



CHƯƠNG

I

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

## BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



### HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

**Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $0$       | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $+$       | $-$       |           |
| $y$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $1$       |

- Đường thẳng  $y = 0$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Đường thẳng  $x = 0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Đường thẳng  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng 4.

### Lời giải

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|

a) Đúng:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

b) Đúng:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

c) sai:  $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Suy ra đồ thị hàm số chỉ có tiệm đứng là đường thẳng  $x = 0$  và đường thẳng  $x = -2$

d) Sai:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$  nên đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận ngang và 2 tiệm cận đứng.

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau



|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$       | $1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  |           | $2$  |           | $4$ |           | $3$ |
|      | $-1$      |      | $-\infty$ |     | $0$       |     |

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$ .
- b) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một đường tiệm cận đứng.
- c) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một đường tiệm cận ngang.
- d) Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x)-2}$  là 5.

**Lời giải**

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|

**a) Sai.**

Từ bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  ta thấy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

**b) Đúng.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ nên } x=0 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

**c) Sai.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ nên } y = -1 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \text{ nên } y = 3 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi } x \rightarrow +\infty.$$

**d) Đúng.**

+ Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình  $f(x) = 2$  có ba nghiệm phân biệt.

Do đó đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x)-2}$  có ba đường tiệm cận đứng.

+  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-2} = 1$  nên  $y = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-2} = -\frac{1}{3} \text{ nên } y = -\frac{1}{3} \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi } x \rightarrow -\infty.$$

Do đó đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x)-2}$  có hai đường tiệm cận ngang.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 5.



**Câu 3:** Cho hàm số  $y = \frac{1-4x}{2x-1}$ .

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 2$ .
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là  $y = \frac{1}{2}$ .
- c) Đường tiệm cận ngang cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x - 2$  tại 3 điểm.
- d) Hình chữ nhật giới hạn bởi 2 tiệm cận của đồ thị và hai trục tọa độ có diện tích bằng 1.

**Lời giải**

|        |        |         |        |
|--------|--------|---------|--------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|--------|--------|---------|--------|

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là 2 đường thẳng  $x = \frac{-1}{2}, y = -2$ , nên **a sai, b sai**.

Giải phương trình  $x^3 - 3x - 2 = -2$ , tìm được 3 nghiệm nên **c đúng**.

**d sai** vì hình chữ nhật giới hạn bởi 2 tiệm cận của đồ thị và hai trục tọa độ có diện tích  $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

- a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.
- c) Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị nằm trên parabol  $y = x^2$ .
- d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị vuông góc với đường thẳng  $x + y - \pi = 0$ .

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận xiên lần lượt là 2 đường thẳng  $x = 1, y = x$ , nên **a đúng, b sai** do tiệm cận xiên qua gốc tọa độ O.

**c đúng** vì giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là  $I(1;1)$  nằm trên parabol  $y = x^2$ .

Đường tiệm cận xiên của đồ thị  $y = x$  vuông góc với đường thẳng  $y = -x + \pi$ , nên **d đúng**.

**Câu 5:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ .

- a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
- c) Giao điểm của hai tiệm cận nằm trục hoành.
- d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị song song với đường thẳng  $x + y = 0$ .

**Lời giải**



|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận xiên lần lượt là 2 đường thẳng  $x=1, y=x-1$ , nên **a đúng**, **b đúng** do tiệm cận xiên cắt  $ox, oy$  lần lượt tại  $A(1;0), B(0;-1)$  nên tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .

**c đúng** vì giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là  $A(1;0)$  nằm trên trục hoành.

Đường tiệm cận xiên của đồ thị  $y=x-1$  vuông góc với đường thẳng  $y=-x$ , nên **d sai**.

**Câu 6:** Cho hàm số  $(C): y = f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 3}$  biết đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng

$$\Delta: y = ax + b.$$

a) Giao điểm của  $\Delta$  và trục  $Ox$  có hoành lớn hơn 2.

b) Giao điểm của  $\Delta$  và tiệm cận đứng của  $(C)$  có tọa độ là  $(-3; -9)$ .

c) Gọi  $A = \Delta \cap Ox, B = \Delta \cap Oy$  ta có  $S_{OAB} > 3$ .

d) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = ax + b$  trên  $[0; 3]$  là 4.

**Lời giải**

|        |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|--------|---------|--------|--------|

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 2x] = -3 \Rightarrow \text{TCX } \Delta: y = 2x - 3.$$

$$\Delta \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} < 2 \text{ nên a sai.}$$

$$\text{TCĐ } x = -3 \text{ với } x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot (-3) - 3 = -9 \text{ vậy b đúng.}$$

$$A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A(-3; 0) \text{ và } B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} < 3 \text{ nên c sai.}$$

$$y = 2x - 3 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ suy ra GTLN trên } [0; 3] \text{ là } 2 \cdot 3 - 3 = 3 \text{ vậy d sai.}$$

**Câu 7:** Cho hàm số  $(C): y = f(x) = \sqrt{4x^2 + 8x - 12}$  và điểm  $M \in (C)$  với  $x_M < 0$ .

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận xiên đều là các hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

b) Xét  $\Delta_1: y = ax + b$  ( $b > 0$ ) là tiệm cận xiên của  $(C)$  điểm  $(1; 4) \in \Delta_1$ .

c) Xét  $\Delta_2: y = ax + b$  ( $b < 0$ ) là tiệm cận xiên của  $(C)$  khi đó  $d_{\max}(M, \Delta_2) < 2$ .

d) Hoành độ giao điểm của hai đường tiệm cận xiên bằng  $-2$ .

