



CHƯƠNG

I

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

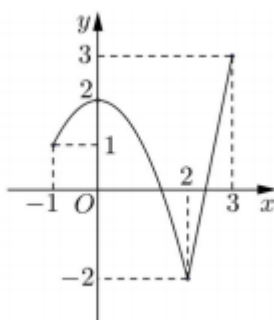
## BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ



### HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

**Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$  là 3.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$  đạt được tại  $x = -2$ .
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(-1; 3)$  là  $-2$ .
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-1; 3)$  là 3.

**Lời giải**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$  là 3 tại  $x = 3$  và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$  là  $-2$  đạt được tại  $x = 2$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(-1; 3)$  là  $-2$  đạt được tại  $x = 2$  và giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-1; 3)$  không tồn tại.

- a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$  là 3
- b) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$  là  $-2$  đạt được tại  $x = 2$ .
- c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(-1; 3)$  là  $-2$
- d) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-1; 3)$  không tồn tại.

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



|      |           |      |                     |           |
|------|-----------|------|---------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-4$ | $-3$                | $+\infty$ |
| $y'$ |           |      | $- \quad 0 \quad +$ |           |
| $y$  |           | $-8$ | $-9$                | $+\infty$ |

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-4;3]$  là  $-8$ .  
 b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-4;3]$  là  $-9$ .  
 c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(-4;+\infty)$  là  $-9$ .  
 d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-4;+\infty)$  là  $+\infty$ .

**Lời giải**

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-4;3]$  là  $-8$  tại  $x = -4$  và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-4;3]$  là  $-9$  đạt được tại  $x = -3$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(-4;+\infty)$  là  $-9$  đạt được tại  $x = -3$  và giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-4;+\infty)$  không tồn tại.

- a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-4;3]$  là  $-8$ .  
 b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[-4;3]$  là  $-9$ .  
 c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $(-4;+\infty)$  là  $-9$ .  
 d) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-4;+\infty)$  không tồn tại.

**Câu 3:**

Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 - 2$ .

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $\mathbb{R}$  là  $-2$ .  
 b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $\mathbb{R}$  là  $-3$ .  
 c) Tập giá trị của hàm số là  $[-3;+\infty)$ .  
 d) Trên đoạn  $[0;1]$ ,  $\max_{[0;1]} y = f(x_A) = y_A$ ;  $\min_{[0;1]} y = f(x_B) = y_B$ . Độ dài  $AB = \sqrt{2}$ .

**Lời giải**

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $\mathbb{R}$  là  $-2$ .

Ta có TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ .

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

|      |           |                     |      |                     |           |
|------|-----------|---------------------|------|---------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$                | $0$  | $1$                 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $- \quad 0 \quad +$ | $0$  | $- \quad 0 \quad +$ |           |
| $y$  | $+\infty$ | $-3$                | $-2$ | $-3$                | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên, hàm số không có giá trị lớn nhất trên  $\mathbb{R}$ .

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $\mathbb{R}$  là  $-3$ .

Từ bảng biến thiên, giá trị của hàm số trên  $\mathbb{R}$  là  $-3$ .



c) Tập giá trị của hàm số là  $[-3; +\infty)$ .

Từ bảng biến thiên, tập giá trị của hàm số là  $[-3; +\infty)$ .

d) Trên đoạn  $[0;1]$ ,  $\max y = f(x_A) = y_A$ ;  $\min y = f(x_B) = y_B$ . Độ dài  $AB = \sqrt{2}$ .

Trên đoạn  $[0;1]$

$\max y = f(0) = -2$ ;  $\min y = f(1) = -3$ . Suy ra  $A(0; -2)$ ,  $B(1; -3)$

Khoảng cách  $AB = \sqrt{2}$ .

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x) = (x^2 - 3x + 1).e^x$

a) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1;4]$  là  $5e^4$ .

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1;4]$  là  $-e$ .

c) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[3;5]$  lần lượt là  $e^3; 11e^5$ .

d) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2;0]$  lần lượt là  $\frac{11}{e^2}; 1$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|
|---------|--------|--------|--------|

a) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1;4]$  là  $5e^4$ .

Ta có:  $y' = (x^2 - x - 2).e^x$ .

$y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2).e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [1;4]$ , hoặc  $x = 2 \in [1;4]$ .

Lại có:  $y(1) = -e$ ,  $y(2) = -e^2$ ,  $y(4) = 5e^4$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số  $y = (x^2 - 3x + 1).e^x$  trên đoạn  $[1;4]$  là  $5e^4$ .

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1;4]$  là  $-e$ .

Ta có:  $y' = (x^2 - x - 2).e^x$ .

$y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2).e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [1;4]$ , hoặc  $x = 2 \in [1;4]$ .

Lại có:  $y(1) = -e$ ,  $y(2) = -e^2$ ,  $y(4) = 5e^4$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = (x^2 - 3x + 1).e^x$  trên đoạn  $[1;4]$  là  $-e^2$ .

c) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[3;5]$  lần lượt là  $e^3; 11e^5$ .

Ta có:  $y' = (x^2 - x - 2).e^x$ .

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [3;5]$ , hoặc  $x = 2 \notin [3;5]$ .

Lại có:  $y(3) = e^3$ ,  $y(5) = 11e^5$ .

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = (x^2 - 3x + 1).e^x$  trên đoạn  $[3;5]$  lần lượt là  $11e^5$  và  $e^3$ .

d) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2;0]$  lần lượt là  $\frac{11}{e^2}; 1$ .

Ta có:  $y' = (x^2 - x - 2).e^x$ .

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in [-2;0]$ , hoặc  $x = 2 \notin [-2;0]$ .



Lại có:  $y(-2) = 11e^{-2}$ ,  $y(-1) = 5e^{-1}$ ,  $y(0) = 1$ .

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = (x^2 - 3x + 1) \cdot e^x$  trên đoạn  $[-2; 0]$  lần lượt là  $\frac{5}{e}$  và 1.

**Câu 5:** Cho hàm số  $f(x) = 2\cos x + x\sqrt{2}$ .

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = 2\sin x + \sqrt{2}$ .

b) Phương trình  $f'(x) = 0$  có đúng 2 nghiệm trên đoạn  $[0; \pi]$ .

c) Tính  $f(0) = 2$  và  $f(\pi) = -2 + \pi\sqrt{2}$ .

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\pi\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|

a) Sai.

Ta có  $f(x) = 2\cos x + x\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = -2\sin x + \sqrt{2}$ .

b) Đúng.

Theo câu c), phương trình  $f'(x) = 0$  có đúng 2 nghiệm trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $x = \frac{\pi}{4}$ ;  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

c) Đúng.

Ta có  $f(0) = 2\cos 0 + 0 \cdot \sqrt{2} = 2$  và  $f(\pi) = 2\cos \pi + \pi\sqrt{2} = -2 + \pi\sqrt{2}$ .

d) Đúng.

$f(x) = 2\cos x + x\sqrt{2}$

Ta tính  $f(0) = 2$ ,  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 2,5$ ,  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 1,9$ ;

$f(\pi) = -2 + \pi\sqrt{2} \approx 2,4$ .

$M = \max_{[0; \pi]} f(x) = \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2}$ ,  $m = \min_{[0; \pi]} f(x) = -\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4} \cdot \sqrt{2}$ .

Vậy  $M + m = \pi\sqrt{2}$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $f(x) = e^{2x} + x$ .

a) Tính  $f(0) = 1$  và  $f(\ln 2) = 4 + \ln 2$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = e^{2x} + 1$ .

c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $[0; 1]$  là 2

d) Giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \ln 2]$  là  $4 + \ln 2$ .

**Lời giải.**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

a) Đúng. Tính  $f(0)$  và  $f(\ln 2)$ :

$f(0) = e^0 + 0 = 1$ .

$f(\ln 2) = e^{2\ln 2} + \ln 2 = 4 + \ln 2$ .

b) Sai. Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = 2e^{2x} + 1$ .

c) Sai. Vì  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên phương trình  $f'(x) = 0$  vô nghiệm trên  $[0; 1]$

d) Đúng.



$$f(0) = 1$$

$$f(\ln 2) = e^{2\ln 2} + \ln 2 = 4 + \ln 2$$

Vì hàm số  $f(x) = e^{2x} + x$  là một hàm đồng biến nên giá trị lớn nhất của hàm số sẽ đạt tại  $x = \ln 2$ .

Giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \ln 2]$  là  $4 + \ln 2$ .

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = \ln(2x-1) - x^2$ .

a) Tập xác định của hàm số đã cho là  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $y' = \frac{1+2x-4x^2}{2x-1}$ .

c) Phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là  $-1$ .

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

a) Điều kiện:  $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ . Suy ra  $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

**Chọn ĐÚNG.**

$$b) y = \ln(2x-1) - x^2 \Rightarrow y' = \frac{2+2x-4x^2}{2x-1}$$

**Chọn SAI.**

$$c) y' = \frac{2+2x-4x^2}{2x-1} = 0 \Rightarrow 2+2x-4x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-0,5 \end{cases}$$

**Chọn ĐÚNG.**

d) Ta có bảng biến thiên:

|         |           |    |           |
|---------|-----------|----|-----------|
| $x$     | 0.5       | 1  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0  | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | -1 | $-\infty$ |

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là  $-1$ .

**Chọn ĐÚNG.**

**Câu 8:** Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ .

a)  $f'(x) = 4x^3 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

b) Phương trình  $f'(x) = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

c)  $f(0) = -3; f(2) = 5$ .

d) Giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0; 2]$  bằng  $-3$ .

**Lời giải**

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|

a) Đúng.

Ta có:  $f'(x) = 4x^3 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

b) Đúng.



Ta có:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ .

c) Đúng.

Ta có  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = -3; f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$ .

d) Sai

Ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn  $[0; 2]$ .

| $x$     | $-\infty$ | 0  | 1  | 2 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|----|---|-----------|
| $f'(x)$ |           | -  | 0  | + |           |
| $f(x)$  |           | -3 | -4 | 5 |           |

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[0; 2]$  là -4.

**Câu 9:** Cho hàm số  $f(x) = 2 \sin x + x$ .

a)  $f(0) = 0; f(\pi) = \pi$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = -2 \cos x + 1$ .

c) Số nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $[0; 3\pi]$  là 6.

d) Giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

a) Đúng

$f(0) = 0; f(\pi) = \pi$

b) Sai

$f(x) = 2 \sin x + x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos x + 1$

c) Sai

$f(x) = 2 \sin x + x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos x + 1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Vì  $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{8\pi}{3} \right\}$

d) Đúng

Khi  $x \in [0; \pi] \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

Ta có  $f(0) = 0; f(\pi) = \pi; f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$



Vậy giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$  có đồ thị (C).

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = -8x^3 + 8x + 1$ .

c) Tập nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  là  $S = \{-1; 0; 1\}$ .

d) Giá trị lớn nhất của  $f(x)$  là 1.

**Lời giải**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

a) **Đúng**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

b) **Sai**

$$f'(x) = -8x^3 + 8x$$

c) **Đúng**

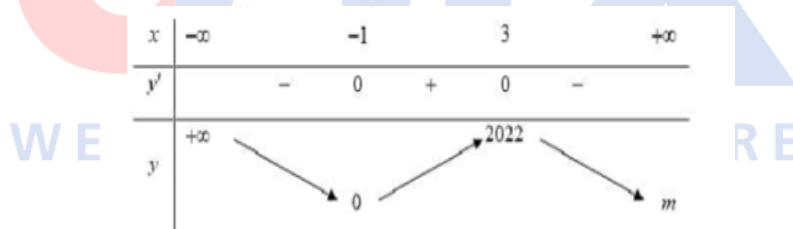
$$f'(x) = -8x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

d) **Sai**

$$f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1 = -2(x^2 - 1)^2 + 3 \leq 3$$

Vậy giá trị lớn nhất bằng 3 khi  $x = \pm 1$ .

