



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $y = \sqrt{4x - 2x^2}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Tính giá trị $M^{24} + m^{2024}$.

Lời giải

Trả lời: 4096

Ta có $0 \leq 4x - 2x^2 = 2 - 2(x-1)^2 \leq 2$ nên $0 \leq \sqrt{4x - 2x^2} \leq \sqrt{2}$.

Giá trị $M^{24} + m^{2024} = (\sqrt{2})^{24} + 0^{2024} = 4096$.

Câu 2: Công ty truyền hình cáp Vista hiện có 100 000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$ /tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 32,5

Gọi x là số lần giảm 0,25\$. Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40 - 0,25x$ với $0 \leq x \leq 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$.

Do đó, tổng số thuê bao là $100000 + 1000x$.

Hàm doanh thu được cho bởi $R = (\text{số thuê bao}) \times (\text{cước mỗi thuê bao trả})$

$$R = (100000 + 1000x)(40 - 0,25x)$$

$$= 1000(100 + x)(40 - 0,25x) = 1000(4000 + 15x - 0,25x^2).$$

$$\text{Đạo hàm } R' = 0, \text{ ta được } R' = 1000(15 - 0,5x) = 0 \Rightarrow x = 30.$$

$$\text{Ta có: } R(0) = 4000000; R(30) = 4225000; R(160) = 0.$$

Vậy doanh thu tối đa khi $x = 30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm 0,25\$, tức là cước thuê bao hàng tháng bằng $40\$ - 7,5\$ = 32,5\$$.

Câu 3: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích là 96.000 cm^3 , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 140.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 240.000 đồng/m^2 . Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là bao nhiêu nghìn đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 173



Diện tích đáy của bể bằng $96000 : 60 = 1600 (cm^2)$

Gọi độ dài 1 cạnh của đáy bể là $x (x > 0)$ (đơn vị cm), khi đó độ dài cạnh còn lại của đáy bể là $\frac{1600}{x}$.

Tổng diện tích mặt bên là $S = 2 \left(x + \frac{1600}{x} \right) \cdot 60 = 120x + \frac{192000}{x} (cm^2)$

Ta có $S' = 120 - \frac{192000}{x^2}$, $S' = 0 \Rightarrow 120x^2 - 192000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = -40 \text{ (loại)} \end{cases}$

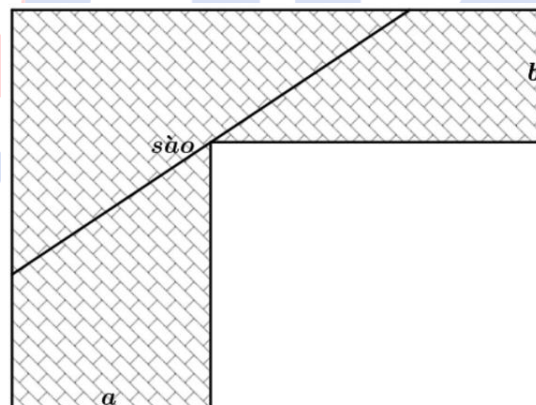
Bảng biến thiên

x	40	$+\infty$
S'	- 0 +	
S	$+\infty$ ↘ 9600 ↗ $+\infty$	

Chi phí hoàn thành bể cá thấp nhất khi $S = \min_{(0; +\infty)} S = 9600 (cm^2)$, tức là $x = 40 (cm)$

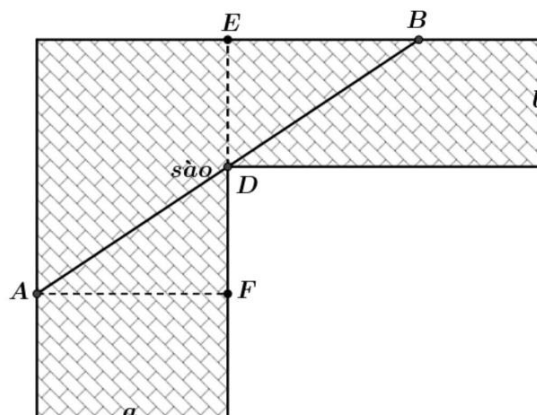
Vậy chi phí thấp nhất hoàn thành bể cá là $0,96 \cdot 140 + 0,16 \cdot 240 = 172,8 \approx 173$ nghìn đồng.

Câu 4: Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi cái sào thảo mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 33,5





Đặt các điểm như hình vẽ

Đặt $DF = x, x > 0$, ta có $\triangle ADF$ đồng dạng với $\triangle BED$ nên $\frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có $l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$

Đạo hàm $f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2}\left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b)\left(1 - \frac{a^2b}{x^3}\right)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = 12$

Dễ dàng suy ra được $\min_{(0;+\infty)} f(x) = f(12) = 1125$

Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5} \approx 33,5$.

Câu 5: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Trả lời: 9000

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

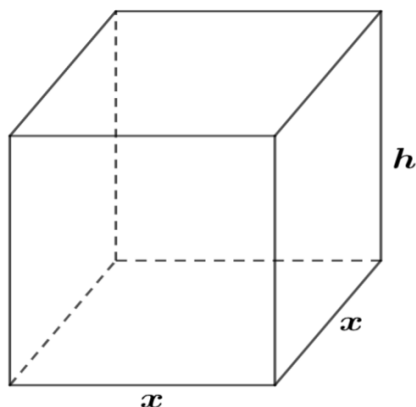
Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9000 đồng.

Câu 6: Một hộp sữa dung tích 1 lít có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng x (cm) và chiều cao h (cm). Tìm giá trị của x để diện tích toàn phần của hình hộp là nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 10



Thể tích của hộp sữa là: $V = x^2 h \text{ (cm}^3\text{)}.$

Theo bài ra, ta có: $V = 1(l) = 1000 \text{ (cm}^3\text{)} \Rightarrow x^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2}.$

Ta có diện tích toàn phần của hộp sữa là: $S_p = S_{xq} + S_d = 4hx + 2x^2 = 4 \cdot \frac{1000}{x^2} \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + \frac{4000}{x}$

Đặt $y = 2x^2 + \frac{4000}{x} \Rightarrow y' = 4x - \frac{4000}{x^2}.$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{4000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4000 = 0 \Leftrightarrow x = 10.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	10	$+\infty$
y'		- 0 +	
y	$+\infty$	600	$+\infty$

Vậy để hộp sữa có diện tích toàn phần nhỏ nhất thì $x = 10.$

Câu 7: Hai sinh viên Thành và Linh rủ nhau mở một công ty vận tải taxi điện (Sử dụng nguồn cung sẵn có trong nước với nhiều ưu đãi khuyến khích phát triển loại phương tiện này). Hai bạn Thành và Linh dự định sử dụng không quá 10 xe. Nếu công ty sử dụng tối đa thời gian hoạt động của x xe điện trên ($1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}$) thì doanh thu nhận được của số xe đó là $D(x) = x^3 - 4597x^2 + 50300x + 30000$ (triệu đồng), trong khi chi phí nạp điện, bảo dưỡng, phí cầu đường, thuế và thuê nhân công lái xe. bình quân cho mỗi xe là $C(x) = 3x + 300 + \frac{30000}{x}$ (triệu đồng). Hai bạn Thành và Linh cần ưu tiên tối đa cho bao nhiêu xe hoạt động thường xuyên để lợi nhuận công ty thu được là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 5

Chi phí hoạt động cho x xe điện là: $x.C(x) = x \cdot \left(3x + 300 + \frac{30000}{x} \right) = 3x^2 + 300x + 30000$

(triệu đồng).

Lợi nhuận của công ty được tính bằng doanh thu trừ cho chi phí đầu tư.

Suy ra, lợi nhuận của công ty là: $T(x) = D(x) - x.C(x), 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}$ (triệu đồng).



$$T(x) = (x^3 - 4597x^2 + 50300x + 30000) - (3x^2 + 300x + 30000) = x^3 - 4600x^2 + 50000x.$$

$$T'(x) = 3x^2 - 9200x + 50000.$$

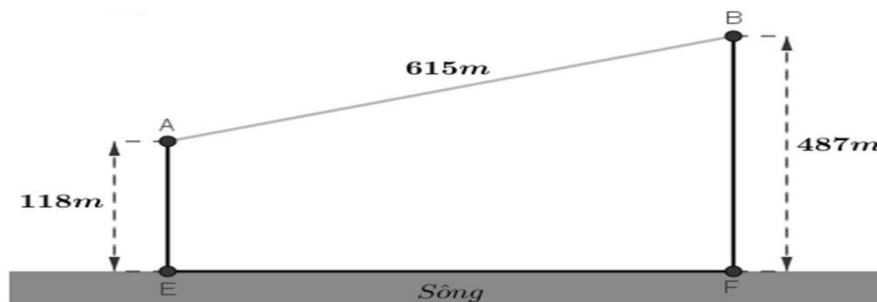
$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9200x + 50000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 3061,222218 \notin [1;10] \\ x_2 \approx 5,444448485 \in [1;10] \end{cases}$$

BBT:

x	1	5	5,444448485	6	10
$T'(x)$	+	+	0	-	-
$T(x)$		135125	136030,5	134616	

Từ BBT, kết hợp với $x \in \mathbb{N}$ suy ra để lợi nhuận của công ty thu được là lớn nhất thì cần ưu tiên tối đa cho 5 chiếc xe điện hoạt động thường xuyên.

