - 3t^2 = -3(t - 1)^2 + 3 \leq 3, \forall t \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $t = 1$

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại thời điểm $t = 1$ (s).



Câu 22: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 3t^2 - 2t - 4$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm nào vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động được xác định bởi $v(t) = S'(t) = -t^3 + 6t - 2$.

$$\text{Ta có: } v'(t) = -3t^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Do $t > 0$, nên ta có bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$v'(t)$		+	0
$v(t)$		$-2 + 4\sqrt{2}$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại $t = \sqrt{2}$.

Câu 23: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức:

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 24t \quad (t > 0)$$

Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Lời giải

$$\text{Xét: } h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 24t \quad (t > 0)$$

$$\text{Ta có: } h'(t) = -t^2 + 10t + 24$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 10t + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 \\ t = -2 \in (0; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	12	$+\infty$
$h'(t)$		+	0
$h(t)$		$h_{\max}$	

Để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.



Câu 24: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F(x) = \frac{1}{40}x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Lời giải

Xét hàm số : $F(x) = \frac{1}{40}x^2(30-x)$ ($0 < x < 30$).

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{40}(-3x^2 + 60x)$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{40}(-3x^2 + 60x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (0; 30) \\ x = 20 \end{cases}$$

BBT.

x	0	20	$+\infty$
$F'(x)$		+	-
$F(x)$		100	

Ta có huyết áp giảm nhiều nhất $\Leftrightarrow F(x)$ lớn nhất trên $(0; +\infty)$. Dựa vào BBT ta thấy

$\text{Max}_{(0; +\infty)} F(x) = F(20) = 100$ nên liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là $x = 20$.

Câu 25: Đề thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 60cm , thể tích 96000cm^3 . Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành $70000\text{ VNĐ}/\text{m}^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành $100000\text{ VNĐ}/\text{m}^2$. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

Lời giải

Gọi $x, y(m)$ ($x > 0, y > 0$) là chiều dài và chiều rộng của đáy bể

Khi đó theo đề ta suy ra: $0,6xy = 0,096$ hay $y = \frac{0,16}{x}$.

Giá thành của bể cá được xác định theo giá trị hàm số sau:

$$f(x) = 2.0,6\left(x + \frac{0,16}{x}\right).70000 + 100000.x.\frac{0,16}{x}$$

$$\text{Ta có } f(x) = 84000\left(x + \frac{0,16}{x}\right) + 16000$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = 84000\left(1 - \frac{0,16}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$.



x	0	0,4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4) = 83200 \text{ VNĐ}$

Câu 26: Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu.

Lời giải

Gọi x (lít) ($0 < x < 10$) là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$, $x \in (0;10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Xét hàm số $f(x)$ ta có: $f'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -20 \notin (0;10) \end{cases}$$

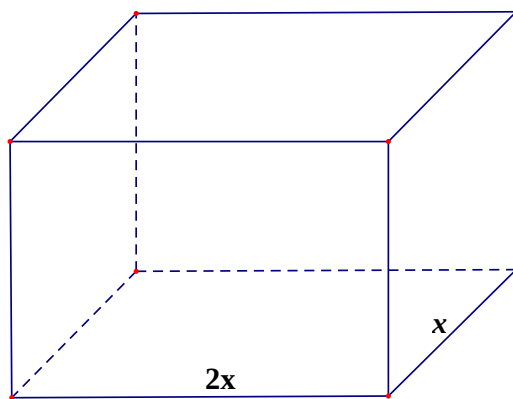
Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}$, $x \in (0;10)$

x	0	4	10	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		20	$+\infty$

Dựa vào BBT ta có sau ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Câu 27: Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là $300 \text{ nghìn đồng/m}^2$ (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh không tính chiều dày của đáy và thành bên). Tính chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn số tiền đến đơn vị triệu đồng).

Lời giải



Gọi chiều rộng của khối hộp là x (m), $x > 0 \Rightarrow$ chiều dài của khối hộp là $2x$ và

chiều cao của khối hộp là $\frac{200}{2x \cdot x} = \frac{100}{x^2}$ (m). Ta có:

Diện tích xung quanh của bể chứa là $S_{xq} = 2 \left(x \cdot \frac{100}{x^2} + 2x \cdot \frac{100}{x^2} \right)$

Diện tích mặt đáy của bể là $S_1 = 2x \cdot x$

Do đó diện tích xây dựng của bể là $S = S_{xq} + S_1 = 2 \left(x \cdot \frac{100}{x^2} + 2x \cdot \frac{100}{x^2} \right) + 2x \cdot x = 2x^2 + \frac{600}{x}$ (m²)

Chi phí xây dựng bể là $C(x) = \left(2x^2 + \frac{600}{x} \right) \cdot 3 \cdot 10^5$ đồng.

Tìm GTNN của $f(x) = 2x^2 + \frac{600}{x}$ khi $x > 0$.

Vì $x > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm ta được

$$f(x) = 2x^2 + \frac{600}{x} = 2x^2 + \frac{300}{x} + \frac{300}{x} \geq 3\sqrt[3]{2 \cdot 300 \cdot 300}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x^2 = \frac{300}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150}. \\ x > 0 \end{cases}$

Do đó $\min_{(0;+\infty)} f(x) = f(\sqrt[3]{150}) = 3\sqrt[3]{180000}$.

Chi phí thấp nhất để xây bể là $\min_{(0;+\infty)} f(x) \cdot 300 = 3\sqrt[3]{180000} \cdot 300 \approx 50,81595$ triệu đồng.

Vậy chi phí thấp nhất để xây bể xấp xỉ là 51 triệu đồng.