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ,  $m$  là số thực tùy ý



a) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên  $[-1; 3]$  bằng 2022 đạt tại  $x = 3$ .

b) Hàm số  $y = f(x - 2024)$  đồng biến trên  $(-2025; -2021)$ .

c) Đồ thị hàm số  $y = f(x) - 2$  có tọa độ điểm cực tiểu là  $(-1; -2)$ .

d) Bất phương trình  $f(x) \geq a$  (tham số  $a$ ) có nghiệm trên đoạn  $[-1; 3]$  khi  $a \leq 2022$ .

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

a) **Đúng.**

Ta có dựa vào bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên  $[-1; 3]$  bằng 2022 đạt tại  $x = 3$ .

b) **Sai.**

$$\text{Ta có } y' = f'(x - 2024)$$

$$\text{Hàm số đồng biến khi } y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x - 2024) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x - 2024 \leq 3 \Leftrightarrow 2023 \leq x \leq 2027.$$

Hàm số  $y = f(x - 2024)$  đồng biến trên khoảng  $(2023; 2027)$



c) Đúng.

Ta có  $y' = f'(x)$  nên hàm số  $y = f(x) - 2$  đạt cực tiểu tại  $x_{CT} = -1 \Rightarrow y_{CT} = f(-1) - 2 = -2$

Đồ thị hàm số  $y = f(x) - 2$  có tọa độ điểm cực tiểu là  $(-1; -2)$ .

d) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên bất phương trình  $f(x) \geq a$  (tham số  $a$ ) có nghiệm trên đoạn  $[-1; 3]$  khi  $a \leq 2022$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$ .

a) Tập xác định của hàm số đã cho là  $D = \mathbb{R}$ .

b) Đạo hàm của hàm số  $f(x)$  là  $f'(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{e^x}$ .

c) Phương trình  $f'(x) = 0$  có đúng 1 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 4]$ .

d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên  $[0; 4]$  bằng  $\frac{m}{e^n}$ , ( $m, n$  nguyên) khi đó  $3m + 4n$  bằng 39

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

Ta có  $f'(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x}$ . Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \Rightarrow f(0,5) = -e^{-1/2} \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = 9e^{-3} \end{cases}$  và  $f(0) = 1; f(4) = 20e^{-4}$

$\max_{[0;4]} f(x) = f(3) = \frac{9}{e^3} \Rightarrow m = 9, n = 3 \Rightarrow 3m + 4n = 39$ .

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = f(x) = e^{x+\sqrt{16-x^2}}$ .

a)  $f'(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt.

b)  $f(-4) = \frac{1}{e^4}$ .

c)  $f'(x) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right) e^{x+\sqrt{16-x^2}}, \forall x \in [-4; 4]$ .

d) Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  là  $e^{a+b\sqrt{c}}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  và  $c$  là số nguyên tố). Khi đó  $a + 2b + 3c = 10$ .

**Lời giải**

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|

a) Sai.

Ta có  $f'(x) = e^{x+\sqrt{16-x^2}} \cdot (x + \sqrt{16-x^2})' = e^{x+\sqrt{16-x^2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right), \forall x \in (-4; 4)$ .

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+\sqrt{16-x^2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{16-x^2} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ .

Vậy phương trình  $f'(x) = 0$  chỉ có một nghiệm.



b) Đúng.

Ta có  $f(-4) = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$ .

c) Sai.

Ta có  $f'(x) = e^{x+\sqrt{16-x^2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right), \forall x \in (-4; 4)$ .

d) Đúng

Hàm số  $y = f(x) = e^{x+\sqrt{16-x^2}}$  có tập xác định  $D = [-4; 4]$  và

$$f'(x) = e^{x+\sqrt{16-x^2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right), \forall x \in (-4; 4).$$

Phương trình  $f'(x) = 0$  chỉ có một nghiệm  $x = 2\sqrt{2} \in (-4; 4)$ .

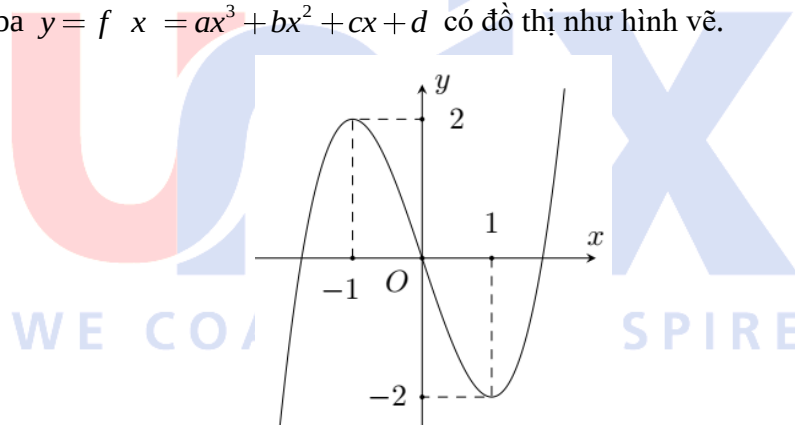
Ta có  $f(-4) = e^{-4}, f(4) = e^4, f(2\sqrt{2}) = e^{2\sqrt{2}+\sqrt{8}} = e^{4\sqrt{2}}$ .

So sánh 3 giá trị này ta có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  lần lượt là  $e^{4\sqrt{2}}$  và  $e^{-4}$ .

Do đó tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  là  $e^{-4+4\sqrt{2}}$ .

Kết hợp giả thiết ta suy ra  $a = -4, b = 4, c = 2$  nên  $a + 2b + 3c = 10$ .

**Câu 14:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $-1; 1$

b) Giá trị cực đại của hàm số là 2.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  là -1.

d) Giá trị của hàm số tại  $x = 5$  là  $f(5) = 100$ .

**Lời giải**

|        |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|--------|---------|--------|--------|

Dựa vào đồ thị ta thấy

a) Sai. Hàm số nghịch biến trên  $-1; 1$ .

b) Đúng.

c) Sai. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  là -2.



d) Sai. Ta có 
$$\begin{cases} f - 1 = 2 \\ f' - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b - c + d = 2 \\ 3a^2 - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra  $f(x) = x^3 - 3x$ , do đó  $f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110$

**Câu 15:** Cho hàm số  $f(x) = 2\sin x + 1$ .

a)  $f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = 2\cos x + 1$ .

c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  là  $\frac{\pi}{4}$ .

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  là  $-1$ .

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

**a) Đúng**

Ta có  $f(x) = 2\sin x + 1 \Rightarrow f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ .

**b) Sai**

Vì  $f'(x) = 2\cos x$ .

**c) Sai**

Vì  $f'(x) = 2\cos x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Do đó nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  là  $\frac{\pi}{2}$ .

**d) Đúng**

Ta có  $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  nên  $-1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Do đó Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  là  $-1$ .

**Câu 16:** Cho hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$ .

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = \cos x - \sin x$ .

b) Giả sử  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  khi đó  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$ .

c) Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$  là bằng  $a\sqrt{b}$ , với  $a, b$  là các số nguyên dương.

Khi đó  $b - a = 2$ .

d) Tổng các nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên khoảng  $(0; 3\pi)$  bằng  $\frac{15\pi}{4}$ .

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

**a) Đúng.**  $f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$ .



b) Sai. Ta có:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{4}$$

c) Sai. Ta có:  $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

Vì  $x \in \left[ 0; \frac{3\pi}{4} \right] \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[ \frac{\pi}{4}; \pi \right] \Rightarrow 0 \leq \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq \sqrt{2}$ .

Và  $y = \sqrt{2}$  khi  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  hay  $x = \frac{\pi}{4}$ . Suy ra  $a = 1, b = 2 \Rightarrow b - a = 1$ .

d) Đúng.  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

Mà  $x \in (0; 3\pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{9\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$ .

Vậy tổng các nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên khoảng  $(0; 3\pi)$  bằng  $\frac{15\pi}{4}$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$ .

a) Tập xác định của hàm số đã cho là  $D = (-3; 3)$ .

b) Hàm số đã cho có đạo hàm  $f'(x) = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$  với  $-3 < x < 3$ .

c) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là  $\frac{9}{2}$ .

d) Phương trình  $2f(x) - 1 = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

**Lời giải**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|

a) Sai.

Điều kiện  $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ .

Tập xác định của hàm số đã cho là  $D = [-3; 3]$ .

b) Đúng.

Hàm số đã cho có đạo hàm  $f'(x) = \sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$  với  $-3 < x < 3$ .

c) Đúng.

Ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$  nên

$f(-3) = 0; f(3) = 0; f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{9}{2}; f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{9}{2}$ .

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là  $\frac{9}{2}$ .

d) Sai.



Phương trình  $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{9-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ -x^4 + 9x^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 2,9954 \\ x \approx 0,1669. \end{cases}$

Suy ra phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  có hai nghiệm phân biệt.

**Câu 18:** Cho hàm số  $y = f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ .

a)  $f(0) = 7$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = (2x - 5)e^x$ .

c) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$  và đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ .

d) Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0; 2]$  lần lượt là 7 và  $3e$ .

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

a) Đúng

b) Sai

$$f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = (x^2 - 3x + 2)e^x$$

c) Sai

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$ . Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(2; +\infty)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

d) Đúng

Hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0; 2]$  có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(T/m) \\ x = 1(T/m) \end{cases}$

Ta có:  $f(0) = 7$ ;  $f(1) = 3e$ ;  $f(2) = e^2$ .

Vậy Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0; 2]$  lần lượt là 7 và  $3e$ .

**Câu 19:** Cho hàm số  $y = f(x) = \ln(4ex - x^2)$ .

a)  $f(e) = 3$ .

b) Hàm số có tập xác định là  $[0; 4e]$ .

c) Phương trình  $f'(x) = 0$  có một nghiệm  $x = 2e$ .

d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[1; 3e]$  có dạng  $a \ln 2 + b$  thì  $a + b = 4$ .

**Lời giải**

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|--------|---------|---------|

a)  $f(e) = \ln(4e \cdot e - e^2) = \ln(3e^2) = \ln 3 + 2$ .

b) Điều kiện xác định:  $4ex - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4e$ . Vậy tập xác định là  $(0; 4e)$ .

c) Ta có  $f'(x) = \frac{4e - 2x}{4ex - x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2e.$$



d) Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x) = \ln(4ex - x^2)$ .

|      |   |             |              |             |      |
|------|---|-------------|--------------|-------------|------|
| $x$  | 0 | 1           | $2e$         | $3e$        | $4e$ |
| $y'$ |   | +           | 0            | 0           |      |
| $y$  |   | $\ln(4e-1)$ | $2\ln 2 + 2$ | $\ln 3 + 2$ |      |

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[1; 3e]$  là  $2\ln 2 + 2$ .

Do đó:  $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4.$

**Câu 20:** Cho hàm số  $f(x) = -\sin x - \frac{1}{2}x$

a)  $f(2\pi) = \pi$ .

b)  $f'(x) = -\cos x - \frac{1}{2}$ .

c) Phương trình  $f'(x) = 0$  có 2 nghiệm phân biệt trong khoảng  $[0; \pi]$ .

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên  $[0; \pi]$  là  $-\frac{\pi}{2}$ .

**Lời giải**

|        |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|--------|---------|--------|--------|

a) Sai

$$f(2\pi) = -\sin(2\pi) - \frac{1}{2}2\pi = -\pi.$$

b) Đúng

$$f'(x) = -\cos x - \frac{1}{2}.$$

c) Sai

$$f'(x) = -\cos x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có được phương trình có 1 nghiệm trong đoạn  $[0; \pi]$  là nghiệm  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

d) Sai

Vì phương trình  $f'(x) = 0$  có 1 nghiệm  $x = \frac{2\pi}{3}$  trong đoạn  $[0; \pi]$  nên ta xét:

$$f(0) = 0; f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}; f(\pi) = -\frac{\pi}{2}. \text{ Từ đây suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn}$$

$$[0; \pi] \text{ là } -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}.$$



**Câu 21:** Cho hàm số  $f(x) = \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2$ .

a)  $f(0) = 1$ .

b)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ .

c) Trên đoạn  $[0; 2\pi]$  phương trình  $f'(x) = 0$  có đúng một nghiệm  $\frac{\pi}{2}$ .

d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[0; 2\pi]$  là 2.