Câu 8: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

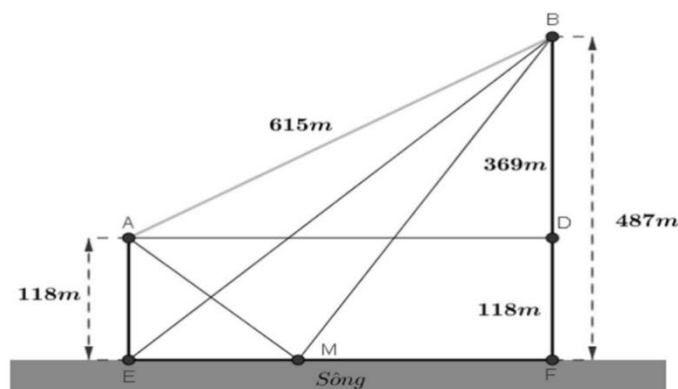
Lời giải

Trả lời: 780

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B dễ dàng tính được

$$BD = 369, EF = 492.$$

Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:



$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$



Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$ ta có

giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8 \text{ m}$

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ $779,8 \text{ m}$.

Câu 9: Công ti TNHH Quang Minh muốn sản xuất độc quyền một loại sản phẩm để bán ra thị trường trong dịp tết Nguyên Đán. Biết rằng tổng chi phí sản xuất loại sản phẩm này là một hàm số được cho bởi công thức $g(x) = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$, doanh thu của công ti khi đó là hàm số $h(x) = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của công ti được xác định bằng hàm số $f(x) = g(x) - h(x)$. Để lợi nhuận cao nhất mà công ti đạt được thì cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Trả lời: 52

Xét hàm số $f(x) = g(x) - h(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000$.

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52(N) \\ x = -2(L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	52	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	-4000	74416	$-\infty$

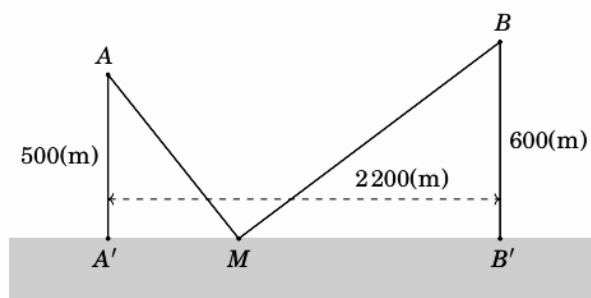
Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 74416 tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt được cao nhất khi sản xuất số sản phẩm là 52.

Câu 10: Kết Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 550 \text{ m}$, $BB' = 600 \text{ m}$. Người ta đo được $A'B' = 2200 \text{ m}$ như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn



xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Lời giải

Trả lời: 1000

Đặt $A'M = x$ ($0 < x < 2200$), $B'M = 2200 - x$

Ta có $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$

Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là:

$$AM + BM = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$ trên khoảng $(0; 2200)$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1000$$

Bảng biến thiên:

x	0	1000	2200
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2780	2460	2856

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng 2460 m, tại vị trí M cách điểm A' là 1000m.

Câu 11: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.





Lời giải

Trả lời: 30,5

Gọi x (triệu đồng) là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \leq x \leq 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$

Ta có: $f'(x) = -400x + 200$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -400x + 200 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 2400; f(4) = -1600; f\left(\frac{1}{2}\right) = 2450$$

$$\max_{[0;4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 12: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg / L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 1

Xét hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$, $(t > 0)$.

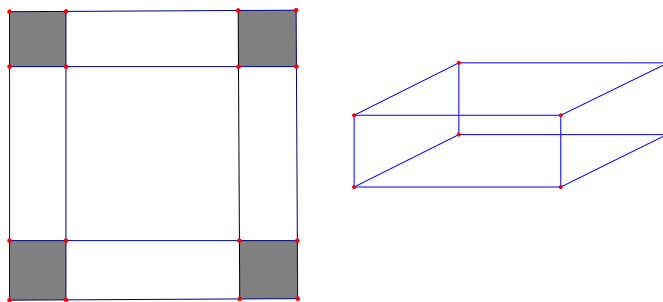
$$c'(t) = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}.$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	$\frac{1}{2}$	0

Với $t = 1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Câu 13: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x , rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: 2

Ta có : $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (12 - 2x)^2$ (cm²). Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(12 - 2x)^2$

Xét hàm số: $y = x.(12 - 2x)^2 \quad \forall x \in (0; 6)$

Ta có : $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x).(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$.

x	0	2	6
y'		+	-
y			

Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2) = 128$.

Câu 14: Một sợi dây có chiều dài 28m được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Trả lời: 15,7

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là x (m)

=> chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28 - x$ (m)

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: $R = \frac{28 - x}{2\pi}$

=> Diện tích hình tròn: $\pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{28 - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{784 - 56x + x^2}{4\pi}$

+) Tổng diện tích hai hình: $\frac{x^2}{16} + \frac{784 - 56x + x^2}{4\pi} = \left(\frac{\pi + 4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$

Xét $f(x) = \left(\frac{\pi + 4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$. Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại



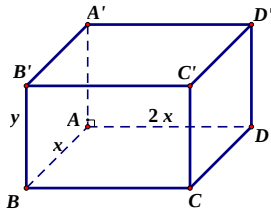
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{\pi} \cdot \frac{16\pi}{2(\pi+4)} = \frac{112}{\pi+4}$$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi} m$

Câu 15: Ông A dự định sử dụng hết $5 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1,01



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá.

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

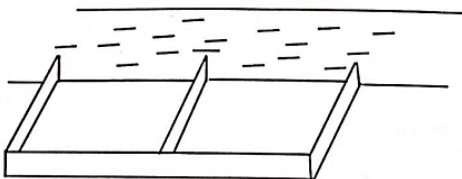
$$\Leftrightarrow y = \frac{5-2x^2}{6x}$$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \frac{5-2x^2}{6x} = \frac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5-6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	
V'		+	0	-
V	0	$\nearrow \frac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow 0$	

$$\Rightarrow V_{\max} = \frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01 m^3.$$

Câu 16: Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



Lời giải

Trả lời: 6250

Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E.

Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



Số tiền phải làm là: $x \cdot 3.50000 + y \cdot 60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 5x}{2}$.

Diện tích đất: $S = x \cdot y = x \cdot \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$

Ta có: $S' = 250 - 5x$.

$S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

x	0	50	$+\infty$
S'		0	-
S	0	6250	$-\infty$

Vậy: $\max_{(0;+\infty)} S = 6250 \text{ (m}^2\text{)}$ khi $x = 50$.

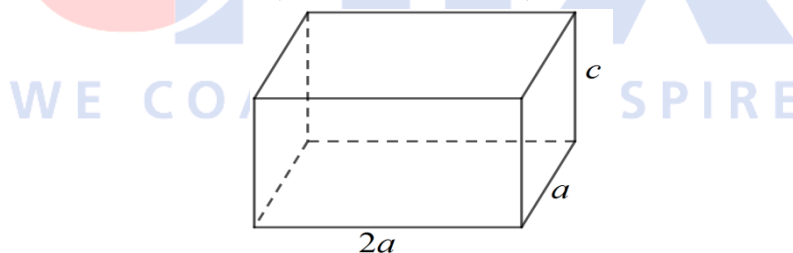
Câu 17: Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 108

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là a , $2a$, c ($a(\text{m}) > 0, c(\text{m}) > 0$).



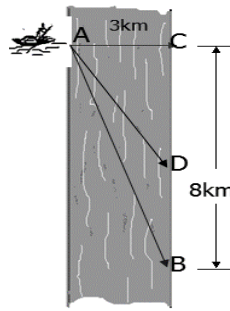
Ta có diện tích cách mặt cần xây là $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$.

Thể tích bể $V = a \cdot 2a \cdot c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \frac{144}{a^2}$.

Suy ra $S = 2a^2 + 6a \cdot \frac{144}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a} = 2a^2 + \frac{432}{a} + \frac{432}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2a^2 \cdot \frac{432}{a} \cdot \frac{432}{a}} = 216$.

Vậy $S_{\min} = 216\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất là $216 \cdot 500000 = 108$ triệu đồng.

Câu 18: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km. Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B. (đơn vị giờ, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 1,33

○ Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

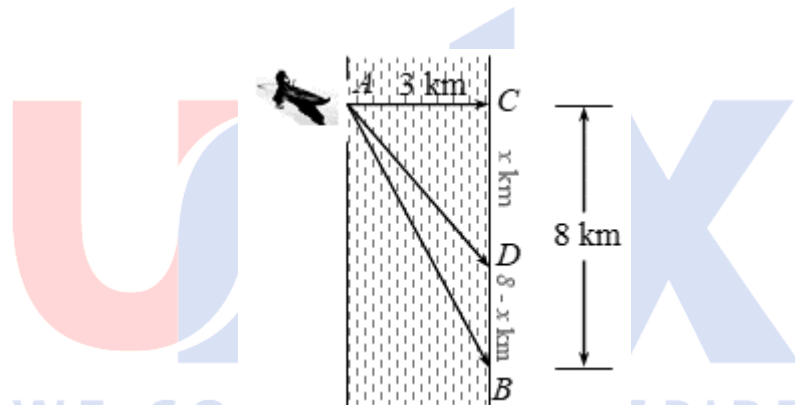
Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AC: $\frac{3}{6} = 0,5$

Thời gian chạy trên quãng đường CB: $\frac{8}{8} = 1$

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là 1,5.