**Lời giải**

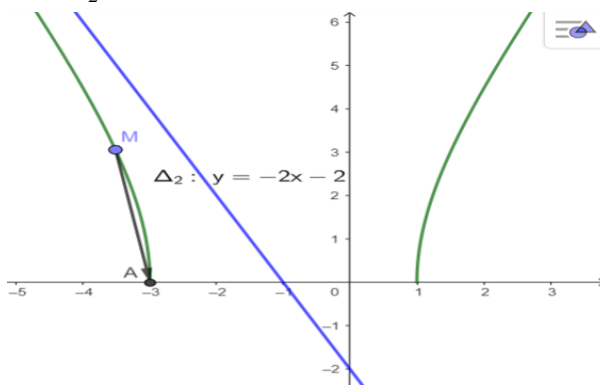
|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|

Ta có hai đường TCX của đồ thị hàm số là:

$$\begin{cases} \Delta_1: y = \sqrt{a} \left( x + \frac{b}{2a} \right) = 2x + 2 \\ \Delta_2: y = -\sqrt{a} \left( x + \frac{b}{2a} \right) = -2x - 2 \end{cases}.$$



- a) Dễ thấy hai đường TCX  $\Delta_2$  không đồng biến trên  $\mathbb{R}$  nên **a sai**.  
 b) Thay  $x=1$  vào  $\Delta_1$  ta có  $y=2 \cdot 1+2=4$  do đó **b đúng**.  
 c) Ta có đồ thị hàm số và TCX  $\Delta_2$



Tập xác định của hàm số  $D = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$ .

Do  $x_M < 0$  nên điểm  $M$  thuộc nhánh đồ thị bên trái.

Để  $d(M, \Delta_2)$  đạt GTLN thì  $M \equiv A(-3; 0)$ .

Vậy  $d_{\max}(M, \Delta_2) = d(A, \Delta_2) = \frac{|-2 \cdot (-3) - 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} < 2$  nên **c đúng**.

- d) Phương trình hoành độ giao điểm  $2x+2=2x-2 \Leftrightarrow x=-1 \neq -2$  vậy **d sai**.

**Câu 8:** Cho hàm số  $(C): y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x - 1}$  biết đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng  $\Delta: y = ax + b$  và tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = x_0$ .

- a) Giá trị của biểu thức  $S = 4a - 3b$  lớn hơn 4.  
 b) Gọi điểm  $M(4x_0; 2a)$  ta có độ dài của  $\overline{OM}$  nhỏ hơn 2.  
 c) Gọi  $A = \Delta \cap Ox, B = \Delta \cap Oy$  và  $C = Ox \cap x_0$  ta có  $S_{ABC} < 0,5$ .  
 d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = ax + b$  trên  $[-4; -1]$  lớn hơn -3.

### Lời giải

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|
|---------|--------|---------|---------|

Ta có  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$  và  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ f(x) - \frac{x}{2} \right] = \frac{-3}{4} \Rightarrow \text{TCX } \Delta: y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ . Tiệm cận đứng  $x = \frac{1}{2}$ .

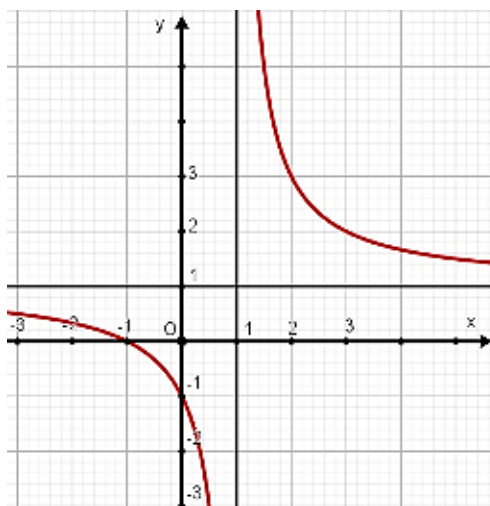
$S = 4a - 3b = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{4} = 4,25 > 4 \Rightarrow$  **a đúng**.

Điểm  $M(4x_0; 2a) = (2; 1) \Rightarrow OM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} > 2 \Rightarrow$  **b sai**.

Ta có  $A\left(\frac{3}{2}; 0\right), B\left(0; \frac{-3}{4}\right)$  và  $C\left(\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-3}{4} \right| \cdot \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} < 0,5 \Rightarrow$  **c đúng**.

Hàm số  $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$  đạt GTNN tại  $x = -4 \Rightarrow \min_{[-4; -1]} y = \frac{-11}{4} = -2,75 > -3$  **d đúng**.

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ.



- a) Tiệm cận đứng của đồ thị (C) là đường thẳng có phương trình là  $x = -1$ .
- b) Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định.
- c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ  $(0; -1)$ .
- d)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ .