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|
|---------|--------|--------|---------|

Ta có:  $f(x) = \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = 1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 + \sin x$ .

a)  $f(0) = 1$ .

b)  $f'(x) = \cos x$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ .

c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Trên đoạn  $[0; 2\pi]$  phương trình  $f'(x) = 0$  có 2 nghiệm:  $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}$ .

d) Trên đoạn  $[0; 2\pi]$  ta có:

| x    | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|------|---|-----------------|------------------|--------|
| f(x) | 1 | 2               | 0                | 1      |

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[0; 2\pi]$  là 2 khi  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**Câu 22:** Cho hàm số  $f(x) = -2 \sin x - x$ .

a)  $f(0) = 0$ ;  $f(\pi) = -\pi$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = 2 \cos x + 1$ .

c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{2\pi}{3}$ .

d) Giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $-\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|
|---------|--------|---------|---------|

a)  $f(0) = -2 \sin 0 - 0 = 0$  và  $f(\pi) = -2 \sin \pi - \pi = -\pi$ . Do đó a) đúng.

b) Đạo hàm của  $f(x) = -2 \sin x - x$  là  $f'(x) = -2 \cos x - 1$ . Do đó b) sai.

c) Ta có:  $f'(x) = -2 \cos x - 1$  khi đó  $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2 \cos \frac{2\pi}{3} - 1 = 0$

Suy ra  $x = \frac{2\pi}{3}$  là nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$ . Do đó c) đúng.

d) Ta có:  $f(x) = -2 \sin x - x$ ,



$$f'(x) = -2\cos x - 1 \text{ có nghiệm } x = \frac{2\pi}{3} \in [0; \pi], \quad f(0) = 0; \quad f(\pi) = -\pi,$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

Do đó, giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $-\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ . **Do đó d) đúng.**

**Câu 23:** Cho hàm số  $f(x) = x - \sin 2x$ .

a)  $f(0) = 0; \quad f(\pi) = \pi$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$ .

c) Tổng các nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$  bằng  $\frac{\pi}{6}$ .

d) Giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

a)  $f(0) = 0 - \sin 2 \cdot 0 = 0$  và  $f(\pi) = \pi - \sin 2\pi = \pi$ . **Do đó a) đúng.**

b) ) Đạo hàm của  $f(x) = x - \sin 2x$  là  $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$ . **Do đó b) sai.**

c) Ta có: c)  $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$ .

Khi đó  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\cos 2\frac{\pi}{6} = 1 - 2\cos \frac{\pi}{3} = 0$  và  $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - 2\cos 2\frac{5\pi}{6} = 1 - 2\cos \frac{5\pi}{3} = 0$ ,

Suy ra  $x = \frac{\pi}{6}$  và  $x = \frac{5\pi}{6}$  là nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$ .

**Do đó c) sai.**

d) Ta có:  $f(x) = x - \sin 2x$ ,  $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$  có nghiệm  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi]$

Suy ra  $f(0) = 0; \quad f(\pi) = \pi; \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Do đó, giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ . **Do đó d) đúng.**

**Câu 24:** Cho hàm số  $f(x) = 2\sin x - x$ .

a)  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 - \frac{3\pi}{2}$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = -2\cos x - 1$ .

c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$  là  $\frac{\pi}{3}$ .

d) Giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$  là  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ .

**Lời giải**

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|--------|---------|---------|



a)  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$ ;  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -2 - \frac{3\pi}{2}$ .

b)  $f'(x) = 2\cos x - 1$ .

c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vì  $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$  nên  $x = \frac{\pi}{3}$ .

d)  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$ ;  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 - \frac{3\pi}{2}$ ;  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ .

Vậy  $\max_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ .

**Câu 25:** Cho hàm số  $f(x) = \ln x - 2x^2$ ,  $\forall x \in (0; +\infty)$ .

a) Hàm số trên luôn đồng biến trên tập xác định.

b)  $f(1) = -2$ ;  $f(e^2) = 2 - 2e^4$ .

c) Hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị.

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $[1; e^2]$  là  $-\frac{5}{2} - \ln 2$ .

**Lời giải**

|        |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|--------|---------|--------|--------|

**a) Sai**

Ta có:  $y' = f'(x) = (\ln x - 2x^2)' = \frac{1}{x} - 4x \geq 0$  khi  $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ . Do đó hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

**b) Đúng**

Ta có:  $f(1) = \ln 1 - 2 \cdot 1^2 = -2$

$f(e^2) = \ln e^2 - 2 \cdot (e^2)^2 = 2 - 2e^4$ .

**c) Sai**

Ta có:  $f'(x) = \frac{1}{x} - 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ (KTMDK)} \end{cases}$ . Vậy hàm số có một điểm cực trị.

**d) Sai**



Ta có: 
$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(e^2) = 2 - 2e^4 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Vậy } \begin{cases} \min_{[1;e^2]} f(x) = 2 - 2e^4 \\ \max_{[1;e^2]} f(x) = -\ln 2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nên  $\min_{[1;e^2]} f(x) + \max_{[1;e^2]} f(x) = \frac{3}{2} - \ln 2 - 2e^4$ .

**Câu 26:** Cho hàm số  $f(x) = \sin 2x + x$ .

a)  $f(\pi) - f(0) = \pi$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = \cos 2x + 1$ .

c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{\pi}{3}$  hoặc  $\frac{2\pi}{3}$ .

d) Giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\pi$ .

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

a)  $f(0) = 0$  và  $f(\pi) = \pi \Rightarrow f(\pi) - f(0) = \pi$ .

b) Đạo hàm của  $f(x) = \sin 2x + x$  là  $f'(x) = 2 \cos 2x + 1$ .

c)  $f'(x) = 2 \cos 2x + 1$  khi đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{\pi}{3}$  hoặc  $\frac{2\pi}{3}$ .

d)  $f(x) = \sin 2x + x$ ,

$$f'(x) = 0 \text{ có nghiệm là } \frac{\pi}{3} \text{ hoặc } \frac{2\pi}{3} \text{ trên đoạn } [0; \pi].$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$$f(\pi) = \pi$$

Do đó, Giá trị lớn nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $\pi$ .

**Câu 27:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - x$ .



a)  $f(0) = \frac{1}{2}; f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1.$

c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $(0; \pi)$  là  $\frac{3\pi}{4}.$

d) Giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  là  $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}.$

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|
|---------|--------|---------|--------|

a) Ta có  $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{4}\right) - 0 = \frac{1}{2};$

$f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$

**Do đó a) đúng.**

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1.$

**Do đó b) sai.**

c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z});$

Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $(0; \pi)$  là  $\frac{3\pi}{4}.$

**Do đó c) đúng.**

d) Phương trình  $f'(x) = 0$  vô nghiệm trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

Ta có  $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{4}\right) - 0 = \frac{1}{2};$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}.$

**Do đó d) sai.**

**Câu 28:** Cho hàm số  $f(x) = 2x - 2 \sin x$

a)  $f(0) = 0; f(\pi) = 2\pi$



- b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = 2 + 2 \cos x$
- c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  trên đoạn  $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$  là  $2\pi$
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  là  $\pi + 2$

**Lời giải**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

**a) Đúng**

Vì  $f(0) = 2 \cdot 0 - 2 \sin 0 = 0$ ;  $f(\pi) = 2\pi - 2 \sin \pi = 2\pi$

**b) Sai**

Ta có  $f'(x) = 2 - 2 \cos x$

**c) Đúng**

Ta có:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

Trên đoạn  $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$  thì:  $\frac{3\pi}{2} \leq k2\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{5}{4} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = 2\pi$

**d) Sai**

Ta có:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$

Trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  thì:  $-\frac{\pi}{2} \leq k2\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{1}{4} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 0$

Vì:  $f(0) = 0$ ;  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + 2$ ;  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 2$  nên giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  bằng  $-\pi + 2$

**Câu 29:** Cho hàm số  $y = f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$

a)  $f(0) = 1$ .

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 3x + 2) \ln 2}$

c) Nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  là  $\frac{3}{2}$ .

d) Trên đoạn  $[-1; 0]$  hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

a) Hàm số có tập xác định  $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ .

Ta có:  $f(0) = \log_2(0^2 - 3 \cdot 0 + 2) = 1$ .

b)  $f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2) \ln 2}$

c)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ .

d)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin [-1; 0]$ .

$f(-1) = \log_2 6$

$f(0) = 1 < \log_2 6$



Vậy  $\min_{[-1;0]} f(x) = 1$ .

**Câu 30:** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

- a) Tập xác định của hàm số  $f(x)$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- b) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 3)$
- c) Hàm số  $f(x)$  có 2 điểm cực trị
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; 9\right]$  bằng  $\frac{7}{3}$

**Lời giải**

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$  có tập xác định  $D = (0; +\infty)$ . **Vậy a) sai**

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (TM)}$$

Xây dựng bảng biến thiên.

Theo bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ . **Vậy b) đúng**

Theo bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 cực trị. **Vậy c) sai**

Theo bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm số đạt tại  $x = \frac{1}{2}$  hoặc  $x = 9$ . Ta có:  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$  và  $f(9) = \frac{7}{3}$ . Như vậy GTLN của hàm số  $f(x) = \frac{7}{3}$ . **Vậy d) Đúng**

**Câu 31:** Cho hai đồ thị hàm số  $f(x) = 2\sin x - \sqrt{3}x$ .

- a)  $f(0) = \sqrt{3}$ ;  $f(\pi) = 0$ .
- b) Đạo hàm của hàm số đã cho là  $f'(x) = (2\sin x - \sqrt{3}x)' = 2\cos x - \sqrt{3}$ .
- c) Trên đoạn  $[0; \pi]$  phương trình  $f'(x) = 0$  có 5 nghiệm.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $-\sqrt{3}\pi$ .

**Lời giải**

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|

a) **Sai**. Ta có  $f(0) = 2\sin(0) - \sqrt{3} \cdot 0 = 0$

$$f(\pi) = 2\sin(\pi) - \sqrt{3} \cdot \pi = -\sqrt{3}\pi$$

b) **Đúng**.  $f'(x) = (2\sin x - \sqrt{3}x)' = 2\cos x - \sqrt{3}$ .

c) **Sai**.

$$f'(x) = 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy trên đoạn  $[0; \pi]$  phương trình  $f'(x) = 0$  có 1 nghiệm.

d) **Đúng**. Bảng biến thiên:

|     |   |                 |       |
|-----|---|-----------------|-------|
| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\pi$ |
|-----|---|-----------------|-------|



|         |   |   |   |
|---------|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
|---------|---|---|---|

$$f(0) = 0$$

Ta có:  $f(\pi) = -\sqrt{3}\pi$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là  $-\sqrt{3}\pi$ .

**Câu 32:** Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được  $x$  mét vải lụa ( $1 \leq x \leq 20$ ). Tổng chi phí sản xuất  $x$  mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:  $C(x) = x^3 - 3x^2 - 60x + 200$  (nghìn đồng). Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 300 nghìn đồng/mét. Gọi  $B(x)$  là số tiền bán được và  $L(x)$  là lợi nhuận thu được khi bán  $x$  mét vải lụa.

a) Biểu thức tính  $B(x)$  theo  $x$  là  $B(x) = 300x$  (nghìn đồng).

b) Biểu thức tính  $L(x)$  theo  $x$  là  $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 360x - 200$  (nghìn đồng).

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa.

d) Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được trong một ngày là 2700 nghìn đồng.

**Lời giải**

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|

a) Sai.  $B(x) = 300x$  (nghìn đồng).

b) Đúng. Ta có:  $L(x) = B(x) - C(x) = 300x - (x^3 - 3x^2 - 60x + 200) = -x^3 + 3x^2 + 360x - 200$  (nghìn đồng).

c) Sai. Ta có  $L'(x) = -3x^2 + 6x + 360$ , ( $1 \leq x \leq 20$ ).  $L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -10 (L) \end{cases}$ .