○ Cách 2: chèo trực tiếp trên quãng đường $AB = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$ mất $\frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1^h 26'$.

○ Cách 3:



Gọi x (km) là độ dài quãng đường CD; $8-x$ (km) là độ dài quãng đường DB.

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD $= \sqrt{x^2 + 9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8-x}{8}$

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0; 8)$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

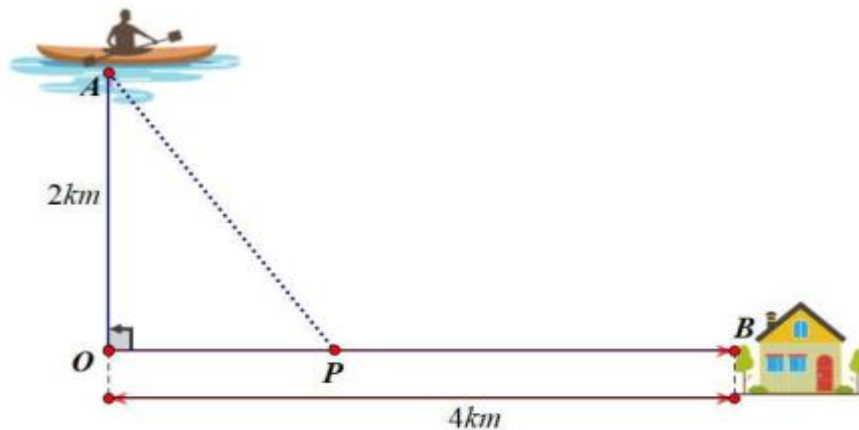


x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

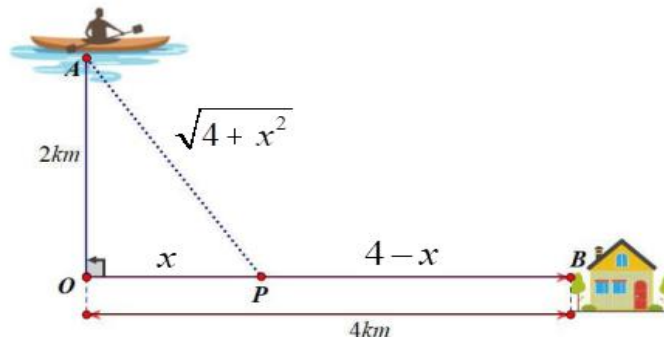
Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33$.

Câu 19: Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 2km, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 4km. Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc 6m/h và chạy bộ trên bờ với vận tốc 10km/h. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là (đơn vị phút, làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 40



Đặt $OP = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow BP = 4 - x$; $AP = \sqrt{4 + x^2}$.

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{6} + \frac{4 - x}{10} \text{ (h)}. \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4 + x^2}} - \frac{1}{10}.$$

$$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4 + x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$



BBT:

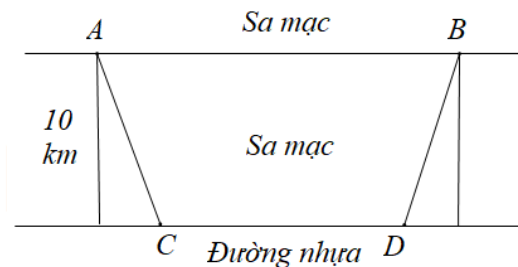
x	0	$\frac{3}{2}$	4	
$t'(x)$		-	0	+
$t(x)$				

$\frac{2}{3}$

Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

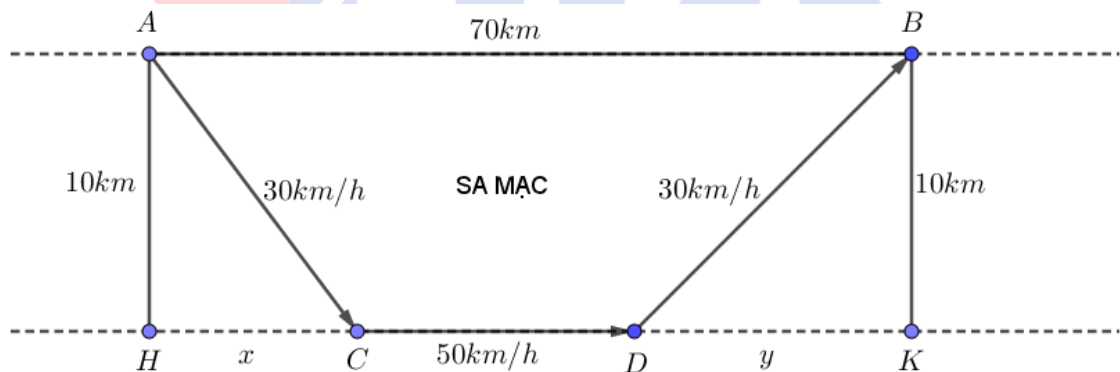
$$t_{\min} = \frac{2}{3}(h) = \frac{2}{3} \cdot 60(\text{phút}) = 40 \text{ phút}.$$

Câu 20: Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 70km. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30km/h. Nhà địa chất phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ được. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10km. Trên đường nhựa đó thì xe nhà địa chất này có thể di chuyển với vận tốc 50km/h. Thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A đến B là bao nhiêu phút?



Lời giải

Trả lời: 116



Đặt $HC = x$; $KD = y$, ($x, y > 0$; $x + y < 70$).

Quãng đường đi trên sa mạc là: $AC + BD = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{100 + y^2}$ (km).

Thời gian đi trên sa mạc là: $t_{AC} + t_{BD} = \frac{\sqrt{100 + x^2} + \sqrt{100 + y^2}}{30}$ (h).

Quãng đường đi trên đường nhựa: $CD = 70 - (x + y)$ (km).

Thời gian đi trên đường nhựa là: $t_{CD} = \frac{70 - (x + y)}{50}$ (h).

Tổng thời gian đi từ A đến B là:



$$T = t_{AC} + t_{CD} + t_{DB} = \frac{\sqrt{100+x^2} + \sqrt{100+y^2}}{30} + \frac{70-(x+y)}{50} (h).$$

Ta có: $\sqrt{100+x^2} + \sqrt{100+y^2} \geq \sqrt{(10+10)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{400+(x+y)^2}$ nên

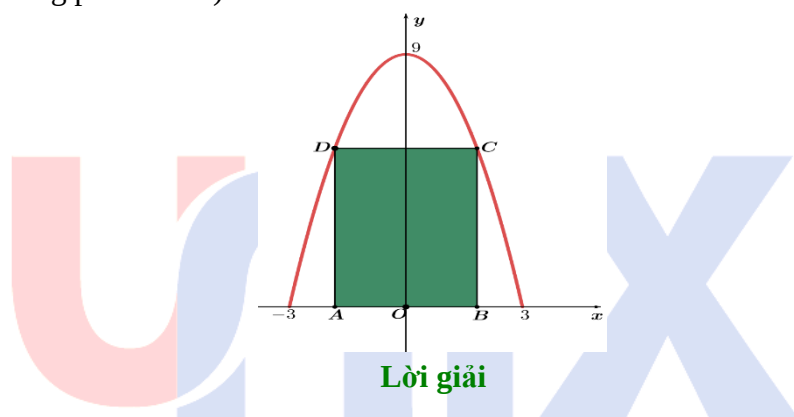
$$T \geq \frac{\sqrt{400+(x+y)^2}}{30} + \frac{70-(x+y)}{50}. \text{ Đặt } t = x+y, (0 < t \leq 70).$$

Khi đó ta có: $T \geq \frac{\sqrt{400+t^2}}{30} + \frac{70-t}{50}$ với $0 < t \leq 70$.

Khảo sát hàm $f(t) = \frac{\sqrt{400+t^2}}{30} + \frac{70-t}{50}, \forall t \in (0; 70]$ ta có: $\min_{(0; 70]} f(t) = \frac{58}{30}$, đạt được tại $t = 15$.

Vậy thời gian đi quãng đường AB ngắn nhất là $\frac{58}{30}(h) = 116$ phút.

Câu 21: Cho hình chữ nhật ABCD có hai đỉnh di động trên đồ thị hàm số $y = 9 - x^2$ trên khoảng $(-3; 3)$, hai đỉnh còn lại nằm trên trục hoành (như hình bên). Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật ABCD (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Trả lời: 20,8

Đặt $BC = x, (0 < x < 3)$, khi đó $AB = 2x$ và $BC = 9 - x^2$.

Ta có: $S_{ABCD} = 2x \cdot (9 - x^2)$.