**Lời giải**

|        |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|--------|---------|--------|--------|

a) S

Từ đồ thị hàm số đã cho ta có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = 1$ .

b) Đ

Theo chiều tăng của trục số ta có đồ thị hàm số đã cho luôn đi theo hướng đi xuống (tức giảm dần) nên hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định.

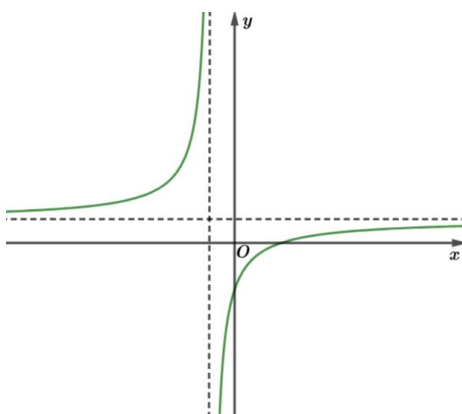
c) S

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ  $(-1; 0)$ .

d) S

Vì từ đồ thị hàm số đã cho ta có tiệm cận ngang là  $y = 1$ , mà đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  có tiệm cận ngang là  $y = 2$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{2x+1}$  có đồ thị (C) như hình vẽ.





a) Đường thẳng  $x = -\frac{1}{2}$  là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

b) Đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$  là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

c)  $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2} \right] = 0$ .

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

c) Đ

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$  nên đường thẳng  $x = -\frac{1}{2}$  là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

d) Đ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$  nên đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$  là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

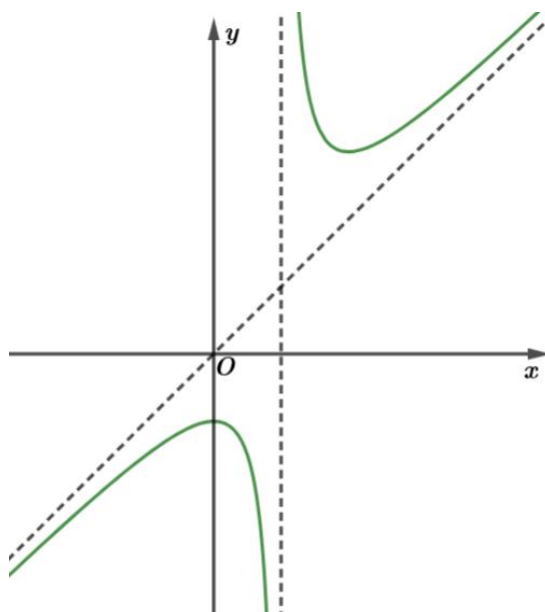
e) S

$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$

d) Đ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



a) Đường thẳng  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị (C).



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1.$

d) Đường thẳng  $y = x$  là tiệm cận xiên của đồ thị  $(C).$

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|

a) Đ

b) S

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$$

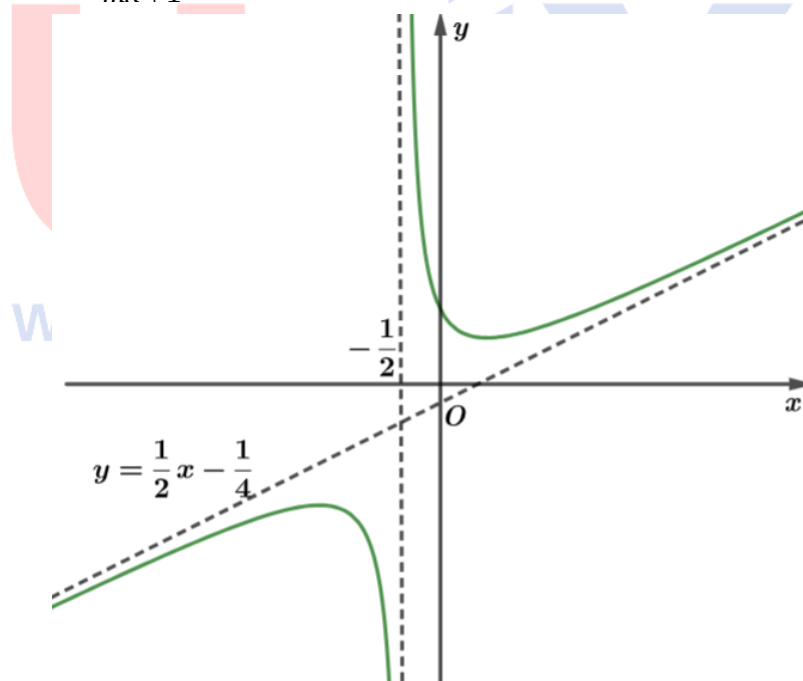
c) S

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

d) Đ

Từ hai ý b và c ta có đường tiệm cận xiên của đồ thị  $(C)$  là  $y = x.$

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{nx^2 + 1}{mx + 1}; (mn \neq 0)$  có đồ thị  $(C)$  như hình vẽ.



a)  $\frac{n}{m} = -\frac{1}{4}.$

b)  $m = -\frac{1}{2}.$

c)  $m + n = 3.$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2}x \right] = 0.$



**Lời giải**

|        |        |         |        |
|--------|--------|---------|--------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|--------|--------|---------|--------|

a) S

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^2 + 1}{mx^2 + x} = \frac{n}{m} = \frac{1}{2}.$$

b) S

$$\text{Đường tiệm cận đứng của đồ thị là } x = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$$

c) Đ

$$\text{Từ hai ý a và b ta có: } \begin{cases} m = 2n \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow m + n = 3; n = 2 \Rightarrow m + n = 3$$

d) S

$$\text{Đường tiệm cận xiên } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2}x \right] = -\frac{1}{4}.$$

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$      | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       |           | $+$       |
| $y$  | $1$       | $+\infty$ | $-\infty$ |

a) Hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là  $x = -1$ .

b) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có đường tiệm cận ngang là  $y = 1$ .

c) Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x)-2}$  có hai đường tiệm cận đứng.

d) Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  là 3.