Xét:  $L(12) = 2824$ ,  $L(1) = 162$ ,  $L(20) = 200$ .

Vậy  $L(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = 12$  hay sản xuất và bán ra mỗi ngày 12 mét vải lụa để đạt lợi nhuận tối đa.

d) Sai. Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa có thể đạt được là 2824 nghìn đồng.

**Câu 33:** Anh B chế tạo một bể cá có dạng khối hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích  $0,096 \text{ m}^3$ , chiều cao  $h = 0,6 \text{ m}$ , chiều rộng  $x$ , chiều dài  $y$ , với  $x > 0, y > 0$ . Anh B dùng loại kính để làm các mặt bên có giá 70.000 đồng/ $\text{m}^2$  và loại kính để làm mặt đáy có giá 100.000 đồng/ $\text{m}^2$ . Mọi chi phí khác xem như không đáng kể. Khi đó

a) Hàm số biểu thị  $y$  theo  $x$  là  $y = \frac{0,16}{x}$ .

b) Chi phí mua kính để làm đáy bể là 11200 đồng.

c) Biểu thức tính chi phí làm các mặt xung quanh là  $C_{xq} = 84000 \cdot \left(x + \frac{0,16}{x}\right)$ .

d) Chi phí làm bể cá thấp nhất là 100000 đồng.

**Lời giải**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|



a) Đúng.

Thể tích khối hộp hình chữ nhật:  $V = xyh = 0,6xy = 0,096 \Rightarrow y = \frac{0,16}{x}$

Vậy  $y = \frac{0,16}{x}$

b) Sai.

Diện tích đáy bể là  $S_d = xy = 0,16m^2$ .

Chi phí mua kính để làm đáy bể là  $C_d = 10000.S_d = 16000$  đồng

c) Đúng.

Diện tích các mặt xung quanh:  $S_{xq} = 2(0,6x + 0,6y) = 1,2 \cdot \left(x + \frac{0,16}{x}\right)$

Biểu thức tính chi phí làm các mặt xung quanh là  $C_{xq} = 84000 \cdot \left(x + \frac{0,16}{x}\right)$ .

d) Sai.

Chi phí làm bể cá:  $C(x) = C_{xq} + C_d = 84000 \cdot \left(x + \frac{0,16}{x}\right) + 16000, x > 0$

Chi phí làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi  $\left(x + \frac{0,16}{x}\right)$  đạt giá trị nhỏ nhất

Xét hàm số  $f(x) = x + \frac{0,16}{x} = \frac{x^2 + 0,16}{x}, x > 0$

$$\bullet f'(x) = \frac{x^2 - 0,16}{x^2}$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 0,16 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

• Bảng biến thiên:

|         |           |               |           |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| $x$     | 0         | $\frac{2}{5}$ | $-\infty$ |
| $f'(x)$ |           | 0             | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\frac{4}{5}$ | $+\infty$ |

$$\bullet \text{ Suy ra: } \min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

Vậy chi phí thấp nhất để làm bể cá là:  $C = \frac{84000 \cdot 4}{5} + 16000 = 83200$  đồng.

**Câu 34:** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000.

a) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng



- b) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng  
c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng  
d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc

**Lời giải**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là  $x$  (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng  $x$  (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm  $100x$  chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là:  $3000 - 100x$  chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là:  $12 + x$  (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số  $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$  trên  $(0; +\infty)$ .

Ta có:  $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$ .

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  trên  $(0; +\infty)$  ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi  $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39000 đồng.

**Câu 35:** Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng

- a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống  
b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.  
c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.  
d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

Gọi số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng để công ty thu được thu nhập cao nhất là  $x$  (lần)  $(0 \leq x \leq 30)$

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là  $2 + 0,1x$  (triệu đồng)

Số căn hộ mỗi tháng được thuê là  $150 - 5x$  (căn hộ)

Thu nhập của công ty đạt được là  $(2 + 0,1x)(150 - 5x)$

Đặt  $f(x) = (2 + 0,1x)(150 - 5x)$

$$f'(x) = 0,1(150 - 5x) - 5(2 + 0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$f(0) = 300; f(5) = 312,5; f(30) = 0 \Rightarrow \underset{x \in [0;30]}{\text{Max}} f(x) = f(5) = 312,5 \text{ khi } x = 5$$

Vậy để có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê với giá  $2 + 0,1.5 = 2,5$  (triệu đồng).



**Câu 36:** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2m với vận tốc ban đầu 88,2 km/h là  $h(t) = at^2 + bt + c$  ( $a < 0$ ) trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu vật được phóng lên. Biết sau 1 giây kể từ lúc được phóng lên vận tốc của vật đạt được là 14,7 m/s.

- a) Độ cao đạt được của vật sau 2 giây kể từ lúc bắt đầu được phóng lên là 31,4 m.  
 b) Sau 3 giây vật đạt độ cao lớn nhất.  
 c) Vận tốc của vật tăng trong khoảng thời gian  $t \in [0; 3]$ .  
 d) Vận tốc của vật lúc chạm đất làm tròn đến hàng phần trăm là  $-25,29$  (m/s).

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

a) Đổi  $88,2 \text{ km/h} = 24,5 \text{ m/s}$ .

Theo giả thiết ta có  $h(0) = 2 \Rightarrow c = 2$ .

Vận tốc của vật tại thời điểm  $t$  giây là  $v(t) = h'(t) = 2at + b$ .

Có  $v(0) = 24,5 \text{ m/s} \Rightarrow b = 24,5$

Sau 1 giây kể từ lúc được phóng lên vận tốc của vật đạt được là 14,7 m/s nên ta có  $v(1) = 14,7 \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 14,7 \Rightarrow a = -4,9$  (vì  $b = 24,5$ ).

Suy ra  $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ .

Vậy ta có độ cao đạt được của vật sau 2 giây là  $h(2) = 31,4 \text{ m}$ .

b) Xét hàm số:  $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ . Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .

Ta có:  $h'(t) = -9,8t + 24,5$ ;  $h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 24,5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $t$     | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$   | $+\infty$ |
| $h'(t)$ |           | +               | -         |
| $h(t)$  | $-\infty$ | $\frac{261}{8}$ | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại  $t = \frac{5}{2}$

Vậy thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất là  $t = \frac{5}{2}$  giây.

c) Vật tăng tốc khi  $v(t) = -9,8t + 24,5 > 0 \Leftrightarrow t < \frac{5}{2}$ . Do đó vật tăng tốc trong khoảng thời gian từ 0 đến 2,5 giây.

d) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là  $v(t) = h'(t) = 24,5 - 9,8t$  (m/s)

Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là  $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$  hay  $t_0 = \frac{35 + 3\sqrt{145}}{14} \approx 5,08$  (giây).



Vận tốc của vật lúc chạm đất là  $v(t_0) = 24,5 - 9,8 \cdot t_0 = -25,29 \text{ (m/s)}$ .

**Câu 37:** Một cửa hàng kinh doanh rau tươi ước tính doanh thu bởi hàm số  $f(x) = x^2 - 29000x + 1000100000$  và tiền lãi thu được là  $g(x) = 1000x + 100000$  với  $x$  là giá bán cho mỗi  $kg$  rau tươi. Biết doanh thu bằng tổng tiền lãi và tiền vốn. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

- a)  $g(0) = 100000$ .
- b)  $f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .
- c) Tiền vốn tính bằng công thức  $f(x)$ .
- d) Giá bán cho mỗi  $kg$  rau sao cho cửa hàng phải bỏ vốn ra ít nhất là  $x = 15000$ .

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

a) Mệnh đề a) đúng, vì  $g(0) = 1000 \cdot 0 + 100000 = 100000$ .

b) Mệnh đề b) sai, vì  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$  tức  $(14500; +\infty)$ .

c) Mệnh đề c) sai, vì tiền vốn tính bằng công thức  $f(x) - g(x)$ .

d) Mệnh đề d) đúng vì:

Ta có tiền vốn bỏ ra cho bởi hàm số  $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 30000x + 1000000000$  với  $x > 0$ .

Khi đó  $h'(x) = 2x - 30000000$ .

Cho  $h'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 30000000 = 0 \Rightarrow x = 15000$ .

Bảng biến thiên

|         |            |           |           |
|---------|------------|-----------|-----------|
| $x$     | 0          | 15000     | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |            | -         | 0         |
|         |            | -         | +         |
| $h(x)$  | 1000000000 | 775000000 | $+\infty$ |

Vậy giá bán mỗi  $kg$  rau là  $x = 15000$  thì cửa hàng bỏ ra vốn ít nhất.

**Câu 38:** Nhà máy SAMSUNG Bắc Ninh trung bình bán được 1500 chiếc sạc dự phòng mỗi tháng với giá 320 nghìn đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 10 nghìn đồng, số lượng sạc dự phòng bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 sạc dự phòng mỗi tháng. Hàm chi phí hàng tháng là  $C(x) = 20000 - 10x$  (nghìn đồng) trong đó  $x$  là số sạc dự phòng bán ra trong một tháng. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

- a) Nếu nhà sản xuất bán mỗi sản phẩm với giá 270 nghìn đồng thì sẽ bán được trung bình 2000 chiếc sạc dự phòng mỗi tháng.
- b) Hàm doanh thu của nhà sản xuất khi bán được  $x$  sản phẩm là  $R(x) = -0,1x^2 + 470x$ .
- c) Hàm lợi nhuận của nhà sản xuất khi bán được  $x$  sản phẩm là  $P(x) = -0,1x^2 + 460x - 20000$
- d) Để lợi nhuận là lớn nhất thì nhà sản xuất phải bán được 2300 sản phẩm mỗi tháng.

**Lời giải**

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|



a) Gọi  $p$  (nghìn đồng) là giá một chiếc sạc dự phòng;  $x$  là số sạc dự phòng được bán trong mỗi tháng. Ta cần xác định hàm cầu  $p = p(x)$ . Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của  $x$  tỉ lệ với tốc độ thay đổi của  $p$  nên hàm số  $p = p(x)$  là hàm số bậc nhất: Gọi  $p(x) = ax + b$ .

Giá  $p_1 = 320$  ứng với  $x_1 = 1500$  và giá  $p_2 = 310$  ứng với  $x_2 = 1500 + 100 = 1600$ .

Do đó đường thẳng  $p = ax + b$  đi qua hai điểm  $(1500; 320)$  và  $(1600; 310)$ . Ta có hệ:

$$\begin{cases} 1500a + b = 320 \\ 1600a + b = 310 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,1 \\ b = 470 \end{cases}$$

Khi đó  $p(x) = -0,1x + 470$ . Suy ra  $x = -10p + 4700$ .

Với  $p = 270$  thì số lượng sạc dự phòng được bán ra là  $x = -10 \cdot 270 + 4700 = 2000$ .

b) Hàm doanh thu khi bán được  $x$  sạc dự phòng là

$$R(x) = x \cdot p = x(-0,1x + 470) = -0,1x^2 + 470x$$

c) Hàm lợi nhuận của nhà sản xuất khi bán được  $x$  sản phẩm là

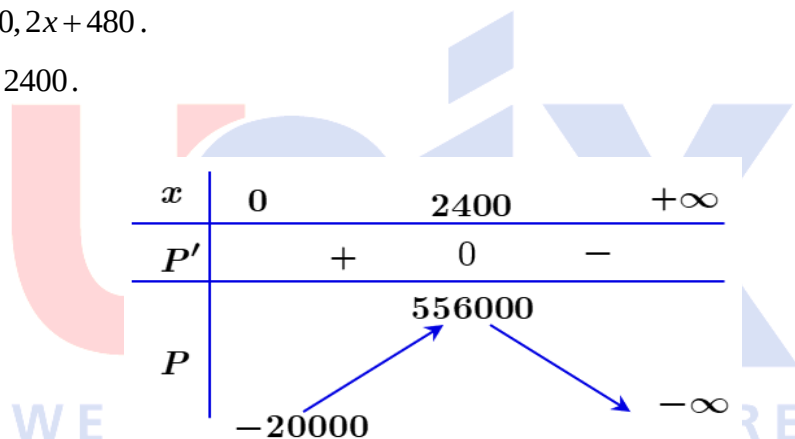
$$P(x) = R(x) - C(x) = -0,1x^2 + 470x - (20000 - 10x) = -0,1x^2 + 480x - 20000.$$

d) Bài toán yêu cầu trở thành tìm  $x$  để  $P(x)$  đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:  $P'(x) = -0,2x + 480$ .