Xét hàm số $f(x) = x(9 - x^2) = -x^3 + 9x$ trên khoảng $(0; 3)$.

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 9$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \in (0; 3)$.

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt{3}$	3	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$6\sqrt{3}$	0	

Từ BBT, ta suy diện tích lớn nhất là $S_{ABCD} = 12\sqrt{3} \approx 20,8$ khi $x = \sqrt{3}$.

Câu 22: Một doanh nghiệp chuyên kinh doanh các loại xe máy điện. Hiện tại doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào các loại xe YADEA với chi phí mua vào là 23 (triệu đồng) và bán ra là 29 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe được bán ra trong một năm là 800 chiếc. Nhằm đẩy mạnh



hơn lượng tiêu thụ dòng xe này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số xe bán ra trong một năm sẽ tăng 250 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải bán với giá bán mới là bao nhiêu (triệu đồng) để sau khi thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được lợi nhuận cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 27,6

- Chi phí mua vào: $C = 23$ triệu đồng.
- Giá bán ban đầu: $P_0 = 29$ triệu đồng.
- Số lượng xe bán ra ban đầu: $Q_0 = 800$ chiếc.
- Số lượng xe tăng thêm khi giảm 1 triệu đồng: $\Delta Q = 250$ chiếc.
- Mức giảm giá: x triệu đồng.

Số lượng xe bán ra khi mức giá là x triệu đồng là $Q(x) = 800 + 250x$.

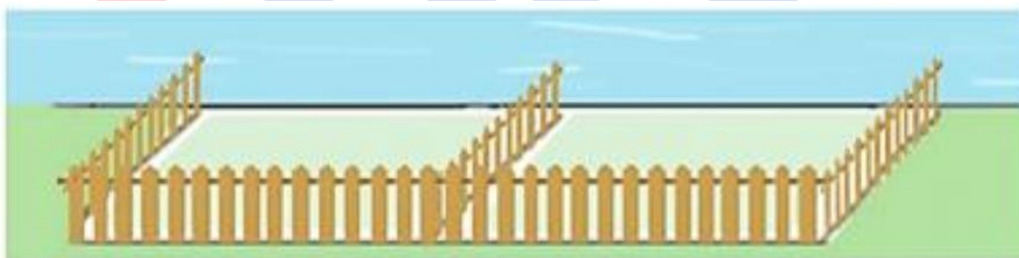
Lợi nhuận của doanh nghiệp là $L(x) = [(29 - x) - 23] \cdot (800 + 250x) = (6 - x)(800 + 250x)$.

Ta có: $L'(x) = -500x + 700$. Cho $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5} = 1,4$.

Từ đó suy ra lợi nhuận cao nhất khi $x = 1,4$ triệu đồng.

Từ đó sẽ bán với giá mới là $29 - 1,4 = 27,6$ triệu đồng.

Câu 23: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Hình 35

Lời giải

Trả lời: 6250

Giả sử chiều dài từng mặt của ba mặt hàng rào song song nhau là $x(m)$.

Chi phí để làm ba mặt hàng rào song song là: $3 \cdot x \cdot 50000 = 150000x$ (đồng).

Chi phí để làm mặt hàng rào song song với bờ sông là: $15000000 - 150000x$ (đồng).

Chiều dài của mặt hàng rào song song với bờ sông là $\frac{15000000 - 150000x}{60000} = 250 - \frac{5}{2}x$

với $0 < x < 100$.

Giả sử diện tích hàng rào không đáng kể, khi đó diện tích hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào là

$$S(x) = x \left(250 - \frac{5}{2}x \right) = 250x - \frac{5}{2}x^2 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Xét hàm số $S(x) = 250x - \frac{5}{2}x^2$ với $x \in (0; 100)$.

Ta có $S'(x) = 250 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 50$.



x	0	50	100	
S'(x)		+	0	-
S(x)	0	6 250	0	

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào là 6250m^2

Câu 24: Đề quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỷ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A trong một tuần được tính theo công thức: $P(x) = \frac{1}{1 + 49e^{-0.015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỷ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

Lời giải

Trả lời: 203

Đề bài yêu cầu tìm số lần quảng cáo ít nhất để tỷ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%.

Cho công thức tỷ lệ người xem mua sản phẩm $P(x) = \frac{1}{1 + 49e^{-0.015n}}$

Ta cần tìm n sao cho $P(n) > 30\% = 0.3$. Bất phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + 49e^{-0.015n}} > 0.3 &\Leftrightarrow 1 + 49e^{-0.015n} < \frac{1}{0.3} \\ \Leftrightarrow 49e^{-0.015n} < \frac{10}{3} - 1 &\Leftrightarrow 49e^{-0.015n} < \frac{7}{3} \\ \Leftrightarrow e^{-0.015n} < \frac{7}{147} &\Leftrightarrow e^{-0.015n} < \frac{1}{21} \end{aligned}$$

Lấy logarit hai vế: $-0.015n < \ln\left(\frac{1}{21}\right) \Leftrightarrow n > \frac{-\ln(21)}{0.015}$

Tính toán: $\ln(21) \approx 3.0445 \Leftrightarrow n > \frac{3.0445}{0.015} \approx 202.97$.

Do đó, n phải là số nguyên lớn hơn 202.97, vậy số lần quảng cáo ít nhất là 203.

Kết quả: $n = 203$.

Câu 25: Thể tích V của 1 kg nước (tính bằng cm^3) ở nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}\text{C}$) khi T thay đổi từ 0°C đến 30°C được xấp xỉ bởi công thức:

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.00850437T^2 - 0.00006797T^3$$

(Biểu thức này trích từ nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p. 284).

Biết rằng khi T_0 ($^{\circ}\text{C}$) trong khoảng từ 0°C đến 30°C , thể tích V tăng. Hãy tìm giá trị T_0 (làm tròn đến hàng đơn vị) để thể tích nước tăng.

Lời giải

Trả lời: 4

Để tìm giá trị của T_0 sao cho thể tích V tăng, ta cần tính đạo hàm của V theo T và tìm khoảng giá trị của T mà đạo hàm này không âm.

Công thức đạo hàm của V theo T :



$$V'(T) = -0.06426 + 2 \times 0.00850437T - 3 \times 0.00006797T^2$$

$$= -0.06426 + 0.01700874T - 0.00020391T^2$$

$$\text{Tìm khoảng giá trị } T \text{ để } V'(T) \geq 0 \Leftrightarrow -0.06426 + 0.01700874T - 0.00020391T^2 \geq 0$$

Ta được kết quả nghiệm sấp xỉ: $4 \leq T \leq 28$.

Kết luận: $T_0 = 4$.

Câu 26: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200?

Lời giải

Trả lời: 9

Ta có: $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 30$.

Tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t : $f'(t) = -3t^2 + 90t + 600$.

Tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200, suy ra:

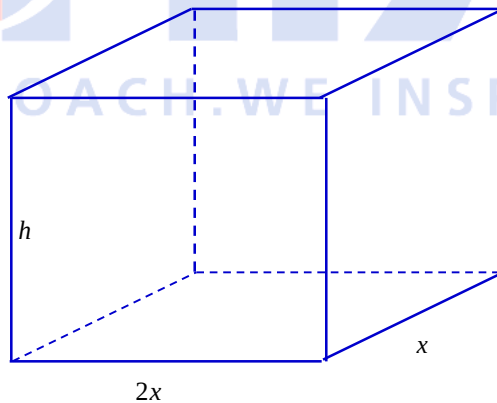
$$f'(t) > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t + 600 > 1200 \Leftrightarrow t^2 - 30t + 200 < 0 \Leftrightarrow 10 < t < 20.$$

Do $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 30 \Rightarrow t \in \{11; 12; \dots; 19\} \Rightarrow$ có 9 ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200.

Câu 27: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công và vật liệu xây dựng để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/ m^2 . Hỏi nhà Long phải trả kinh phí xây dựng ít nhất là bao nhiêu? (đơn vị là triệu đồng)

Lời giải

Trả lời: 171



Gọi x là chiều rộng của đáy, h là chiều cao của đáy.

Thể tích của khối hộp chữ nhật không nắp bằng $576 m^3$ nên ta có

$$V = 2x \cdot x \cdot h = 576 m^3 \Rightarrow h = \frac{288}{x^2}.$$

$$\text{Diện tích bề nước là } S = 2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x \frac{288}{x^2} = 2x^2 + \frac{1728}{x} = f(x).$$

$$f'(x) = 4x - \frac{1728}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{432}.$$

$$\text{Suy ra } \min f(x) = f(\sqrt[3]{432}).$$



Chi phí thấp nhất để xây bể là $f(\sqrt[3]{432})$. $500.000 \approx 171$ triệu đồng.

Câu 28: Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Lời giải

Trả lời: 9

Thời gian cá bơi ngược dòng 300 km là: $t = \frac{300}{v-6}$.

Năng lượng tiêu hao được cho bởi công thức: $E(v) = cv^3t = 300c \cdot \frac{v^3}{v-6}$.

Xét hàm số $f(v) = \frac{v^3}{v-6}, v \neq 6$.