**Lời giải**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|

a) Sai

Hàm số không có khái niệm tiệm cận. Chỉ có khái niệm đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

b) Đúng

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là  $y = 1$ .

c) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên ta có



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình  $f(x) - 2 = 0$  có đúng 1 nghiệm  $x = m < -1$ . Khi đó

$$y = \frac{1}{f(x) - 2} = \frac{1}{\frac{ax+b}{cx+d} - 2} = \frac{ax+d}{-a(x-m)} \text{ nên đồ thị của hàm số } y = \frac{1}{f(x) - 2} \text{ chỉ có 1 đường tiệm cận}$$

đúng là  $x = m$ .

**d) Sai**

Đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  trùng với đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ứng với phần đồ thị mà  $x \geq 0$ . Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với  $x \geq 0$  thì đồ thị hàm số chỉ có 1 đường tiệm cận ngang  $y = 1$  và không có tiệm cận đứng. Mà đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$  nhận trục tung làm trục đối xứng. Do đó nó chỉ có duy nhất một đường tiệm cận ngang  $y = 1$ .

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +         | +         |
| $y$  |           | $+\infty$ | $-3$      |
|      | $3$       | $-\infty$ |           |

a) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một đường tiệm cận đứng là  $x = -2$ .

b) Hàm số  $y = f(x)$  có hai đường tiệm cận ngang là  $y = 3$ ,  $y = -3$ .

c) Đồ thị hàm số  $y = \frac{f(x)}{(x^2 + x - 2)}$  có ba đường tiệm cận đứng.

d) Đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có hai đường tiệm cận ngang.

**Lời giải**

|         |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|

**a) Đúng**

Dựa vào bảng biến thiên dễ thấy đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một đường tiệm cận đứng là  $x = -2$ .

**b) Sai**

Vì hàm số không có tiệm cận.

**c) Sai**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

$$\frac{a}{c} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow a = 3c, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty \Rightarrow cx + d = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow -\frac{d}{c} = -2 \Leftrightarrow d = 2c$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{3cx+b}{c(x+2)} \left( -\frac{b}{3c} \neq -2 \Leftrightarrow b \neq 6c \right). \text{ Suy ra}$$



$y = \frac{f(x)}{(x^2 + x - 2)} = \frac{3cx + b}{c(x+2)^2(x-1)}$ . Điều này chứng tỏ đồ thị hàm số  $y = \frac{f(x)}{(x^2 + x - 2)}$  có không quá hai đường tiệm cận đứng.

**d) Sai**

Vì đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có hai đường tiệm cận ngang là  $y = \pm 3$ , nên đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  chỉ có duy nhất 1 đường tiệm cận ngang là  $y = 3$ .

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |           |      |      |           |
|------|-----------|-----------|------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$      | $0$  | $2$  | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $+$       | $-$  | $0$  | $+$       |
| $y$  | $3$       | $+\infty$ | $-3$ | $-4$ | $5$       |

**a)** Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nhận đường thẳng  $x = -2$  làm tiệm cận đứng.

**b)** Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là  $x = -2, x = 0$ .

**c)** Số đường tiệm cận ngang của của đồ thị hàm số là 2.

**d)** Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 4.

**Lời giải**

|                |               |                |               |
|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|---------------|----------------|---------------|

**a) Đúng**

Dựa vào bảng biến thiên, dễ thấy đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nhận đường thẳng  $x = -2$  làm tiệm cận đứng.

**b) Sai**

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -4$  nên  $x = 0$  không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

**c) Đúng**

Dựa vào bảng biến thiên dễ thấy đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có hai đường tiệm cận ngang  $y = 3, y = 5$ .

**d) Sai**

Dựa vào bảng biến thiên dễ thấy đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có 1 đường tiệm cận đứng  $x = -2$  và hai đường tiệm cận ngang  $y = 3, y = 5$ , nên nó có 3 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

**Ý d) Sai**

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ .

**a)**  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ .



- b) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một đường tiệm cận đứng.
- c) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một đường tiệm cận xiên là  $y = x - 1$ .
- d) Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là điểm  $I(-1; 0)$ .

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ | $2$ | $+\infty$ |     |

a) Đúng.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty.$$

b) Đúng.

Vì  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  nên đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một đường tiệm cận đứng  $x = -1$

c) Sai.

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x+1}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$  nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = x + 1$ .

d) Đúng.

Giao điểm của hai đường tiệm cận  $x = -1$ ;  $y = x + 1$  là điểm  $I(-1; 0)$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$ .

