



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

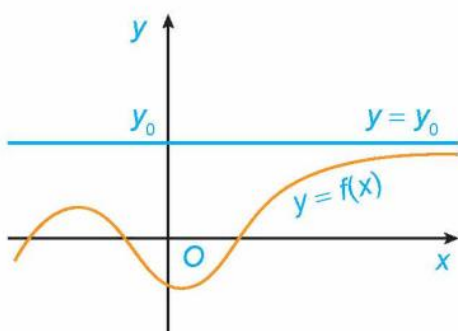
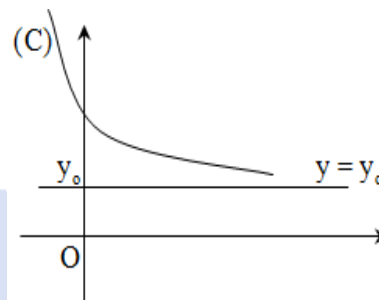


LÝ THUYẾT.

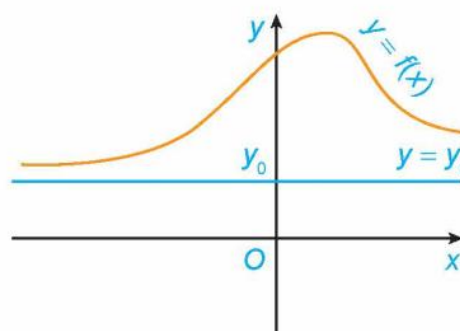
I. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ có xác định trên một khoảng vô hạn là khoảng có một trong các dạng $(a, +\infty)$; $(-\infty, a)$; $(-\infty, +\infty)$. Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường TCN** (hay **TCN**) của đồ thị nếu thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Ví dụ. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{2x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$



Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{2x+1}$ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

II. Đường tiệm cận đứng

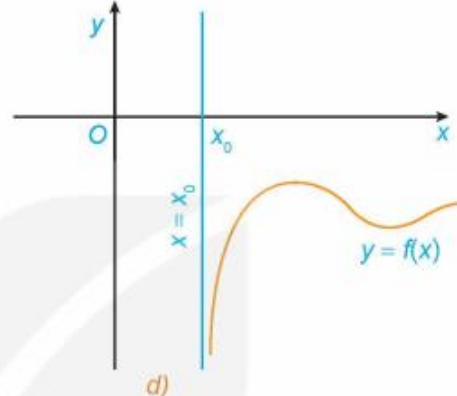
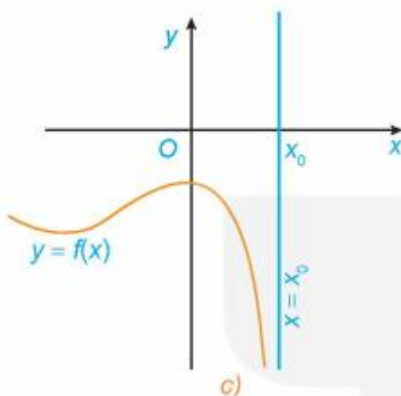
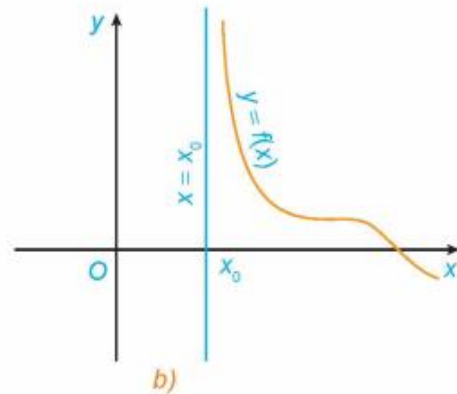
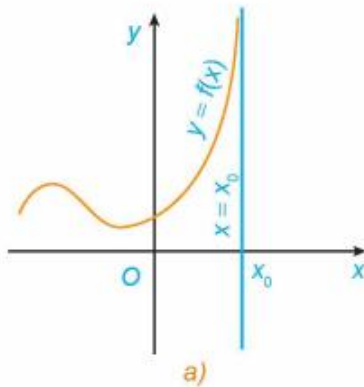
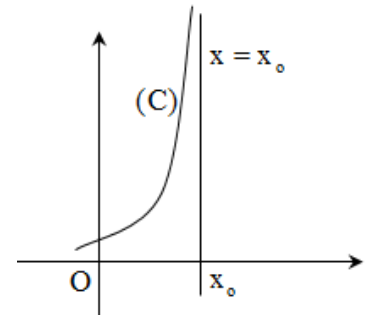
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng**

(TCD) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu thỏa mãn ít nhất

một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0$).

Lưu ý:

i) Hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ac \neq 0$ có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

ii) Hàm $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là những hàm đa thức

+) Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y = 0$.

+) Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì có tiệm cận ngang $y = \frac{a_n}{b_n}$ với a_n, b_n là hệ số của lũy thừa cao nhất

trên tử và dưới mẫu.

+) Nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì không có tiệm cận ngang.



$$+) x = x_0 \text{ là tiệm cận đứng} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x_0) = 0; f(x_0) \neq 0 \\ g(x_0) = f(x_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \end{cases}.$$

iii) Ứng dụng máy tính CASIO để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang

Để tìm tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang của một hàm số thông qua máy tính CASIO, ta sử dụng phím CALC trên máy.

Một số lưu ý về kết quả và cách bấm:

Giới hạn	Thao tác trên máy tính
$x \rightarrow x_0^+$	CALC $x_0 + 10^{-10}$
$x \rightarrow x_0^-$	CALC $x_0 - 10^{-10}$
$x \rightarrow +\infty$	CALC 10^{10}
$x \rightarrow -\infty$	CALC -10^{10}

Ví dụ 1: Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$, suy ra đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 2$.

Ví dụ 2: Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{2x-1}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x+4}{2x-1} = +\infty$, suy ra đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = \frac{1}{2}$.

► **Lời bình:** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$.

Ví dụ 3. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -1\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} = -\infty$

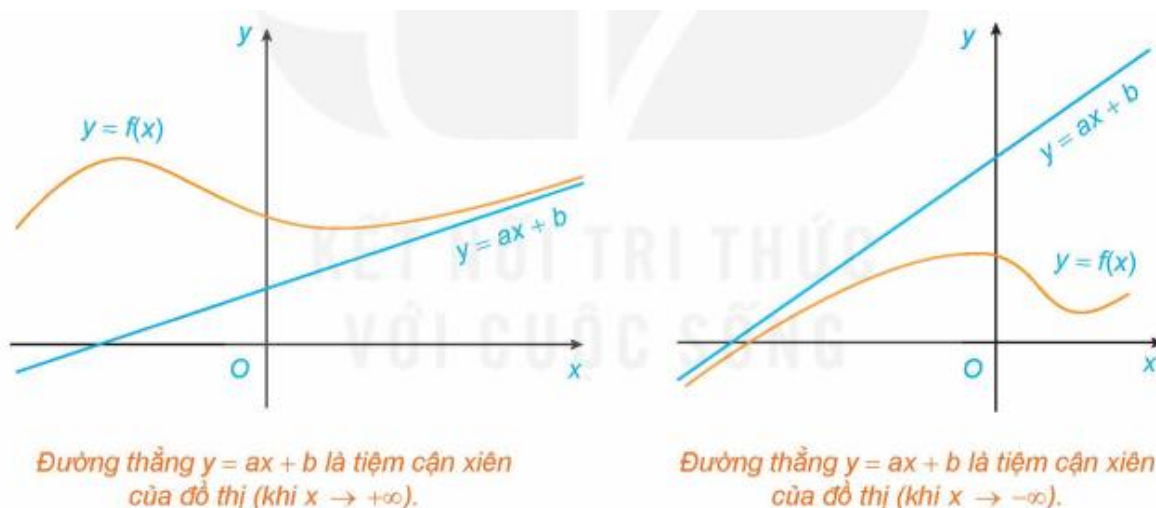
Vậy phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 2$ và $x = -1$.



III. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$ được gọi là một đường **tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như sau



Để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số ta cần tính hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau

$$+ a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

+ Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

Ví dụ. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x} = 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1 - x(x - 2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1 - x^2 + 2x}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x + 1}{x - 2} \right) = -1 \end{aligned}$$

Vậy đường tiệm cận xiên là $y = x - 1$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$. Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = -2$.

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 2 tiệm cận kẻ cả đứng và ngang.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Ta có

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x-3}{x(x+2)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2+2x-3}{(x+2)} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x+2} = 0$$

Vậy đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho khi $x \rightarrow -\infty$.

Ta lại có

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-3}{x(x+2)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2+2x-3}{(x+2)} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x+2} = 0$$

Vậy đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho khi $x \rightarrow +\infty$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = -2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Ta có

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+2x+3}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^2+2x+3}{(x+2)} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 4$$



Vậy đường thẳng $y = -x + 4$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho khi $x \rightarrow -\infty$.

Ta lại có

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x^2 + 2x + 3}{(x+2)} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 4$$

Vậy đường thẳng $y = -x + 4$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho khi $x \rightarrow +\infty$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = -2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + x + 6}{x - 1}$. Tìm tổng số đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Ta có

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + x + 6}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^2 + x + 6}{(x-1)} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{6}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 0$$

Vậy đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho khi $x \rightarrow -\infty$.

Ta lại có

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + x + 6}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x^2 + x + 6}{(x-1)} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 0$$

Vậy đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho khi $x \rightarrow +\infty$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = 1$.

DẠNG 2: TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ BIẾT BBT CỦA HÀM SỐ, ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐÓ HOẶC HÀM SỐ LIÊN QUAN

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên



x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	$+\infty$			
y'	+	0	-		+	0	-		-
y		5		10		$+\infty$		2	
	$-\infty$		2	1		2			3

Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 3$.