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2400.$$

BBT



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để đạt được lợi nhuận lớn nhất thì nhà sản xuất phải bán được 2400 sản phẩm mỗi tháng với lợi nhuận lớn nhất là 556 triệu đồng.

**Câu 39:** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 400$ ) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là  $R(x) = 150x - 0,5x^2 + 0,001x^3$  (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là  $C(x) = 50 + 0,2x$  (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

a) Hàm số doanh thu  $R(x)$  là hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

b) Chi phí sản xuất cho  $x$  sản phẩm là  $50 + 0,2x^2$ .

c) Lợi nhuận  $P(x)$  khi sản xuất và bán hết  $x$  sản phẩm là  $100x - 0,7x^2 + 0,001x^3$ .

d) Lợi nhuận  $P(x)$  lớn nhất đạt được khi sản xuất là 88 sản phẩm.

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

a) Ta có  $R(x) = 150x - 0,5x^2 + 0,001x^3$ .

$\Rightarrow R'(x) = 0,003x^2 - x + 150$ . Phương trình  $R'(x) = 0$  vô nghiệm nên hàm số doanh thu  $R(x)$  là hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ . Vậy a) đúng.



b) Chi phí sản xuất cho  $x$  sản phẩm là  $x.C(x) = 50x + 0,2x^2$ . Vậy **b) sai**.

c) Doanh thu khi bán hết  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 400$ ) là:  $R(x) = 150x - 0,5x^2 + 0,001x^3$ .

Lợi nhuận  $P(x)$  khi sản xuất và bán hết  $x$  sản phẩm là:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - (x.C(x)) = (150x - 0,5x^2 + 0,001x^3) - (50x + 0,2x^2) \\ &= 150x - 0,5x^2 + 0,001x^3 - 50x - 0,2x^2 \\ &= 100x - 0,7x^2 + 0,001x^3. \text{ Vậy c) đúng.} \end{aligned}$$

d) Ta có  $P'(x) = 100 - 1,4x + 0,003x^2$ .

$$\text{Ta có } P'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 1,4x + 0,003x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2,2718}{0,006} \approx 378,63 \in [0; 400] \\ x_2 = \frac{0,5282}{0,006} \approx 88,03 \in [0; 400] \end{cases}$$

Ta kiểm tra lợi nhuận tại  $x = 88; x = 378; x = 0; x = 400$

$$\text{Với } x = 88 \Rightarrow P(88) = 4060,672.$$

$$\text{Với } x = 378 \Rightarrow P(378) = -8208,648.$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow P(0) = 0.$$

$$\text{Với } x = 400 \Rightarrow P(400) = -8000.$$

Vậy lợi nhuận lớn nhất đạt được khi sản xuất 88 sản phẩm. Vậy **d) đúng**.

**Câu 40:** Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón. Gọi  $P(x)$  là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán  $x$  (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm  $P'(x)$  gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức:  $P'(x) = 17 - 0,025x$  với  $0 \leq x \leq 100$

Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán  $x$  (tấn) sản phẩm trong một tuần là  $P(x) = 17x - 0,0125x^2 + C$  với  $C$  là một hằng số bất kỳ

b) Có thể tính được lợi nhuận của nhà máy thu được khi bán 120 tấn sản phẩm trong tuần.

c) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

d) Nếu nhà máy bán được từ 1,3 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

**Lời giải**

|        |        |         |        |
|--------|--------|---------|--------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|--------|--------|---------|--------|

a) Sai:  $C = -24$  không phải  $C$  bất kỳ.

$$P(x) = \int P'(x)dx = \int (17 - 0,025x)dx = 17x - 0,0125x^2 + C \text{ với } 0 \leq x \leq 100$$

Vì nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần nên

$$\text{Với } x = 0 \text{ thì } P(x) = -24 \text{ suy ra } P(0) = -24 \Leftrightarrow C = -24 \Rightarrow P(x) = 17x - 0,0125x^2 - 24$$

b) Sai: Chưa có công thức tính  $P'(x)$  khi  $x > 100$  Công thức  $P'(x)$  đề cho chỉ áp dụng được khi  $0 \leq x \leq 100$

c) Đúng: Khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần thì  $x = 80$  và  $P(80) = 1256$  triệu đồng.

d) Sai: Nhà máy chỉ bắt đầu có lãi khi  $P(x) > 0 \Rightarrow 17x - 0,0125x^2 - 24 > 0 \Rightarrow 1,41 < x < 1358,5$



Vậy nếu  $1,3 \leq x \leq 1,41$  nhà máy vẫn có thể bị lỗ.

**Câu 41:** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số  $N(t) = -t^3 + 15t^2$ ,  $0 \leq t \leq 15$ , trong đó  $N$  là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và  $t$  là thời gian (tuần).

- a) Ở tuần thứ 4, có 176 người bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.
- b) Số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó là 50000 người.
- c) Tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh) ở tuần thứ 3 lớn hơn tuần thứ 2.
- d) Virus lây lan nhanh nhất ở tuần thứ 10.

**Lời giải**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|

a) Với  $t = 4$  thì  $N(4) = 176$ .

Vậy số người bị nhiễm bệnh ở địa phương đó ở tuần thứ 4 là 17600 người.

Vậy a) **sai**.

b) Ta cần tìm giá trị lớn nhất của  $N(t)$ .

Ta có: Hàm số  $N(t)$  xác định và liên tục trên  $[0;15]$ .

$$N'(t) = -3t^2 + 30t.$$

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}.$$

$$N(0) = 0, N(10) = 500, N(15) = 0.$$

Do đó, số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó là 50000 người.

Vậy b) **đúng**.

c) Tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh) được biểu thị bằng hàm số

$$N'(t) = -3t^2 + 30t.$$

Ta có:  $N'(3) = 63$ ,  $N'(2) = 48$ . Suy ra  $N'(3) > N'(2)$  nên tốc độ lây lan của virus ở tuần thứ 3 lớn hơn tuần thứ 2.

Vậy c) **đúng**.

d) Ta cần tìm giá trị lớn nhất của  $N'(t)$ .

Ta có: Hàm số  $N'(t)$  xác định và liên tục trên  $[0;15]$ .

$$N''(t) = -6t + 30.$$

$$N''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5.$$

$$N'(0) = 0, N'(5) = 75, N'(15) = -225. \text{ Do đó, virus lây lan nhanh nhất ở tuần thứ 5.}$$

Vậy d) **sai**.

**Câu 42:** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao ( mét) của một vật thể sau thời gian  $t$  giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu 39 m/s là  $h(t) = 5 + 39t - 5t^2$ , chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên.

- a) Độ cao của vật thể tại  $t = 0$  là 5m.
- b) Vận tốc của vật thể sau 2 giây là 39m / s.
- c) Vật thể đạt độ cao lớn nhất bằng 81,05 mét tại thời điểm  $t = 3,9$  giây.
- d) Vận tốc của vật thể lúc vật chạm đất sắp xỉ  $-40,26(m / s)$



**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

**a) Đúng**

Độ cao vật tại thời điểm  $t = 0$  là  $h(0) = 5$ .

**b) Sai**

Ta có  $v(t) = h'(t) = 39 - 10t$ .

Vận tốc của vật sau 2 giây là  $v(2) = 19 \text{ m/s}$ .

**c) Đúng**

Vì  $h(t)$  là hàm số bậc hai có hệ số  $a = -5 < 0$  nên  $h(t)$  đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm  $t = \frac{-b}{2a} = 3,9$  (giây). Khi đó độ cao lớn nhất của vật là  $h(3,9) = 81,05 \text{ (m)}$ .

**d) Đúng**

Vật thể chạm đất khi độ cao bằng 0

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 39t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-39 + \sqrt{1621}}{-10} (l) \\ t = \frac{-39 - \sqrt{1621}}{-10} (n) \end{cases}$$

Khi đó vận tốc của vật thể là  $v\left(\frac{39 + \sqrt{1621}}{10}\right) \approx -40,26 \text{ (m/s)}$ .

**Câu 43:** Giả sử doanh số bán hàng (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới được cho bởi hàm số  $f(t) = \frac{500}{1 + 5e^{-2t}}, t \geq 0$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó hàm số  $f'(t)$  sẽ biểu thị tốc độ bán hàng.

**a)** Đường thẳng  $y = 0$  là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(t)$ .

**b)**  $f(0) < f(1)$ .

**c)** Hàm số  $f(t)$  có đạo hàm  $f'(t) = \frac{50000}{1 + e^{-2t}^2}$ .

**d)** Tốc độ bán hàng của sản phẩm đạt cực đại sau khoảng 8 năm.

**Lời giải:**

|        |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|--------|---------|--------|--------|

**a) Sai.**

Do  $t \geq 0$  nên chỉ có giới hạn dần về  $+\infty$ .

$$\text{Xét } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{500}{1 + 5e^{-2t}} = \frac{500}{\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + 5e^{-2t}} = \frac{500}{1} = 500$$

Do đó hàm số  $f(t)$  có tiệm cận ngang  $y = 500$ .

**b) Đúng.**



Ta có: 
$$\begin{cases} f(0) = \frac{250}{3} \\ f(1) \approx 298.2 \end{cases} \text{ nên } f(0) < f(1).$$

c) Sai.

Ta có:  $f(t) = \frac{500}{1 + 5e^{-2t}}, t \geq 0$  nên

$$f'(t) = \frac{-500 \cdot 1 + 5e^{-2t} \cdot (-2)}{(1 + 5e^{-2t})^2} = \frac{-500 - 10e^{-2t}}{(1 + 5e^{-2t})^2} = \frac{-5000e^{-2t}}{(1 + 5e^{-2t})^2}, t \geq 0.$$

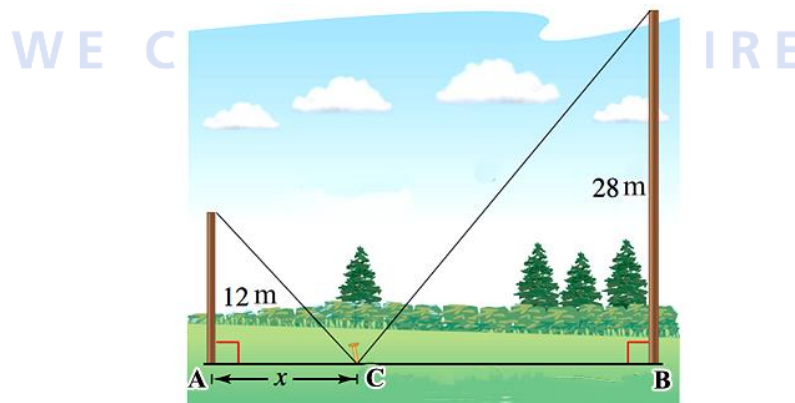
d) Sai.

Ta có:  $f''(t) = \frac{-10000e^{-2t} \cdot (1 + 5e^{-2t}) + 100000e^{-2t} \cdot 2}{(1 + 5e^{-2t})^3}, t \geq 0$

$$= \frac{-10000e^{-2t} + 50000e^{-2t}}{(1 + 5e^{-2t})^3}, t \geq 0$$

Khi đó:  $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-2} \approx 0,805$ . Nên tốc độ bán hàng của sản phẩm đạt cực đại sau khoảng 0,805 năm.