- a) Tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ .
- b) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một đường tiệm cận ngang.
- c) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có hai đường tiệm cận đứng.
- d) Khoảng cách từ gốc tọa độ đến giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng  $2\sqrt{3}$ .



**Lời giải**

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|

**a) Đúng.**

$$\text{Hàm số } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} \text{ xác định} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}.$$

**b) Đúng.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \text{ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là } y = 1.$$

**c) Sai.**

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \frac{1}{2} \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \frac{1}{2} \text{ nên } x = -1 \text{ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 3^-} y = -\infty \text{ nên } x = 3 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\text{Vậy đồ thị hàm số } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} \text{ có 1 đường tiệm cận đứng.}$$

**d) Sai.**

Giao điểm của hai đường tiệm cận  $x = 3; y = 1$  là điểm  $I(3; 1)$ .

$$\overline{OI}(3; 1) \Rightarrow OI = \sqrt{10}$$

**Câu 18:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$  có đồ thị  $(C)$ .

**a) Đồ thị  $(C)$  có đường tiệm cận đứng  $x = -3$ .**

**b) Đồ thị  $(C)$  có đường tiệm cận ngang  $y = 1$**

**c) Đồ thị  $(C)$  có đường tiệm cận xiên  $y = x - 3$ .**

**d) Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường tiệm cận xiên của đồ thị  $(C)$  bằng 3.**

**Lời giải**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 - 1}{x + 3} = x - 3 + \frac{8}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} y = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^2 - 1}{x + 3} - (x - 3) \right] = 0 \quad (2)$$



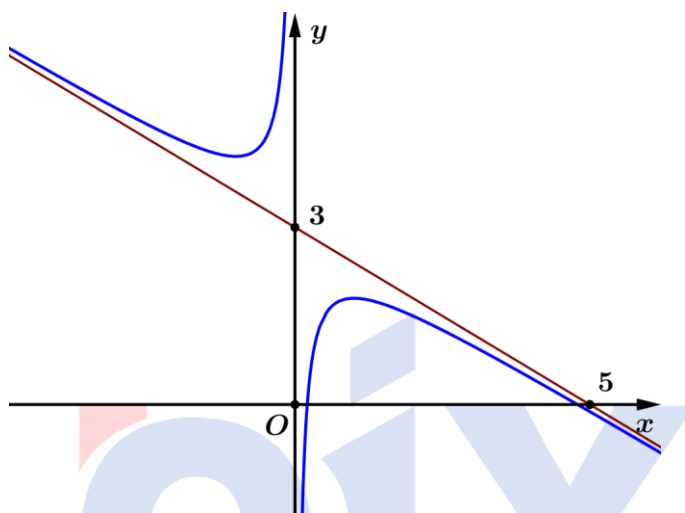
a) Đúng: Từ (1) ta có TCD:  $x = -3$ .

b) Sai: vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x - 3 + \frac{8}{x + 3} \right) = \pm\infty$  nên đồ thị không có TCN.

c) Đúng: Từ (2) ta có TCX:  $y = x - 3$ .

d) Sai: TCX:  $y = x - 3 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0 (\Delta)$ ,  $d(O, \Delta) = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \neq 3$ .

**Câu 19:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ sau



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = 0$ .

b) Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = -5x + 3$ .

d) Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x) - x + 1}$  có 1 đường tiệm cận đứng.

### Lời giải

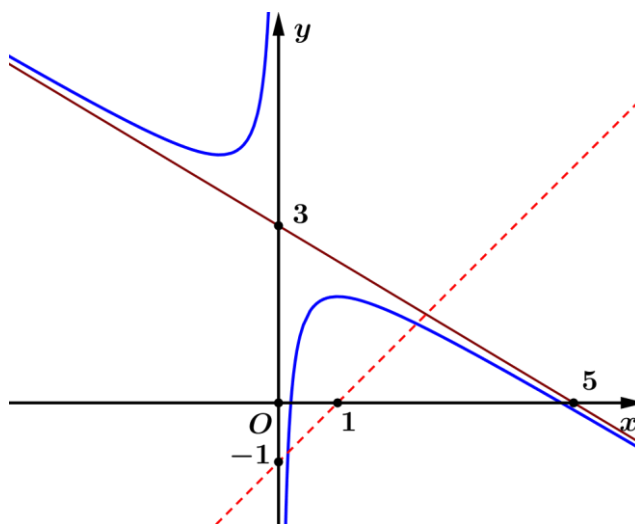
|         |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|

a) Đúng:

b) Sai: Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng, một đường tiệm cận xiên.

c) Sai: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = -\frac{3}{5}x + 3$ .

d) Sai: Ta có  $f(x) - x + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = x - 1$



Dựa vào đồ thị hàm số thì  $f(x) = x - 1$  có 2 nghiệm phân biệt

Do đó đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x) - x + 1}$  có 2 đường tiệm cận đứng.

**Câu 20:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2}$  có đồ thị  $(C)$ .

- a)  $(C)$  có đường tiệm cận đứng  $x = -2$
- b)  $(C)$  có đường tiệm cận xiên  $y = x + 2$ .
- c) Khoảng cách từ  $A(2;1)$  đến tiệm cận xiên của  $(C)$  bằng  $\sqrt{2}$
- d) Tích các khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc  $(C)$  đến hai tiệm cận của  $(C)$  bằng  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

a) Đúng:

b) Sai: Ta có  $y = x + 1 - \frac{3}{x + 2}$ .