Ta có: $f'(v) = \frac{v^2(2v-18)}{(v-6)^2}$. Cho $f'(v) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v=0 \text{ (loại)} \\ v=9 \end{cases}$.

Vậy vận tốc bơi của cá là 9km/h để năng lượng tiêu hao là thấp nhất.

Câu 29: Việc chạy quá tốc độ làm tăng mức tiêu hao nhiên liệu và giảm hiệu suất nhiên liệu do sức cản lăn của lốp, lực ma sát và lực cản của không khí. Mặc dù các phương tiện đạt mức tiết kiệm nhiên liệu tối ưu ở các tốc độ khác nhau, nhưng hiệu suất tiết kiệm nhiên liệu thường giảm nhanh chóng ở các tốc độ trên 80 km/h.

Giả sử mối quan hệ giữa các mức tiêu thụ nhiên liệu $F(l/100\text{km})$

và tốc độ $V(\text{km/h})$ được cho bởi công thức $F(V) = \frac{V^2}{500} - \frac{V}{4} + 14$.

Tốc độ $V(\text{km/h})$ bằng bao nhiêu để mức tiêu hao nhiên liệu là nhỏ nhất?

Lời giải

Trả lời: 62,5

Ta có: $F'(V) = \frac{V}{250} - \frac{1}{4}$. Cho $F'(V) = 0 \Rightarrow V = \frac{125}{2}$.

Từ đó suy ra mức tiêu hao nhiên liệu là nhỏ nhất khi $V = \frac{125}{2} = 62,5$.

Câu 30: Một nhà máy làm bao bì muốn sản xuất các vỏ hộp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 216cm^3 và đáy hộp là hình vuông. Tìm chiều cao (cm) của hộp sao cho chi phí làm vỏ hộp là nhỏ nhất.

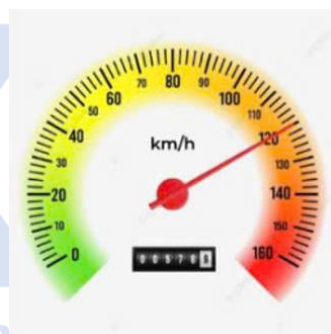
Lời giải

Trả lời: 1

Gọi cạnh đáy là $x(\text{cm})$ ($x > 0$)

Ta có: $V = B.h = 216 \Rightarrow h = \frac{216}{B} = \frac{216}{x^2}$

$S = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x \cdot \frac{216}{x^2} = 2x^2 + \frac{864}{x}$





$$S' = 4x - \frac{864}{x^2} = \frac{4x^3 - 864}{x^2}$$

$$\text{Vậy } S' = 4x^3 - 864 = 0 \Rightarrow x = 6\sqrt{6}$$

x	$-\infty$	$6\sqrt{6}$	$+\infty$
S'	$-$	0	$+$
S	$+\infty$		$+\infty$

Lập bảng biến thiên thấy $x = 6\sqrt{6}$ thì chi phí làm hộp nhỏ nhất, khi đó chiều cao hộp là $h = \frac{216}{x^2} = \frac{216}{216} = 1$ (cm).

Câu 31: Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 3,2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu triệu đồng một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 3,6

Gọi x (nghìn đồng) là số tiền tăng giá thêm cho mỗi căn hộ trong 1 tháng.

Số căn hộ cho thuê là $20 - \frac{x}{200}$.

$$\text{Số tiền thu được là } P = (3200 + x) \left(20 - \frac{x}{200} \right) = -\frac{1}{200}x^2 + 4x + 64000$$

Số tiền thu được lớn nhất là $P_{\max} = 64800 \Leftrightarrow x = 400$ (nghìn đồng). (thỏa $\frac{x}{200} \in \mathbb{N}$).

Vậy công ty nên cho thuê mỗi căn hộ với giá 3600000 đồng/tháng hay 3,6 triệu đồng/1 tháng.

Câu 32: Một con tàu tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 252 km so với bề mặt của Mặt Trăng, trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm số cho bởi công thức $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 252$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét. Khoảng cách nhỏ nhất của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng là bao nhiêu kilômét khi $t \in [0, 50]$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 10

$$h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 252$$

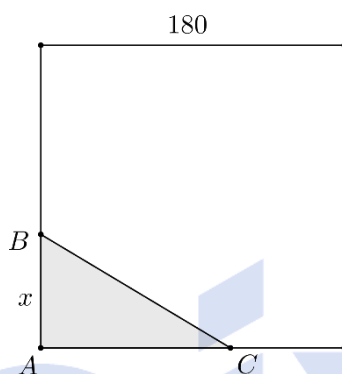
$$\Rightarrow h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t \approx 55(L) \\ t \approx 18(N) \end{cases}$$



x	0	18	50		
y'		-	0	+	0
y	252		10,08		252

Vậy khoảng cách nhỏ nhất là: 10.

Câu 33: Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh 180 cm . Người ta cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ. Biết $AB = x$ ($0 < x < 70\text{ cm}$) là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng 150 cm . Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: 50

$$AB = x \quad (0 < x < 70\text{ cm})$$

$$\text{Ta có: } AB + BC = 150 \Rightarrow BC = 150 - x$$

$$AC = \sqrt{(150 - x)^2 - x^2} = \sqrt{22500 - 300x}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{22500 - 300x}$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{22500 - 300x} + \frac{1}{2} x \cdot \frac{-150}{\sqrt{22500 - 300x}} = \frac{22500 - 450x}{2\sqrt{22500 - 300x}}$$

$$S' = 0 \Rightarrow 22500 - 450x = 0 \Rightarrow x = 50$$

Lập bảng biến thiên

x	0	50	70
S'	+	0	-
S			



Vậy: $x = 50$

Câu 34: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$. Trong đó, t là thời gian được tính bằng giây ($t \geq 0$) (Nguồn: R.



Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Biết số lượng vi khuẩn lớn nhất là a con tại thời điểm $t = b$ (giây). Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1015

$$\text{Ta có: } N'(t) = \frac{(100t)'(100+t^2) - (100+t^2)'(100t)}{(100+t^2)^2} = \frac{100(100+t^2) - 2t \cdot 100t}{(100+t^2)^2}$$

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-100t^2 + 10000}{(100+t^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 & (\text{nhan}) \\ t = -10 & (\text{loai}) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$		+	-
$N(t)$	1000	1005	1000

Dựa vào bảng biến thiên thì số lượng vi khuẩn lớn nhất là 1005 con tại thời điểm 10 giây
Suy ra: $a = 1005$, $b = 10$. Vậy $a + b = 1015$.

Câu 35: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = -t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 11t + 5$. Vận tốc chuyển động của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = t_0$. Hỏi giá trị t_0 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1,5

Ta có vận tốc chuyển động của chất điểm là $v(t) = S'(t) = -3t^2 + 9t + 11$;

$$v'(t) = -6t + 9; \quad v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$$

t	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$v'(t)$		+	-
$v(t)$			

Từ bảng biến thiên của hàm số $v(t)$ trên $(0; +\infty)$. Ta thấy $v(t)$ đạt GTLN tại $t_0 = \frac{3}{2} = 1,5$ (đơn vị tính theo đơn vị t của hàm $S(t)$).

Câu 36: Từ năm 2004 đến năm 2019 doanh thu $R(t)$ (tính bằng triệu đô la) của McDonald's có thể được mô hình hóa bởi $R(t) = -130,769t^3 + 2296,47t^2 - 11493,5t + 35493$ ($4 \leq t \leq 19$), trong đó t là đại diện cho năm, với $t = 4$ tương ứng với năm 2004. Biết rằng $R'(t)$ là hàm tốc độ doanh thu theo thời gian. Tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm nào? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo triệu đô la mỗi năm).

Lời giải



Trả lời: 2006

Ta có hàm tốc độ doanh thu là $R'(t) = -392,307t^2 + 4592,94t - 11493,5$.

$$R''(t) = -784,614t + 4592,94 = 0$$

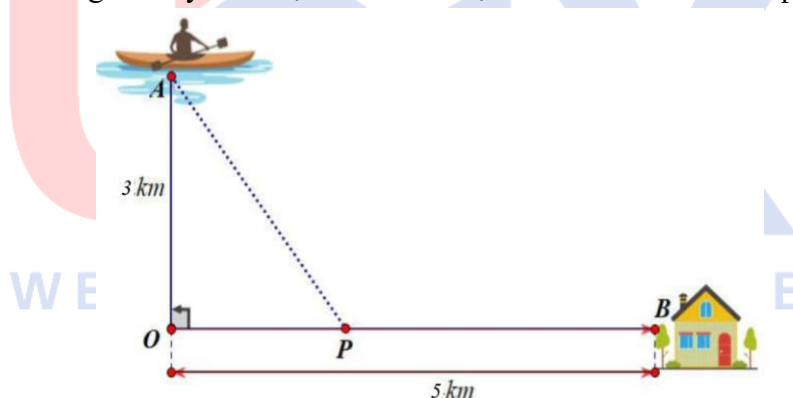
$$\Leftrightarrow t \approx 6 \text{ (nhận).}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số

t	4	6	19
$R''(t)$	+	0	-
$R'(t)$	601	1941	-65851

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy rằng tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm 2006 (tương ứng với $t = 6$).