**Câu 44:** Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây, gắn vào một cọc duy nhất nổi từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Gọi  $x$  là khoảng cách từ cột cao 12 m đến cọc.



a) Để tổng chiều dài của dây ngắn nhất thì  $x \in (0; 30)$ .

b) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là  $\sqrt{1684 + x^2}$ .

c) Tổng chiều dài của dây là  $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$ .

d) Tổng chiều dài ngắn nhất của dây là 48,5 m. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

**Lời giải**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

a) Rõ ràng để tổng chiều dài dây ngắn nhất thì cọc phải nằm trong khoảng giữa hai cây cột nên  $x \in (0; 30)$ .



b)  $AC = x \Rightarrow BC = 30 - x$  nên chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là  $\sqrt{28^2 + (30 - x)^2} = \sqrt{1684 - 60x + x^2}$ .

c) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 12 m là  $\sqrt{12^2 + x^2} = \sqrt{144 + x^2}$  suy ra tổng chiều dài của sợi dây là  $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$ .

d) Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$  với  $x \in [0; 30]$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{144 + x^2}} + \frac{x - 30}{\sqrt{1684 - 60x + x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{1684 - 60x + x^2} = (30 - x)\sqrt{144 + x^2}$$

$$\Rightarrow x^2(1684 - 60x + x^2) = (30 - x)^2(144 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 640x^2 + 8540x - 129600 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 9; x = -\frac{45}{2}$$

Do  $x \in [0; 30]$  nên ta nhận  $x = 9$

$$\text{Ta có } f(0) \approx 53,04; f(9) = 50; f(30) = 60,31$$

Vậy chiều dài ngắn nhất của dây là 50 m.

**Câu 45:** Một hạt chuyển động trên một đường thẳng có gắn một trục tọa độ với gốc tọa độ là vị trí hạt bắt đầu chuyển động. Tọa độ của hạt trên trục tại thời điểm  $t$  (đơn vị: giây) kể từ khi xuất phát được cho bởi công thức  $x(t) = 2t - 3\ln(t+1)$  (đơn vị: mét),  $t \geq 0$ . Hàm số  $v(t) = x'(t)$  (đơn vị: mét/giây) biểu thị vận tốc chuyển động của hạt.

a) Vận tốc ban đầu của hạt là 1 m/s.

b) Hạt đứng yên tại thời điểm  $t = 0,5$  s.

$$\text{c) } v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}.$$

d) Quãng đường mà hạt đi được trong 3 giây đầu tiên là 1,84 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|

a) Sai

$$\text{Phương trình biểu thị vận tốc chuyển động của hạt là } v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}.$$

$$\text{Vận tốc ban đầu của hạt là } v(0) = -1 \text{ (m/s)}.$$

b) Đúng.

$$\text{Hạt đứng yên nên } v(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = 0,5 \text{ (s)}.$$

c) Đúng.

$$v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}.$$

d) Đúng

$$\text{Xét hàm số } x(t) = 2t - 3\ln(t+1) \text{ trên } [0; 3].$$

$$\text{Ta có } x'(t) = 2 - \frac{3}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$



Bảng biến thiên:

|         |   |                        |              |
|---------|---|------------------------|--------------|
| $t$     | 0 | $\frac{1}{2}$          | 3            |
| $x'(t)$ | - | 0                      | +            |
| $x(t)$  | 0 | $1 - 3\ln \frac{3}{2}$ | $6 - 6\ln 2$ |

Do đó quãng đường mà hạt đi được trong 3 giây đầu là:

$$2 \left| x \left( \frac{1}{2} \right) \right| + x(3) = 2 \left| 1 - 3\ln \frac{3}{2} \right| + 6 - 3\ln 4 = 4 + 6\ln \frac{3}{2} - 3\ln 4 \approx 2,27$$

**Câu 46:** Ông Bình dự định dùng 40 m lưới để rào xung quanh khu vườn hình chữ nhật của mình. Gọi  $x$  m là chiều dài của khu vườn  $x > 0$ .

- a) Chu vi của khu vườn là 40 m.
- b) Chiều rộng của khu vườn là  $20 - x$  m.
- c) Diện tích khu vườn là  $S_x = -x^2 + 40x$  m<sup>2</sup>.
- d) Diện tích lớn nhất của khu vườn là 100 m<sup>2</sup>.

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

**a) Đúng**

Phần xung quanh khu vườn hình chữ nhật chính là chu vi của hình chữ nhật.  
Do đó chu vi khu vườn là 40 m.

**b) Đúng**

Vì chu vi khu vườn là 40 m nên

$$(\text{Chiều dài} + \text{chiều rộng}) \cdot 2 = 40$$

Suy ra chiều rộng khu vườn là  $20 - x$  m

**c) Sai**

Diện tích khu vườn = Chiều dài  $\times$  chiều rộng

$$\Rightarrow S_x = x(20 - x) = -x^2 + 20x.$$

**d) Đúng**

$$S'_x = -2x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên



|         |   |    |           |   |
|---------|---|----|-----------|---|
| $x$     | 0 | 10 | $+\infty$ |   |
| $S'(x)$ |   | +  | 0         | - |
| $S(x)$  | 0 |    | 100       |   |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy diện tích lớn nhất bằng  $100 \text{ m}^2$ .

**Câu 47:** Công ty X chuyên sản xuất một loại sản phẩm, bộ phận sản xuất ước tính rằng với  $q$  sản phẩm được sản xuất trong một tháng thì tổng chi phí sẽ là  $C(q) = 8q^2 + 40q + 1400$  (nghìn đồng) và mỗi sản phẩm công ty bán với giá  $P(q) = 1400 - 2q$  (nghìn đồng).

- a) Chi phí mỗi tháng công ty phải bỏ ra để sản xuất 50 sản phẩm là 23.400 nghìn đồng.
- b) Lợi nhuận bán được  $q$  sản phẩm là  $F(q) = -10q^2 + 1440q - 1400$  (nghìn đồng).
- c) Lợi nhuận cao nhất trong một tháng của công ty là hơn 50.000 (nghìn đồng).
- d) Nếu số lượng bán ra trong một tháng nằm trong khoảng từ 60 đến 70 thì lợi nhuận sẽ được ước tính trong khoảng 44.200 đến 44.840 (nghìn đồng).

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

**a) Đúng.**

Chi phí mỗi tháng công ty phải bỏ ra để sản xuất 50 sản phẩm là

$$C(50) = 8 \cdot 50^2 + 40 \cdot 50 + 1400 = 23.400.$$

**b) Sai.**

Lợi nhuận bán được  $q$  sản phẩm là

$$F(q) = q(1400 - 2q) - (8q^2 + 40q + 1400) = -10q^2 + 1360q - 1400 \text{ (nghìn đồng)}.$$

**c) Sai.**

Xét hàm số  $F(q) = -10q^2 + 1360q - 1400$

|        |       |       |           |
|--------|-------|-------|-----------|
| $q$    | 0     | 68    | $+\infty$ |
| $F(q)$ | -1400 | 44840 | $-\infty$ |

Từ BBT, lợi nhuận cao nhất trong một tháng của công ty là 44.840 (nghìn đồng).

**d) Đúng.**

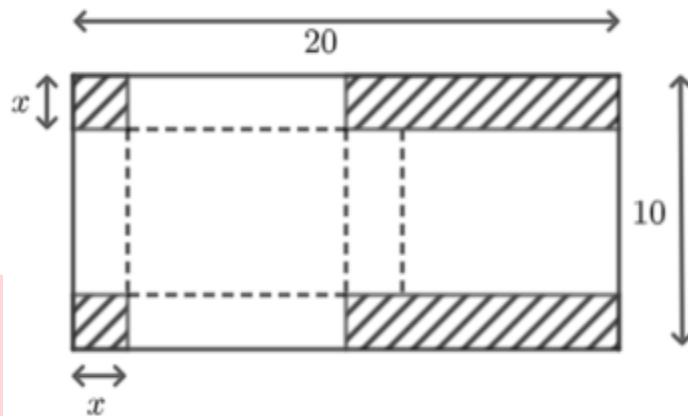
Xét hàm số  $F(q) = -10q^2 + 1360q - 1400$  trên  $(60; 70)$ .



| $q$    | 60    | 68    | 70    |
|--------|-------|-------|-------|
| $F(q)$ | 44200 | 44840 | 44800 |

Từ BBT, nếu số lượng bán ra trong một tháng nằm trong khoảng từ 60 đến 70 thì lợi nhuận sẽ được ước tính trong khoảng 44.200 đến 44.840 (nghìn đồng).

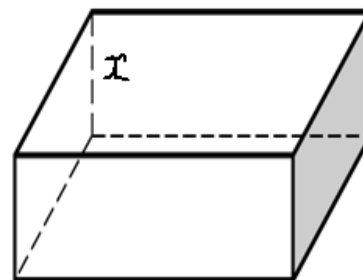
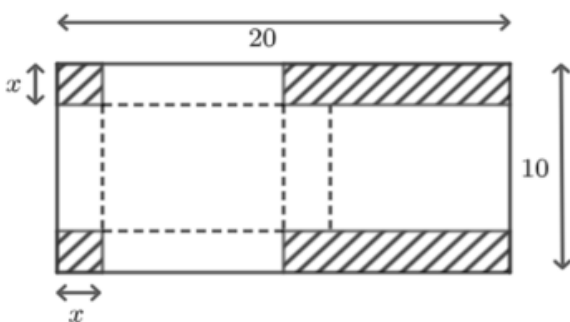
**Câu 48:** Cho miếng bìa hình chữ nhật với kích thước  $20\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ . Bạn Huy cắt bỏ hai hình vuông nhỏ có cạnh  $x(\text{cm})$  và hai hình chữ nhật (Phần gạch sọc như hình vẽ) rồi gấp theo đường nét đứt và dán các mép để được một cái hộp. Gọi  $x(\text{cm})$  là chiều cao của cái hộp đó.



- Đáy của hộp lần lượt có kích thước là  $5 - x$ ;  $10 - x$  cm .
- Biểu thức thể tích của hộp là  $V = 2x^3 - 30x^2 + 100x$  cm<sup>3</sup> .
- Thể tích lớn nhất của hộp bằng 96,4 cm<sup>3</sup> . (làm tròn đến hàng phần mười).
- Để thể tích hộp là lớn nhất, bạn Huy phải cắt bỏ các miếng bìa có tổng diện tích là  $51,2(\text{cm}^2)$  . (làm tròn đến hàng phần mười).

**Lời giải**

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|



**a) Sai**

Đáy của hộp lần lượt có kích thước là  $10 - 2x$ ;  $10 - x$  cm .



b) Đúng

Thể tích của hộp là  $V = x(10 - 2x)(10 - x) = 2x^3 - 30x^2 + 100x \text{ cm}^3$ .

c) Sai

Xét hàm số  $V = 2x^3 - 30x^2 + 100x \text{ cm}^3$  với  $x \in [0; 5]$ .

Ta có  $V' = 6x^2 - 60x + 100$ ;  $V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 2,113 \in [0; 5] \\ x \approx 7,888 \notin [0; 5] \end{cases}$ .

Ta có BBT:

|      |   |       |      |   |
|------|---|-------|------|---|
| $x$  | 0 | 2,113 | 5    |   |
| $V'$ |   | +     | 0    | - |
| $V$  |   |       | 96,2 |   |
|      | 0 |       |      | 0 |

Thể tích lớn nhất của hộp bằng  $96,2 \text{ cm}^3$ . (làm tròn đến hàng phần mười).

d) Đúng

Diện tích cắt bỏ 2 hai vuông nhỏ là  $2x^2 = 2 \cdot 2,113^2 = 8,929538 \text{ cm}^2$ .

Diện tích cắt bỏ 2 hai hình chữ nhật là  $2 \cdot 10 \cdot x = 20 \cdot 2,113 = 42,26 \text{ cm}^2$ .

Tổng diện tích đã cắt bỏ là  $8,929538 + 42,26 = 51,189538 \text{ cm}^2$ .