Do đó đường tiệm cận xiên  $y = x + 1$ .

c) Đúng: Đường tiệm cận xiên  $y = x + 1$  hay  $x - y + 1 = 0 (\Delta_1)$

$$d(A, \Delta_1) = \frac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

d) Đúng: Đường tiệm cận đứng  $x = -2$  hay  $x + 2 = 0 (\Delta_2)$   $d(A, \Delta_2) = \frac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$ .

$$\text{Gọi } M \left( x_0; y_0 = x_0 + 1 - \frac{3}{x_0 + 2} \right) \in (C)$$

$$d_1 = d(M; \Delta_2) = |x_0 + 2|$$



$$d_2 = d(M; \Delta_1) = \frac{|x_0 - y_0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| x_0 - \left( x_0 + 1 - \frac{3}{x_0 + 2} \right) + 1 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}|x_0 + 2|}$$

$$d_1, d_2 = |x_0 + 2| \cdot \frac{3}{\sqrt{2}|x_0 + 2|} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

**Câu 21:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$  có đồ thị  $(C)$ .

- a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .
- b) Đồ thị  $(C)$  của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang.
- c) Đồ thị  $(C)$  của hàm số có hai tiệm cận đứng  $x = 1; x = 2$ .
- d) Tổng khoảng cách từ  $B(2; -1)$  đến các đường tiệm cận là số thực lớn hơn 8.

**Lời giải**

| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|
|--------|---------|--------|---------|

a) Sai: Tập xác định  $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ .

b) Đúng:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow$  đồ thị có một tiệm cận ngang  $d_5: y = 1$ .

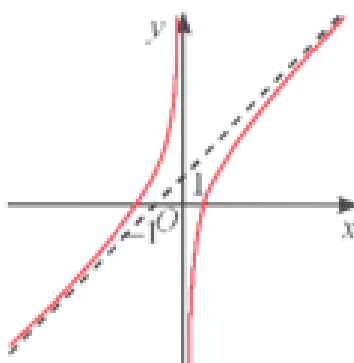
c) Sai:  $\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (1)^-} y = +\infty$ .

$\Rightarrow$  Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là  $d_1: x = \sqrt{2}; d_2: x = -\sqrt{2}; d_3: x = 1; d_4: x = -1$ .

d) Đúng:  $d(B, d_1) + d(B, d_2) + d(B, d_3) + d(B, d_4) + d(B, d_5) =$

$$= (2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) + (2 - 1) + (2 + 1) + (1 + 1) = 10$$

**Câu 22:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới



- a) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tiệm cận đứng là  $x = 1$ .
- b) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tiệm cận ngang là  $y = 0$ .
- c) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = x + 1$ .
- d) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên.



**Lời giải**

- a) Sai. Vì  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ , nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng  $x = 0$ .
- b) Sai. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- c) Đúng. Vì tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm  $(0;1)$  và  $(-1;0)$  nên tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng  $y = x + 1$ .
- d) Đúng. Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tiệm cận đứng là  $x = 0$  và tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = x + 1$ .

**Câu 23:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 1}$ .

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5$ .
- c) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là  $y = 2x + 3$ .
- d) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là  $x = -1$ .

**Lời giải**

a) **Đúng.** Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^2 + x} = 2$ .

b) **Sai.** Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{x + 1} = 3$

c) **Đúng.** Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^2 + x} = 2$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{x + 1} = 3$

d) **Đúng.**

**Câu 24:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$  có đồ thị là  $(C)$ .

a)  $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x + 3}$ ,  $\forall x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ .

b) Đồ thị  $(C)$  không có tiệm cận ngang.

c) Đồ thị  $(C)$  có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = 3$ .

d) Đồ thị  $(C)$  có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = ax + b$ . Khi đó  $a^2 + b^2 = 2$ .

**Lời giải**



a) Đúng, vì  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = \frac{x^2 + 3x - x - 3 + 4}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 1) + 4}{x + 3} = x - 1 + \frac{4}{x + 3}$ .

b) Đúng, vì  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ .

c) Sai, vì  $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = -\infty$  suy ra đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = -3$ .

d) Đúng, vì  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 3} = 0$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 3} = 0$  suy

ra đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = x - 1$ . Khi đó  $a^2 + b^2 = 2$ .

**Câu 25:** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$  có đồ thị (C).

a)  $y' = \frac{-x^2 - 2x}{(x + 1)^2}$ .

b) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-2; -1); (-1; 0)$ .

c) Tích hai điểm cực trị của hàm số bằng 0.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm  $A(1; 2)$ .