Câu 37: Một người đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông 3 km , anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B ở ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là 5 km (tham khảo hình vẽ). Biết rằng vận tốc chèo thuyền của người đó là $6(\text{km/h})$ (bỏ qua sức gió và vận tốc dòng nước) và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10(\text{km/h})$. Khoảng thời gian ngắn nhất để người này đi từ vị trí A đến được điểm B là bao nhiêu phút?



Lời giải

Trả lời: 54

Gọi x (km) là độ dài quãng đường OP ; $5-x$ (km) là độ dài quãng đường PB .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AP = \sqrt{x^2 + 9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường PB là: $\frac{5-x}{10}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{5-x}{10}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{5-x}{10}$ trên khoảng $(0; 5)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{10}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 9} = 5x \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

Bảng biến thiên



x	0	$\frac{9}{4}$	10
V'	+	0	-
V	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{-3 + \sqrt{108}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $\frac{9}{10}$ (h) Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người này đến B là $\frac{9}{10}$ (h) = 54'.

Câu 38: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 100000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm người ta xác định được số lượng vi khuẩn N thay đổi theo thời gian bằng công thức: $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (thời gian t tính bằng giây $0 \leq t \leq 45$) Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian dài nhất để vi khuẩn tăng. Hiệu $a - b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -25

Ta có: $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000 \Rightarrow N'(t) = 240t^2 - 7200t + 48000$.

Ta có: $N'(t) = 240t^2 - 7200t + 48000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = 20 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	0	10	20	45	
$N'(t)$	+	0	-	0	+
$N(t)$					

Vậy khi khuẩn tăng trong khoảng thời gian lâu nhất là $(20; 45) \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 45 \end{cases} \Rightarrow a - b = -25$.

Câu 39: Ông An dự định sử dụng hết 8 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Hỏi ông An có thể làm được cái bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 2,05

Gọi chiều rộng, chiều cao của bể cá là $x; h$ ($x; h > 0$). Khi đó chiều dài bể cá là $2x$

Tổng diện tích các mặt không có nắp là: $2x^2 + 4xh + 2xh = 8 \Leftrightarrow h = \frac{4 - x^2}{3x}$.

Vì $x, h > 0$ nên $x \in (0; 2)$

$$V = 2x \cdot x \cdot h = \frac{8x - 2x^3}{3}; V' = \frac{8}{3} - 2x^2$$



$$V' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

x	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
V'	+	0	-
V	0	$\frac{32\sqrt{3}}{27}$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $\frac{32\sqrt{3}}{27} \approx 2,05$.

Câu 40: Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1+4e^{-t}}$. Trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Hỏi sau khi hạt giống bắt đầu nảy mầm, sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hai chữ số ở phần thập phân).

Lời giải

Trả lời: 1,39

$$f(t) = \frac{200}{1+4e^{-t}}$$

Vì đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó nên để tìm được sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất ta tìm GTLN của hàm số:

$$f'(t) = \frac{800e^{-t}}{(1+4e^{-t})^2}; (t \geq 0)$$

$$f''(t) = 800e^{-t} \cdot \left[\frac{4e^{-t} - 1}{(1+4e^{-t})^3} \right]$$

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow 800e^{-t} \cdot \left[\frac{4e^{-t} - 1}{(1+4e^{-t})^3} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4e^{-t} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow t = \ln 4$$

Bảng biến thiên:



t	0	$\ln 4$	$+\infty$	
$f''(t)$		+	0	-
$f'(t)$	32	50	0	

Hàm số $f'(t)$ đạt GTLN bằng 50 khi $t = \ln 4 \Leftrightarrow t \approx 1,39$.

Vậy khi hạt giống bắt đầu nảy mầm, sau khoảng 1,39 tháng tốc độ tăng chiều cao của cây sẽ là lớn nhất.

Câu 41: Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hàng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) được tính bởi công thức $P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 44000$ ($x \geq 0$). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 196

$$P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 44000 \Rightarrow P'(x) = -0,9x^2 + 72x + 1800; P'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -20 \\ x = 100 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên suy ra lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được khi $x=100$

$$P(100) = 196000 \text{ nghìn đồng} = 196 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 42: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 tivi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng 1 chiếc thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 100 tivi mỗi tuần. Biết rằng lợi nhuận thu được của nhà sản xuất được tính bởi công thức $P(x) = R(x) - C(x)$. Trong đó $C(x) = 12000 - 3x$ (x là số tivi bán ra trong tuần) là hàm chi phí hàng tuần và $R(x)$ là hàm doanh thu. Hỏi nhà sản xuất nên đặt giá bán là mấy triệu đồng để lợi nhuận là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 8

Gọi hàm cầu là $p(x) = ax + b$ với x là số tivi bán được và $p(x)$ là giá bán một chiếc tivi.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} p(1000) = 14 \\ p(1100) = 13,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1000a + b = 14 \\ 1100a + b = 13,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{200} \\ b = 19 \end{cases} \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$$

$$P(x) = x.p(x) - C(x) = \left(-\frac{1}{200}x + 19\right).x - 12000 + 3x = -\frac{1}{200}x^2 + 22x - 12000$$

$$\text{Do } P(x) \text{ là hàm bậc hai có hệ số } a < 0 \text{ nên } P(x) \text{ lớn nhất khi } x = \frac{-22}{2\left(-\frac{1}{200}\right)} = 2200 \Rightarrow p(2200) = 8.$$

Cần đặt giá bán là 8 triệu đồng.

Câu 43: Khi một loại thuốc được tiêm vào mạch máu của bệnh nhân thì nồng độ (mg/L) của thuốc trong máu sau t giờ (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức:

$$C(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}.$$



Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu trong khoảng thời gian 12 giờ sau khi tiêm (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Lời giải

Trả lời: 10,6

$$C'(t) = \frac{-30t^2 + 60}{(t^2 + 2)^2}.$$

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{2}$	12
$C'(t)$	+	0	-
$C(t)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta có nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất bằng

$$C(\sqrt{2}) = \frac{30\sqrt{2}}{4} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ trong khoảng thời gian 12 giờ sau khi tiêm.}$$

Làm tròn ta được 10,6.

Câu 44: Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức $C(x) = 0,001x^2 - 2x + 100\,000$, trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị nghìn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu nghìn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30\,000 cuốn

Lời giải

Trả lời: 22

$$T(x) = C(x) + 4x = 0,001x^2 + 2x + 100\,000.$$

$$\text{Suy ra } M(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{0,001x^2 + 2x + 100\,000}{x} = 0,001x + 2 + \frac{100\,000}{x}, \quad 0 < x \leq 30\,000.$$

$$M'(x) = 0,001 - \frac{100\,000}{x^2} = \frac{0,001x^2 - 100\,000}{x^2}.$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 10\,000 & (\text{nhan}) \\ x = -10\,000 & (\text{loai}) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của $M(x)$



x	0	10000	30000
$M'(x)$	–	0	+
$M(x)$			

Vậy chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là 22 nghìn đồng.

Câu 45: Sau khi phát hiện dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người bị nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 1 + 18t^2 - \frac{1}{3}t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm t . Vào ngày thứ bao nhiêu thì tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 18

Số người bị nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 1 + 18t^2 - \frac{1}{3}t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 30$.

Hàm tốc độ truyền bệnh $f'(t) = -t^2 + 36t$.

Tốc độ truyền bệnh đạt GTLN tại ngày thứ $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-36}{2 \cdot (-1)} = 18$.

Câu 46: Một người quản lý một trang trại nuôi cá xác định rằng: Sau t tháng từ khi thả 300 con cá X (với $0 \leq t \leq 10$) thì khối lượng trung bình $m(t)$ tính theo kilogram của một con cá X ước tính là $m(t) = 0,45 \left(0,2 + \frac{141}{155}t - 0,05t^2 \right)$. Người này nhận định rằng tỉ lệ giữa số lượng cá X còn sống trong ao so với số lượng cá X thả ban đầu sau t tháng kể từ ngày thả là $p(t) = \frac{31}{31+t}$.

Biết rằng sản lượng cá X tại một thời điểm được tính bằng tổng khối lượng của các con cá X đã thả còn sống trong ao lúc đó. Hỏi với những nhận định trên của người quản lý thì dự kiến trong tối đa 10 tháng nuôi, sản lượng cá X lớn nhất có thể đạt được là bao nhiêu? (kết quả tính theo đơn vị kilogram)

Lời giải

Trả lời: 459

Gọi $M(t)$ là sản lượng cá X tại thời điểm t (với $0 \leq t \leq 10$).

Theo đề ta có:

$$M(t) = 300 \cdot p(t) \cdot m(t) = 300 \cdot \frac{31}{31+t} \cdot 0,45 \left(0,2 + \frac{141}{155}t - 0,05t^2 \right) = \frac{-209,25t^2 + 3807t + 837}{t+31}.$$

Sản lượng $M(t)$ lớn nhất tức là giá trị lớn nhất của hàm số $y = M(t)$ với $0 \leq t \leq 10$.