**Câu 49:** Cây đậu Hà Lan khi trồng chiều cao 3 centimét. Gọi  $h(t)$  là độ cao tính bằng centimét của cây đậu Hà Lan tại thời điểm  $t$  kể từ khi được trồng, với  $t$  tính theo tuần. Khảo sát cho thấy tốc độ tăng chiều cao của cây đậu Hà Lan sau khi trồng là  $h'(t) = -0,02t^3 + 0,3t^2$  (centimét/tuần).

a) Hàm số  $h(t)$  có công thức là  $h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3$  (centimét/tuần).

b) Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu Hà Lan đó kéo dài 15 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây đậu Hà Lan đó là 88 centimét.

d) Vào thời điểm cây đậu Hà Lan đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao của cây là 53 centimét.

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

a) Đúng.

$$h(t) = \int h'(t)dt = \int (-0,02t^3 + 0,3t^2)dt = -0,005t^4 + 0,1t^3 + C.$$

Ta có  $h(0) = 3 \Leftrightarrow C = 3$ .

$$\text{Vậy } h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3 + 3.$$

b) Đúng.

Xét hàm số  $h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3 + 3$  ( $t \geq 0$ ).

Ta có  $h'(t) = -0,02t^3 + 0,3t^2$ .

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 15 \end{cases}.$$



Bảng biến thiên

|         |   |        |           |
|---------|---|--------|-----------|
| $t$     | 0 | 15     | $+\infty$ |
| $h'(t)$ | + | 0      | -         |
| $h(t)$  | 3 | 87,375 | $-\infty$ |

Từ BBT ta thấy giai đoạn tăng trưởng của cây lúa kéo dài 15 tuần.

**c) Sai.**

Dựa vào BBT ta thấy chiều cao tối đa của cây lúa là 87,375 centimét.

**d) Đúng.**

Tốc độ cây lúa phát triển tại thời điểm  $t > 0$  là  $h'(t) = -0,02t^3 + 0,3t^2$ .

$$h''(t) = -0,06t^2 + 0,6t$$

$$h''(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$$

|          |   |    |           |
|----------|---|----|-----------|
| $t$      | 0 | 10 | $+\infty$ |
| $h''(t)$ | + | 0  | -         |
| $h'(t)$  | 0 | 10 | $-\infty$ |

Tốc độ cây lúa phát triển nhanh nhất tại thời điểm  $t = 6$  (tuần).

Khi đó chiều cao của cây lúa là

$$h(10) = -0,005 \cdot 10^4 + 0,1 \cdot 10^3 + 3 = 53 \text{ cm}.$$

**Câu 50:** Theo báo cáo của một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất  $x(m^3)$  nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 3 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm;  $0,0003x^2$  chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là  $200m^3$ . Gọi  $C(x)$  là chi phí sản xuất  $x(m^3)$  sản phẩm mỗi ngày và  $\bar{c}(x)$  là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó, các mệnh đề sau đúng hay sai?

**a)** Chi phí sản xuất  $100m^3$  nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

**b)**  $\bar{c}(x) = 0,0003x + 0,15 + \frac{3}{x}$ .

**c)** Chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày là  $100m^3$ .

**d)**  $C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 5$

**Lời giải**



|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|

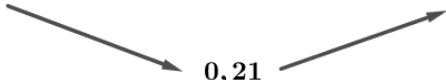
a) Sai. Chi phí sản xuất ra  $100 m^3$  nước tinh khiết là:  $0,15 \cdot 100 + 0,0003 \cdot 100^2 + 3 = 21$  (triệu đồng)

b) Đúng. Chi phí sản xuất  $x(m^3)$  nước là:  $C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 3$ .

$\Rightarrow$  Chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm là  $\bar{c}(x) = \frac{C(x)}{x} = 0,0003x + 0,15 + \frac{3}{x}$ .

c) Đúng. Ta có  $\bar{c}'(x) = 0,0003 - \frac{3}{x^2}$

$\bar{c}'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,0003 - \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 100, x \in [0; 200]$ .

|            |                                                                                    |     |     |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| $x$        | 0                                                                                  | 100 | 200 |
| $\bar{c}'$ | —                                                                                  | 0   | +   |
| $\bar{c}$  |  |     |     |

Vậy chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày là  $100 m^3$ .

d) Sai. Chi phí sản xuất  $x(m^3)$  nước là:  $C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 3$ .

**Câu 51:** Một hạt chuyển động trên một đường thẳng có gắn một trục tọa độ với gốc tọa độ là vị trí hạt bắt đầu chuyển động. Tọa độ của hạt trên trục tại thời điểm  $t$  (đơn vị: giây) kể từ khi xuất phát được cho bởi công thức  $x(t) = 2t - 3\ln(t+1)$  (đơn vị: mét),  $t \geq 0$ . Hàm số  $v(t) = x'(t)$  (đơn vị: mét/giây) biểu thị vận tốc chuyển động của hạt.

a) Vận tốc ban đầu của hạt là 1 m/s.

b) Hạt đứng yên tại thời điểm  $t = 0,5$  s.

c)  $v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}$ .

d) Quãng đường mà hạt đi được trong 3 giây đầu tiên là 1,84 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|

Ta có

a) Sai

Phương trình biểu thị vận tốc chuyển động của hạt là  $v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}$ .

Vận tốc ban đầu của hạt là  $v(0) = -1 (m/s)$ .

b) Đúng.

Hạt đứng yên nên  $v(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = 0,5 (s)$ .

c) Đúng.

$v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}$ .

d) Đúng

Xét hàm số  $x(t) = 2t - 3\ln(t+1)$  trên  $[0; 3]$ .



Ta có  $x'(t) = 2 - \frac{3}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ .

Bảng biến thiên:

|         |   |                        |              |
|---------|---|------------------------|--------------|
| $t$     | 0 | $\frac{1}{2}$          | 3            |
| $x'(t)$ | - | 0                      | +            |
| $x(t)$  | 0 | $1 - 3\ln \frac{3}{2}$ | $6 - 6\ln 2$ |

Do đó quãng đường mà hạt đi được trong 3 giây đầu là:

$$2 \left| x\left(\frac{1}{2}\right) \right| + x(3) = 2 \left| 1 - 3\ln \frac{3}{2} \right| + 6 - 3\ln 4 = 4 + 6\ln \frac{3}{2} - 3\ln 4 \approx 2,27$$

**Câu 52:** Những ngày giáp Tết Nguyên Đán cũng là dịp bước vào vụ Đông Xuân, bà con nông dân tích cực xuống đồng cấy lúa. Cây lúa sau khi được cấy trải qua quá trình tăng trưởng để nhá nhai và phát triển chiều cao trước khi làm đòng, trổ bông. Qua nghiên cứu một giống lúa mới, các nhà khoa học nhận thấy một cây lúa tính từ lúc được cấy bằng một cây mạ với chiều cao 20 cm có tốc độ tăng trưởng chiều cao cho bởi hàm số  $v(t) = -0,1t^3 + 1,1t^2$ , trong đó  $t$  tính theo tuần,  $v(t)$  tính bằng cm/tuần. Gọi  $h(t)$  là chiều cao của cây lúa ở tuần thứ  $t$  ( $t \geq 0$ ).



a)  $h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + 20$ .

b) Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây lúa kéo dài 12 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây lúa là 150 cm.

d) Vào thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây đã lớn hơn 80 cm.

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

a) Đúng

$$h(t) = \int v(t) dt = \int (-0,1t^3 + 1,1t^2) dt = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + C.$$

Ta có  $h(0) = 20$ .



Suy ra  $C = 20$ .

$$\text{Do đó } h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + 20.$$

**b) Sai**

Cây tăng trưởng khi  $v(t) > 0$ . Xét bất phương trình  $-0,1t^3 + 1,1t^2 > 0$ .

$$\Leftrightarrow t^2(-0,1t + 1,1) > 0.$$

Suy ra  $-0,1t + 1,1 > 0$  nên  $t < 11$ .

Vậy giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 11 tuần.

**c) Sai**

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của  $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{11t^3}{30} + 5$  với  $t \in [0; 11]$ .

$$\text{Ta có: } h'(t) = \frac{-t^3}{10} + \frac{11}{10}t^2 = \frac{t^2}{10}(-t + 11).$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 11 \end{cases}.$$

Ta thấy  $h(0) = 20$ ,  $h(11) \approx 142$ .

Khi đó,  $h(t)$  đạt giá trị lớn nhất bằng 142 trên đoạn  $[0; 11]$ .

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là 142 (cm).

**d) Đúng**

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $v(t) = -0,1t^3 + 1,1t^2$  với  $t \in [0; 10]$ .

$$\text{Ta có } v'(t) = -0,3t^2 + 2,2t = -0,3t\left(t - \frac{22}{3}\right).$$

$$\text{Suy ra } v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{22}{3} \end{cases}.$$

Ta thấy  $v(0) = 0$ ,  $v\left(\frac{22}{3}\right) \approx 19,7$ ,  $v(11) = 0$ .

Khi đó,  $v(t)$  đạt giá trị lớn nhất bằng 19,7 trên đoạn  $[0; 10]$  tại  $t = \frac{22}{3}$ .

$$\text{Ta có } h\left(\frac{22}{3}\right) \approx 92,3 > 80.$$

Vào thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây đã lớn hơn 80 cm.

**Câu 53:** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 45t^2 - t^3$  với  $t \geq 0$ . Nếu coi  $y = f(t)$  là hàm số xác định trên  $[0; +\infty)$  thì  $f'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ .

a) Tốc độ truyền bệnh tại thời điểm  $t$  là  $f'(t) = 90t - 3t^2$ .

b) Số người bị nhiễm bệnh từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ 13 là 4752.

c) Đến ngày thứ 45 thì không còn người nhiễm bệnh.

d) Trong 35 ngày đầu tiên thì số người nhiễm bệnh luôn tăng.

**Lời giải**



|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

a) Đúng

Ta có  $f(t) = 45t^2 - t^3 \Rightarrow f'(t) = 90t - 3t^2$ .

b) Sai

Ta có  $f(13) = 45.13^2 - 13^3 = 5408$ .

c) Đúng

Ta có  $f(45) = 45.45^2 - 45^3 = 0$ .

d) Sai

Ta có  $f'(t) = 90t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 30 \end{cases}$ .

Bảng biến thiên:

|         |   |       |           |
|---------|---|-------|-----------|
| $t$     | 0 | 30    | $+\infty$ |
| $f'(t)$ |   | +     | -         |
| $f(t)$  | 0 | 13500 | $-\infty$ |

Số người nhiễm bệnh luôn trong khoảng  $(0; 30)$ .

**Câu 54:** Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm  $x$  (triệu đồng) ( $x \geq 0$ ). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số  $T'(x) = -20x + 300$ , trong đó  $T'(x)$  tính bằng triệu đồng (Nguồn: R.Larson anh B. Edwards, Calculus 10e, Cengage). Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 tỷ đồng.

a) Doanh thu của tất cả gian hàng được biểu diễn bởi hàm số  $T(x) = -10x^2 + 300x + 10000$ .

b) Doanh thu của tất cả gian hàng khi người đó tăng giá thêm 12 triệu đồng là 12 tỷ 250 triệu đồng.

c) Doanh thu cao nhất của tất cả gian hàng mà người đó có thể thu về là 12 tỷ 250 triệu đồng.

d) Để doanh thu cao nhất của tất cả gian hàng thì mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng.

**Lời giải**

Ta có:  $T(x) = \int T'(x) dx = \int (-20x + 300) dx = -10x^2 + 300x + C, C \in \mathbb{R}$ .

Khi người đó tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 tỷ đồng. Nên ứng với  $x = 10$  ta có  $T(10) = 12000$

suy ra  $12000 = -10.10^2 + 300.10 + C \Rightarrow C = 10000$ .