**Lời giải**

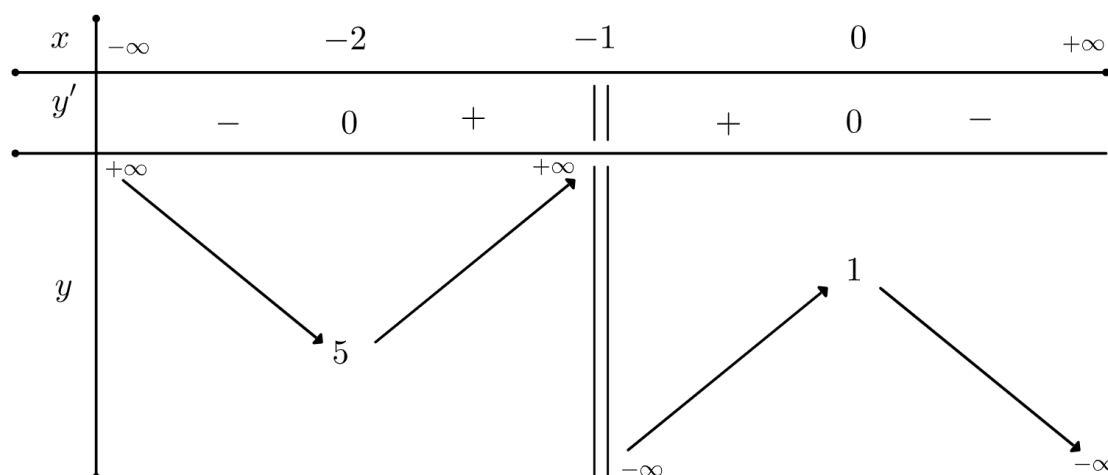
a) Đúng

$$y' = \frac{-x^2 - 2x}{(x + 1)^2}$$

b) Sai

Ta có  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Khi đó ta có bảng biến thiên:



Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; -1); (-1; 0)$ .



c) Đúng

Ta có  $x_{CB} \cdot x_{CT} = 0 \cdot (-2) = 0$

d) Sai

Ta có  $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$

Vì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} - (-x + 2) \right) = 0$ , nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = -x + 2$

Thay  $A(1; 2)$  vào phương trình đường tiệm cận xiên ta được:  $-1 + 2 = 2$ : sai nên tiệm cận xiên không đi qua điểm  $A$ .

**Câu 26:** Cho hàm số  $y = f(x) = \log_9 \frac{x-7}{x-5}$  có đồ thị là  $(C)$ .

a) Tập xác định của hàm số là  $D = (-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$ .

b)  $(C)$  có hai đường tiệm cận đứng.

c)  $(C)$  có một đường tiệm cận ngang.

d) Gọi  $M(x_M; y_M)$ ,  $N(x_N; y_N)$  là hai điểm thuộc  $(C)$  sao cho  $x_M, x_N$  thỏa mãn  $0 < x_M - x_N < 2$ . Khi đó  $y_M$  luôn lớn hơn  $y_N$ .

**Lời giải**

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \frac{x-7}{x-5} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$ .

TXĐ:  $D = (-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \infty$ .

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng  $x = 5$  và  $x = 7$ .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \log_9 0 = 1$ . Vậy hàm số có một đường tiệm cận ngang  $y = 1$ .

Ta có  $y_M - y_N = \log_9 \frac{x_M - 7}{x_M - 5} - \log_9 \frac{x_N - 7}{x_N - 5} = \log_9 \left( \frac{x_M - 7}{x_M - 5} \cdot \frac{x_N - 5}{x_N - 7} \right)$

Giả sử  $y_M - y_N > 0 \Rightarrow \frac{x_M - 7}{x_M - 5} \cdot \frac{x_N - 5}{x_N - 7} > 1 \Rightarrow (x_M - 7)(x_N - 5) - (x_N - 7)(x_M - 5) > 0$

Ta được  $2x_M - 2x_N > 0 \Rightarrow x_M - x_N > 0$

Ta có  $y' > 0$  trên khoảng  $(-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$  nên hàm số đồng biến

Khi  $x_M, x_N$  cùng thuộc  $(-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$  thì  $y_M > y_N$  luôn đúng

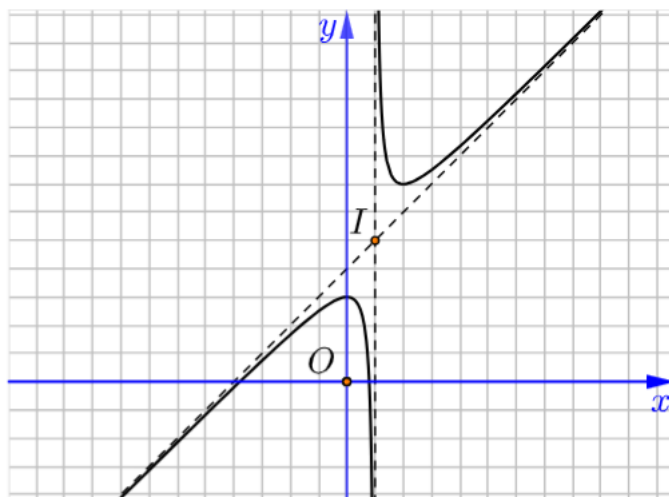
Khi  $x_M \in (7; +\infty), x_N \in (-\infty; 5)$  thì  $x_M - x_N > 2$  không thỏa mãn điều kiện



Chọn đáp án

|          |    |    |    |
|----------|----|----|----|
| a)       | b) | c) | d) |
| <b>Đ</b> | Đ  | Đ  | Đ  |

**Câu 27:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1}$  có đồ thị như hình vẽ sau.



- a) Phương trình tiệm cận đứng là  $x = 1$ .
- b) Phương trình tiệm cận xiên là  $y = x + 4$ .
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng  $-\infty; 0$ .
- d) Có tất cả 2 điểm có tọa độ là số nguyên, thuộc đồ thị hàm số đã cho.