Xét hàm số $y = M(t)$ với $0 \leq t \leq 10$ có

$$M'(t) = \frac{-209,25t^2 - 12973,5t + 117180}{(t+31)^2}.$$



$$M'(t) = 0 \Leftrightarrow -209,25t^2 - 12973,5t + 117180 = 0 \Rightarrow t = 8 \text{ (loại)}$$

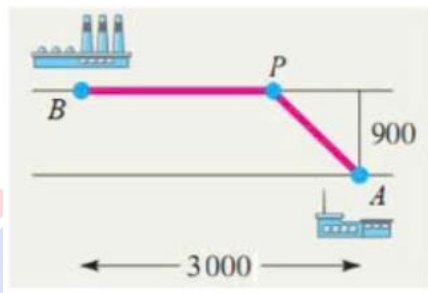
BBT

t	0	8	10
M'	+	0	-
M	27	459	438,6

Dựa vào BBT ta được $\max_{[0;10]} M(t) = M(8) = 459$.

Vậy dự kiến trong tối đa 10 tháng nuôi, sản lượng cá X lớn nhất có thể đạt 459kg.

Câu 47: Một đường cáp điện được kéo từ một trạm điện A ở một bên sông rộng 900 mét đến một nhà máy là ở bờ bên kia của sông, nhà máy cách trạm điện 3000 mét tính xuôi theo bờ sông. Đường cáp này được mô hình hóa thành đường gấp khúc APB như hình vẽ, trong đó đoạn PB đặt trên bờ sông. Giả định rằng tỉ lệ giữa chi phí để kéo 1 mét cáp dưới nước và chi phí kéo 1 mét cáp trên bờ bằng 1,25.



Hỏi để tiết kiệm chi phí nhất thì vị trí P cách nhà máy ở bao nhiêu mét

Lời giải

Trả lời: 1800

Đặt $PB = 100x$, khi đó $PB = \sqrt{(3000 - 100x)^2 + 900^2} = 100\sqrt{x^2 - 60x + 981}$.

Gọi k là chi phí để kéo cáp trên bờ, khi đó chi phí làm cáp dưới nước sẽ là $\frac{5}{4}k$.

Tổng chi phí để làm cáp là:

$$k \cdot 100x + \frac{5}{4}k \cdot 100\sqrt{x^2 - 60x + 981} = 100k \left(4x + 5\sqrt{x^2 - 60x + 981} \right) \text{ với } 0 < x < 30.$$

Xét hàm số $f(x) = 4x + 5\sqrt{x^2 - 60x + 981}$ với $0 < x < 30$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4 + \frac{5x - 150}{\sqrt{x^2 - 60x + 981}} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 60x + 981} = 150 - 5x \Rightarrow x = 18.$$

Bảng biến thiên:

x	0	18	30
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		147	

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{x \in (0;30)} f(x) = f(18) = 147$.

Vậy để tiết kiệm chi phí nhất thì vị trí P cách nhà máy $100x = 1800$ mét.



Câu 48: Trong hệ trục tọa độ (Oxy), cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị (C). Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 4,39

Ta có $y = x + \frac{1}{x+1}$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = -1$ và tiệm cận xiên là $y = x$.

Suy ra đồ thị hàm số nhận $I(-1; -1)$ làm tâm đối xứng.

Khoảng cách A, B ngắn nhất khi A, B đối xứng với nhau qua I.

Gọi $A\left(a; a + \frac{1}{a+1}\right)$ với $a > -1$ suy ra $B\left(-2-a; -2-a + \frac{1}{-a-1}\right)$.

Khi đó $AB^2 = 4(a+1)^2 + 4\left(a+1 + \frac{1}{a+1}\right)^2 = 8(a+1)^2 + \frac{4}{(a+1)^2} + 8 \geq 8\sqrt{2} + 8$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $8(a+1)^2 = \frac{4}{(a+1)^2} \Leftrightarrow a = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Suy ra $AB \geq \sqrt{8\sqrt{2} + 8} \approx 4,39$.

Câu 49: Hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm một tháng thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm được biểu diễn bởi công thức: $P(x) = 50 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 95 + 35x$ (triệu đồng). Hỏi lợi nhuận lớn nhất nhà máy A có thể thu được trong một tháng khi bán hàng cho nhà máy B là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 612

Ta có số tiền thu được khi bán x tấn sản phẩm là $P(x) \cdot x = (50 - x^2)x$.

Vậy số tiền lợi nhuận thu được sẽ được tính bởi công thức:

$f(x) = (50 - 0,001x^2)x - (95 + 35x) = -0,001x^3 + 15x - 95$ với $0 \leq x \leq 100$.

Ta có: $f'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50\sqrt{2} & (n) \\ x = -50\sqrt{2} & (l) \end{cases}$.

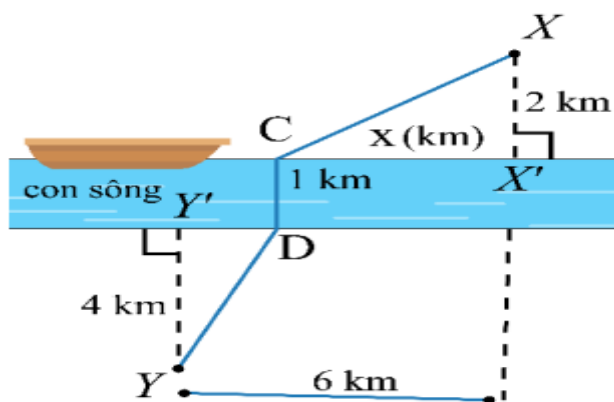
Ta có: $\begin{cases} f(0) = -95 \\ f(50\sqrt{2}) \approx 612 \\ f(100) = 405 \end{cases}$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất nhà máy A có thể thu được trong một tháng khi bán hàng cho nhà máy B là 612 triệu đồng.

Câu 50: Một con đường cần được xây dựng giữa hai thành phố X và Y nằm ở hai bên đối diện của một con sông có chiều rộng đều 1 km. X cách sông 2 km và Y cách sông 4 km, gọi hai hình chiếu vuông góc



của X và Y trên bờ sông là X' , Y' , khoảng cách giữa XX' và YY' là 6km . Một cây cầu sẽ được xây dựng để cho phép giao thông đi qua sông. Vị trí của cây cầu CD cách XX' là x (km). Tìm x để con đường cần được xây dựng giữa hai thành phố X và Y được ngắn nhất.



Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $CX' = x \Rightarrow DY' = 6 - x$.

Con đường cần xây dựng giữa hai thành phố X và Y là

$$XC + CD + DY = \sqrt{2^2 + x^2} + 1 + \sqrt{4^2 + (6 - x)^2}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2^2 + x^2} + 1 + \sqrt{4^2 + (6 - x)^2}$ trên đoạn $[0; 6]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} - \frac{6 - x}{\sqrt{4^2 + (6 - x)^2}}.$$

$$\text{Giải } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [0; 6].$$

$$\text{Ta có } f(0) = 3 + 2\sqrt{13}; f(2) = 1 + 6\sqrt{2}; f(6) = 5 + 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[0; 6]} f(x) = f(2) = 1 + 6\sqrt{2}.$$

Câu 51: Một công ty sản xuất và bán hết x sản phẩm ($0 < x \leq 1000$), tổng số tiền công ty thu được là

$$f(x) = 1000x - x^2 \text{ (nghìn đồng)}, \text{ chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là } g(x) = x + \frac{30}{x} + 680$$

(nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (nghìn đồng) ($0 < t < 200$). Tìm mức thuế phụ thu t (nghìn đồng) trên một sản phẩm sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và công ty cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó.

Lời giải

Trả lời: 40

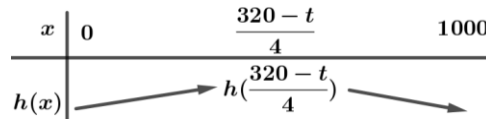
Khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 1000$), lợi nhuận doanh nghiệp thu được là

$$h(x) = (1000x - x^2) - (x^2 + 680x + 30) - tx = -2x^2 + (320 - t)x - 30$$

Xét hàm $-2x^2 + (320 - t)x - 30$, với $0 < x \leq 1000$.

$$\text{Ta có: } h'(x) = -4x + 320 - t. \text{ Có } h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{320 - t}{4}$$

Bảng biến thiên



Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\lim_{[1;1000]} h(x) = h\left(\frac{320-t}{4}\right)$ tại $x = \frac{320-t}{4}$. Khi đó, số tiền thuê thu được từ

$$\text{doanh nghiệp là } k(t) = \frac{320-t}{4} \cdot t = -\frac{1}{4}(t^2 - 320t + 25600) + 6400 = -\frac{1}{4}(t-160)^2 + 6400$$

≤ 6400 , với mọi $t \in (0; 200)$.

Vì vậy, ta có: $\lim_{t \in (0; 200)} k(t) = 6400$ tại $t = 160$. Khi đó, $x = 40$ (sản phẩm).

Câu 52: Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Singapore ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 60000 khán giả. Ban tổ chức bán với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 24000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta nhận thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

Lời giải

Trả lời: 90

Gọi x là số lần giảm 10 nghìn giá vé.