Vậy  $T(x) = -10x^2 + 300x + 10000$  a) Đúng

$T(12) = -10.12^2 + 300.12 + 10000 = 12160$  (triệu đồng). b) Sai

Ta có



|         |   |       |           |
|---------|---|-------|-----------|
| x       | 0 | 15    | $+\infty$ |
| $T'(x)$ |   | +     | 0 -       |
| $T(x)$  |   | 12250 |           |

Vậy doanh thu cao nhất mà người đó có thể thu về là 12 tỷ 250 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng. **c) Đúng, d) Đúng**

**Câu 55:** Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng trưởng chiều cao của cây cà chua khi trồng được cho bởi hàm số  $v(t) = -0,1t^3 + t^2$ , trong đó  $t$  tính theo tuần,  $v(t)$  tính bằng centimét/tuần. Gọi  $h(t)$  (tính bằng centimét) là chiều cao của cây cà chua ở tuần thứ  $t (t \geq 0)$

a)  $h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{1}{3}t^3$ .

b) Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây cà chua kéo dài 10 tuần.

c) Chiều cao của cây cà chua ở tuần thứ 6 lớn hơn 40cm.

d) Chiều cao tối đa của cây cà chua không vượt quá 90 cm.

**Lời giải**

a) Sai.

$$v(t) = -0,1t^3 + t^2 \Rightarrow h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + C; h(0) = 5 \Rightarrow C = 5.$$

$$\text{Vậy } h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 5$$

b) Đúng.

$$h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 5 \Rightarrow h'(t) = -0,1t^3 + t^2$$

$h'(t) > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 10$ . Do đó giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây cà chua kéo dài 10 tuần.

c) Đúng.

$$h(6) = -\frac{1}{40}6^4 + \frac{1}{3}6^3 + 5 = 44,6 \text{ cm}$$

d) Đúng.

$$h'(t) = -0,1t^3 + t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |   |                 |           |
|---------|---|-----------------|-----------|
| t       | 0 | 10              | $+\infty$ |
| $h'(t)$ | 0 | +               | 0 -       |
| $h(t)$  |   | $\frac{265}{3}$ |           |

Từ bảng biến thiên suy ra chiều cao tối đa của cây cà chua là  $\frac{265}{3} \approx 88,3 < 90$ .



**Câu 56:** Cây đậu Hà Lan khi trồng chiều cao 3 centimét. Gọi  $h(t)$  là độ cao tính bằng centimét của cây đậu Hà Lan tại thời điểm  $t$  kể từ khi được trồng, với  $t$  tính theo tuần. Khảo sát cho thấy tốc độ tăng chiều cao của cây đậu Hà Lan sau khi trồng là  $h'(t) = -0,02t^3 + 0,3t^2$  (centimét/tuần).

- a) Hàm số  $h(t)$  có công thức là  $h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3$  (centimét/tuần).  
 b) Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu Hà Lan đó kéo dài 15 tuần.  
 c) Chiều cao tối đa của cây đậu Hà Lan đó là 88 centimét.  
 d) Vào thời điểm cây đậu Hà Lan đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao của cây là 53 centimét.

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

**a) Đúng.**

$$h(t) = \int h'(t)dt = \int (-0,02t^3 + 0,3t^2)dt = -0,005t^4 + 0,1t^3 + C.$$

$$\text{Ta có } h(0) = 3 \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Vậy } h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3 + 3.$$

**b) Đúng.**

$$\text{Xét hàm số } h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3 + 3 \ (t \geq 0).$$

$$\text{Ta có } h'(t) = -0,02t^3 + 0,3t^2.$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 15 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

|         |   |        |           |
|---------|---|--------|-----------|
| $t$     | 0 | 15     | $+\infty$ |
| $h'(t)$ | + | 0      | -         |
| $h(t)$  | 3 | 87,375 | $-\infty$ |

Từ BBT ta thấy giai đoạn tăng trưởng của cây lúa kéo dài 15 tuần.

**c) Sai.**

Dựa vào BBT ta thấy chiều cao tối đa của cây lúa là 87,375 centimét.

**d) Đúng.**

Tốc độ cây lúa phát triển tại thời điểm  $t > 0$  là  $h'(t) = -0,02t^3 + 0,3t^2$ .

$$h''(t) = -0,06t^2 + 0,6t.$$

$$h''(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}.$$



|          |   |    |           |
|----------|---|----|-----------|
| $t$      | 0 | 10 | $+\infty$ |
| $h''(t)$ | + | 0  | -         |
| $h'(t)$  |   |    |           |

Tốc độ cây lúa phát triển nhanh nhất tại thời điểm  $t = 6$  (tuần).

Khi đó chiều cao của cây lúa là

$$h(10) = -0,005 \cdot 10^4 + 0,1 \cdot 10^3 + 3 = 53 \text{ cm.}$$

**Câu 57:** Một xưởng sản xuất nhận được đơn đặt hàng là 8000 sản phẩm Y. Trong xưởng có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 30 sản phẩm Y trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 200 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và cần hai người giám sát. Chi phí cần trả mỗi người giám sát là 96 nghìn đồng mỗi giờ. Gọi  $x$  là số máy mà xưởng cần dùng để sản xuất, khi đó:

- Thời gian để xưởng hoàn tất đơn đặt hàng là  $\frac{800}{3x}$  (giờ).
- Tổng chi phí để sản xuất 8000 sản phẩm Y được tính theo  $P(x) = 200x + \frac{800}{3x}$  (đơn vị nghìn đồng).
- Xưởng cần đúng 16 máy để chi phí hoàn tất đơn đặt hàng là thấp nhất.
- Nếu xưởng dùng từ 25 máy trở lên để sản xuất thì chi phí ít nhất là 7048 (nghìn đồng).

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

**a) Đúng.**

Số sản phẩm sản xuất trong một giờ là  $300x$  (sản phẩm).

Thời gian để xưởng hoàn tất đơn đặt hàng là  $\frac{8000}{30x} = \frac{800}{3x}$ .

**b) Sai.**

Chi phí để thiết lập  $x$  máy là  $200x$

Chi phí trả cho giám sát là  $\frac{800}{3x} \cdot 96 \cdot 2 = \frac{51200}{x}$

Tổng chi phí là  $P(x) = 200x + \frac{51200}{x}$

**c) Đúng.**

Chi phí  $P(x) \geq 2\sqrt{200x \cdot \frac{51200}{x}} = 6400$  nghìn đồng

$P(x)_{\min} = 6400 \Leftrightarrow 200x = \frac{51200}{x} \Leftrightarrow x = 16$  (máy)

Vậy xưởng cần dùng 16

**d) Đúng.**

Nếu dùng từ 25 máy trở lên:



$$P'(x) = 200 - \frac{51200}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 200 - \frac{51200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 16$$

Lập bảng biến thiên của  $P'(x)$

|         |      |           |
|---------|------|-----------|
| $x$     | 25   | $+\infty$ |
| $P'(x)$ | +    |           |
| $P(x)$  | 7048 | $+\infty$ |

Vậy nếu dùng từ 25 máy trở lên thì chi phí thấp nhất là 7048 (nghìn đồng).

**Câu 58:** Sự phân hủy của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao Oxy hòa tan trong nước. Nồng độ oxy (mg/l) trong một hồ nước sau  $t$  giờ ( $t \geq 0$ ) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ xấp xỉ bởi hàm số  $f(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- Sau 1 giờ, nồng độ oxy trong nước là  $3,5(mg/l)$
- Nồng độ oxy trong hồ nước có thời điểm vượt quá  $5(mg/l)$
- Ban đầu, nồng độ oxy trong nước là cao nhất.
- Nồng độ oxy trong hồ nước thấp nhất là  $2,5(mg/l)$

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

**a) Đúng.**

Sau 1 giờ, nồng độ oxy trong nước là:  $f(1) = 5 - \frac{15 \cdot 1}{9 \cdot 1^2 + 1} = 3,5(mg/l)$

**b) Sai.**

Ta có  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} \right) = 5$

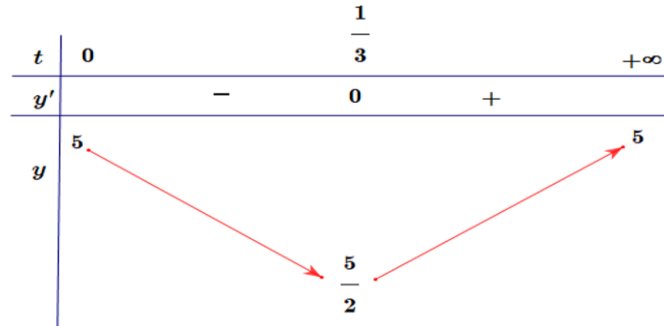
Do đó nồng độ oxy trong hồ nước không thể vượt quá  $5(mg/l)$

**c) Đúng**

Xét  $f(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$  trên nửa đoạn  $[0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{135t^2 - 15}{(9t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

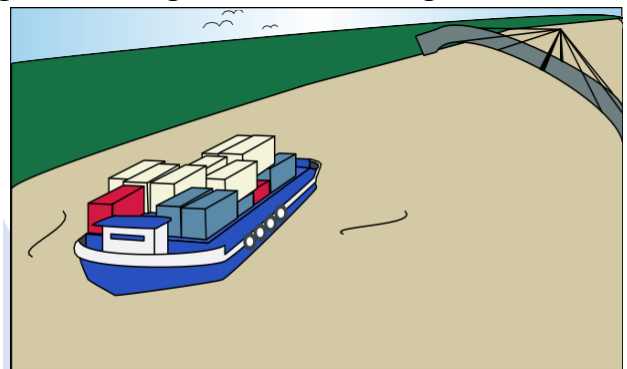
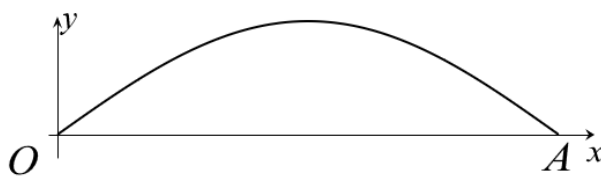


Từ bảng biến thiên, ta thấy  $\min_{[0;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}$  và  $\max_{[0;+\infty)} f(t) = f(0) = 5$

**d) Đúng**

Vậy vào các thời điểm  $t = \frac{1}{3}$  giờ thì nồng độ oxygen trong nước thấp nhất là  $2,5(mg/l)$ .

**Câu 59:** Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số  $y = 4,8\sin\frac{x}{9}$  và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như hình sau. Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA, khi đó:



- Khoảng cách lớn nhất từ mực nước sông đến cầu là  $y = 4,8m$ .
- Chiều rộng của con sông là  $28,3m$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao  $2,4m$  so với mực nước sông. Điều kiện để sà lan có thể đi qua được gầm cầu là chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn  $19,5m$ .
- Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là  $9m$ . Điều kiện để sà lan có thể đi qua được gầm cầu là chiều cao của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn  $4,2m$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

**a) Đúng**

Ta có  $\sin\frac{x}{9} \leq 1 \Leftrightarrow 4,8\sin\frac{x}{9} \leq 4,8$

Vậy chiều cao lớn nhất từ mực nước đến cây cầu là  $y = 4,8$ .

**b) Đúng**

$4,8\sin\frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{9} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{9} = k\pi \Rightarrow x = 9k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



Với  $k=0 \Rightarrow x=0$

$k=1 \Rightarrow x=9\pi$  (là nhịp gần nhất chạm đất) vậy chiều rộng của cầu bằng  $9\pi m$ .

**c) Sai**

$$4,8 \sin \frac{x}{9} = 2,4 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x}{9} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + k18\pi \\ x = \frac{15\pi}{2} + k18\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Với } k=0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{15\pi}{2} \end{cases}$$

Chiều rộng lớn nhất của khối hàng hóa để có thể đi lọt qua cầu là:

$$x = \frac{15\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 6\pi \approx 18,9.$$

**d) Đúng**

Nhìn vào đồ thị ta thấy, chiều cao tối đa của thùng hàng là tung độ của  $B$

$$y_B = 4,8 \cdot \sin \frac{9\pi - 9}{18} \approx 4,2$$