Vì $\lim_{x \rightarrow x_4^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = x_4$.

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 2 tiệm cận kể cả đứng và ngang.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		+	0	-		-
$f(x)$			5			10			$+\infty$	
	$-\infty$			0			2			3

Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$?

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{3}$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$ và $y = \frac{1}{3}$.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = x_2$ và $x = a \in (-\infty; x_1)$.

Dễ thấy $\lim_{x \rightarrow a^+} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_2^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x = x_2$ và $x = a$.

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 4 đường tiệm cận kể cả đứng và ngang.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Do đó $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$	

Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	2	-1	$+\infty$	m

Tìm các giá trị nguyên của $m \in [0; 5)$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng và ngang?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có

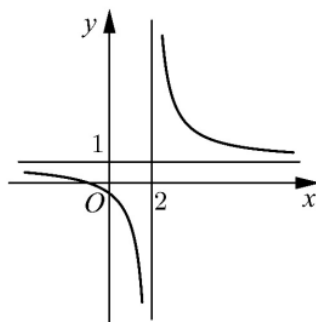
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m \Rightarrow y = m$ là đường tiệm cận ngang.

Do đó, để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì $m \neq 2$, mà $m \in [0; 5)$ nên $m \in \{0; 1; 3; 4\}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên.

Lời giải

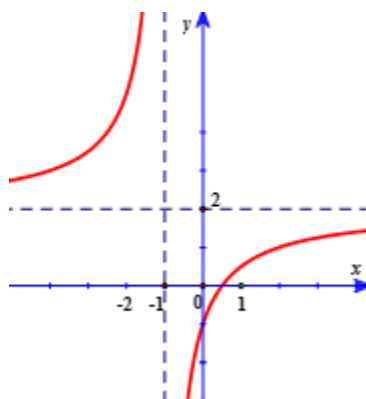


Nhìn vào đồ thị, ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. Do đó, đồ thị có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

Theo đồ thị, ta cũng có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Do đó, đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Vậy đồ thị có tiệm cận đứng $x = 2$ tiệm cận ngang $y = 1$.

Câu 11: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Đồ thị có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?



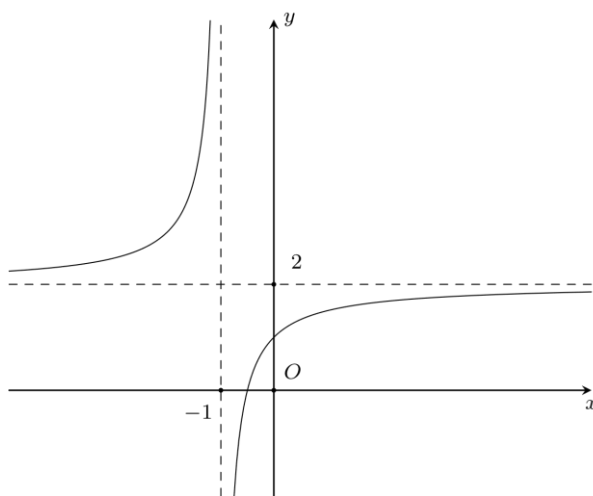
Lời giải

Nhìn vào đồ thị, ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$. Do đó, đồ thị có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

Theo đồ thị, ta cũng có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Do đó, đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Vậy đồ thị 2 đường tiệm cận là: tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

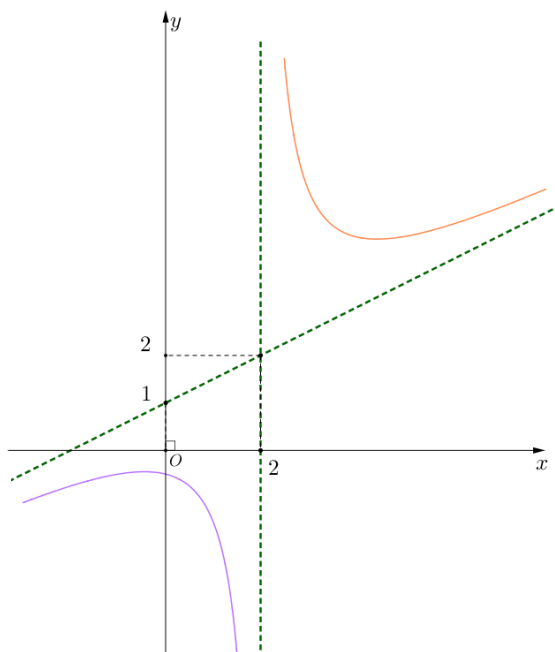


Phương trình đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị có đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là?

Lời giải

Gọi đường tiệm cận xiên của đồ thị có dạng $y = ax + b$

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm $A(2;2)$ và $B(0;1)$ suy ra

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy đường tiệm cận xiên của đồ thị là $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Câu 14: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{TCX : } y = x - 1.$$