Khi đó giá vé là $100 - 10x$ nghìn đồng.

Số khán giả là $24000 + 3000x$.

$$\text{Doanh thu bán vé là } R(x) = (100 - 10x)(24000 + 3000x) = -3 \cdot 10^4 \cdot x^2 + 6 \cdot 10^4 \cdot x + 24 \cdot 10^5$$

$R(x)$ là hàm số bậc hai đạt GTLN tại $x_0 = \frac{-b}{2a} = 1$.

Vậy giá vé để doanh thu đạt lớn nhất là $100 - 10 \cdot 1 = 90$ nghìn đồng.

Câu 53: Anh Nam có một cái ao với diện tích 50 m^2 để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 40 con / m^2 và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con / m^2 thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm 0,5 kg. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Lời giải

Trả lời: 1600

Gọi x là số lần giảm đi 8 con / m^2 . Khi đó mật độ cá vụ tới là $40 - 8x$. Điều kiện $0 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{N}$

$$\text{Ở vụ vừa qua mỗi con cá thành phẩm sẽ nặng } \frac{3000}{40 \cdot 50} = 1,5 \text{ (kg)}.$$

Ở vụ tới mỗi con cá thành phẩm sẽ nặng $1,5 + 0,5x$.

$$\text{Năng suất cá của vụ tới là } N = 50 \cdot (40 - 8x)(1,5 + 0,5x) = -200x^2 + 400x + 3000 \text{ (kg)}.$$

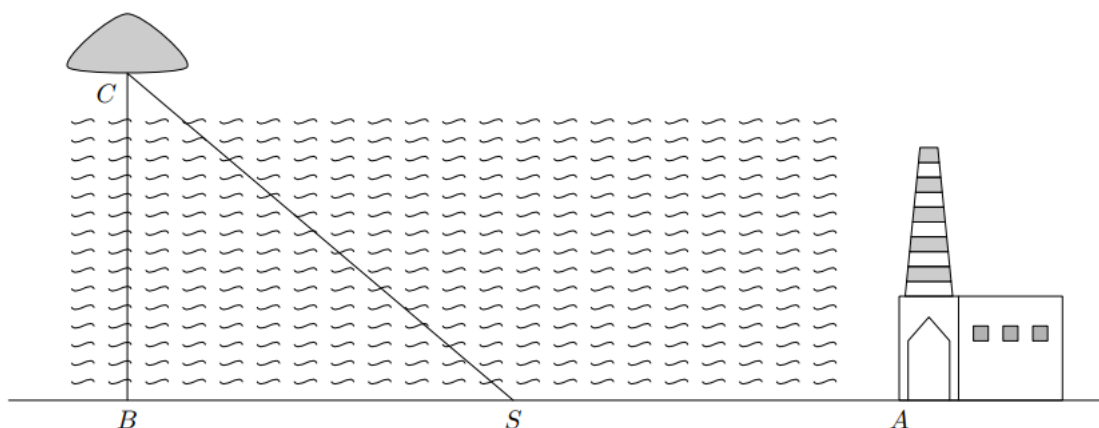
$$\text{Ta có } N' = -8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Ta có } N(0) = 3000, N(5) = 0, N(1) = 3200.$$

$$\text{Suy ra } \max_{x \in [0; 5]} N = N(1) = 3200 \text{ (kg)}.$$

Vậy vụ tới anh Nam nên mua $(40 - 8 \cdot 1) \cdot 50 = 32 \cdot 50 = 1600$ cá giống để thả thì năng suất sẽ cao nhất.

Câu 54: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A (nằm tại bờ biển là đường thẳng AB) đến một hòn đảo C , khoảng cách ngắn nhất từ đảo về bờ biển là đoạn BC dài 1 km, khoảng cách từ B đến A là 4 km được minh họa bằng hình vẽ dưới đây.



Biết rằng mỗi km dây điện đặt dưới nước chi phí mất 5000 USD, còn đặt dưới đất chi phí mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C có chi phí là ít nhất?

Lời giải

Trả lời: 3,25

Đặt $AS = x$ với $0 < x < 4$, khi đó $BS = 4 - x$ và $CS = \sqrt{BC^2 + BS^2} = \sqrt{1 + 4 - x^2}$.

Chi phí lắp đặt dây điện từ A đến S là $P_1 = 3000x$.

Chi phí lắp đặt dây điện từ C đến S là $P_2 = 5000\sqrt{1 + 4 - x^2}$.

Tổng chi phí lắp đặt dây điện là

$$P = P_1 + P_2 = 3000x + 5000\sqrt{1 + 4 - x^2}.$$

Xét hàm $f(x) = 3000x + 5000\sqrt{1 + 4 - x^2}$ trên khoảng $0; 4$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3000 - \frac{5000(4-x)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}.$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5(4-x) = 3\sqrt{x^2 - 8x + 17} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0	$\frac{13}{4}$	4
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Vậy để chi phí mắc dây điện là ít nhất thì điểm S cách A một khoảng là $\frac{13}{4} = 3,25$ km.



Câu 55: Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm ($0 < x \leq 2500$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được là $f(x) = 2006x - x^2$ và tổng chi phí là $g(x) = x^2 + 1438x - 1209$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (nghìn đồng) ($0 < t < 320$). Giá trị của t bằng bao nhiêu nghìn đồng để nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng nhận được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó?

Lời giải

Trả lời: 284

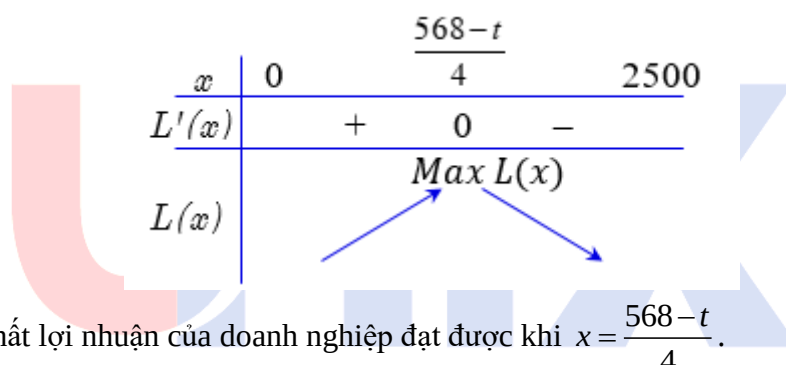
Hàm thuế phụ thu về nhà nước là $t(x) = t \cdot x$ ($t \in (0; 320)$) (nghìn đồng), hàm số lợi nhuận của doanh nghiệp là

$$L(x) = f(x) - g(x) - t(x) = 2006x - x^2 - (x^2 + 1438x - 1209) - tx \quad (x \in (0; 2500]; t \in (0; 320))$$

$$L(x) = -2x^2 + (568 - t)x + 1209 \quad (x \in (0; 2500]; t \in (0; 320))$$

Ta có $L'(x) = -4x + (568 - t)$

Xét $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(568 - t)}{4} \in (0; 2500], \forall t \in (0; 320)$



Vậy giá trị lớn nhất lợi nhuận của doanh nghiệp đạt được khi $x = \frac{568 - t}{4}$.

Khi đó hàm thuế phụ thu $t(x) = \frac{t \cdot (568 - t)}{4} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{568}{2}\right)^2 = 20164$.

Vậy thuế phụ thu đạt giá trị lớn nhất khi: $t = 568 - t \Leftrightarrow t = 284$ (nghìn đồng) (TM).

Câu 56: Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm T được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm T là x (\$) thì số sản phẩm T các nhà máy sản xuất sẽ là $R(x) = x - 200$ và số sản phẩm T mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là $Q(x) = 4200 - x$. Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định trên thị trường quốc tế là $x_0 = 3200$ \$. Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là a (\$) và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là 4:1. Hãy xác định giá trị của a biết lãi mà doanh nghiệp thu được do xuất khẩu là nhiều nhất.

Lời giải

Trả lời: 100

Số sản phẩm xuất ra thị trường quốc tế là: $R(x) - Q(x) = x - 200 - (4200 - x) = 2x - 4400$.

Lãi trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là $3200 - x - a$ (\$):



Do tỉ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là 4:1.

$$\frac{3200 - x - a}{a} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow 3200 - x - a = 4a \Leftrightarrow x = 3200 - 5a \quad (*)$$

Gọi F là hàm lợi nhuận thu được do xuất khẩu.

$$\text{Ta có: } F = (3200 - x - a) \cdot (2x - 4400) \stackrel{(*)}{=} 4a \cdot (2000 - 10a) = 40a(200 - a)$$

Bài toán trở thành tìm GTLN của $F = 40a(200 - a)$, (Đk: $0 < a < 200$).

$$\text{Theo Cô si ta có: } F = 40a(200 - a) \leq 40 \cdot \left(\frac{a + 200 - a}{2} \right)^2 = 400000$$

$$\max F = 400000 \text{ khi } a = 200 - a \Leftrightarrow a = 100.$$

Vậy với $a = 100$ thì F đạt GTLN.