**Lời giải**

|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|----------------|----------------|----------------|

**a) Đúng**

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = +\infty$ .

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 3x - 3 = 1^2 + 3 \cdot 1 - 3 = 1 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0 \\ x - 1 > 0 \text{ Do } x \rightarrow 1^+ \end{cases}.$$

Vậy phương trình tiệm cận đứng là  $x = 1$ .

**b) Đúng**

Ta có:  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} = x + 4 + \frac{1}{x - 1}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$



Suy ra  $y = x + 4$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

**c) Đúng**

Dựa vào đồ thị hàm số thì hàm số đồng biến trên khoảng  $-\infty; 0$ .

**d) Đúng**

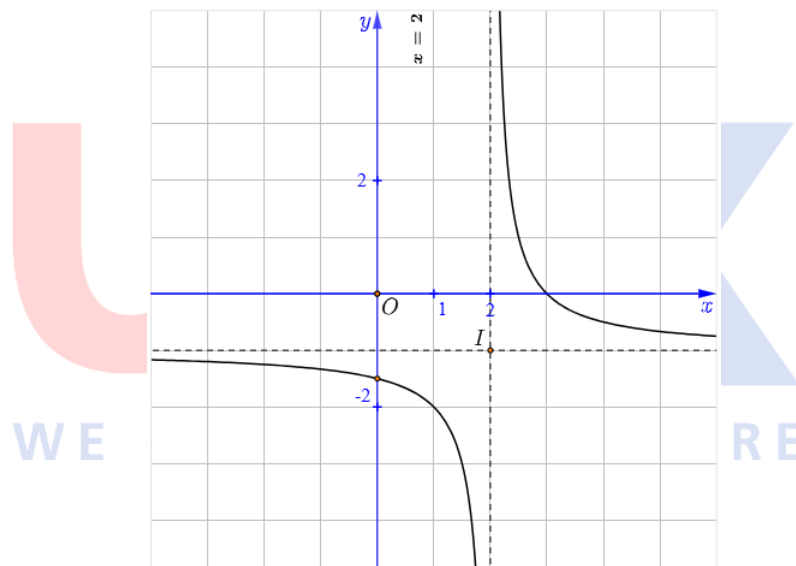
Ta có:  $y = f(x) = x + 4 + \frac{1}{x-1}$

Để đồ thị hàm số có điểm có tọa độ là số nguyên khi và chỉ khi  $\frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=7 \\ x=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 2 điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số đã cho.

**Câu 28:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax+3}{x+c}$  ( $a, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ sau:



a) Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) > 0, \forall x \neq 2$ .

b) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $f(x)$  là đường thẳng có phương trình  $y = -1$ .

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số  $f(x)$  nằm trên đường thẳng  $\Delta: y = -3x + 5$ .

d)  $a + c = 1$ .

**Lời giải**

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang:  $y = -1 \Rightarrow a = -1$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng:  $x = 2 \Rightarrow c = -2$

$$y = f(x) = \frac{-x+3}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \quad \forall x \neq 2$$

a) Sai



- b) Đúng
- c) Đúng, tâm đối xứng của đồ thị  $I(2; -1) \in \Delta: y = -3x + 5$ .
- d) Sai,  $a + c = -3$ .

**Câu 29:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$ .

- a) Đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $y = x + 1$  làm tiệm cận xiên.
- b) Hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Gọi  $A, B, C$  là giao điểm của đồ thị hàm số với các trục  $Ox, Oy$ . Diện tích tam giác  $ABC$  bằng 6.
- d) Có đúng 2 giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} - m^2x$  đồng biến trên từng khoảng xác định.

### Lời giải

**(a) Sai | (b) Sai | (c) Đúng | (d) Sai**

a)

Ta có  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} = x - 1 - \frac{4}{x - 1}$  nên  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ . Vậy  $y = x - 1$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

**Chọn SAI.**

b)

Xét hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$  có tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có  $y' = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)^2 + 4}{(x - 1)^2} > 0$  với mọi  $x \in D$ . Vậy hàm số không có điểm cực trị.

**Chọn SAI.**

c)

Thay  $x = 0$  vào hàm số ta được  $y = 3$ . Suy ra giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là  $C(0; 3)$

Ta có  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$ . Suy ra giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là  $A(3; 0), B(-1; 0)$

Có:  $AB = 4; AC = 3\sqrt{2}; BC = \sqrt{10}$ .

Áp dụng công thức He-rong  $S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$  trong đó  $p = \frac{AB + BC + AC}{2}$

Suy ra  $S = 6$



**Chọn ĐÚNG.**

d)

Xét hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} - m^2x$  có tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Có  $y' = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2} - m^2$ . Để hàm số luôn đồng biến trên  $D$  thì  $y' \geq 0, \forall x \in D$

Suy ra  $m^2 \leq \min \left[ \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2} \right], \forall x \in D$ .

Đặt  $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2}$  ta có  $g'(x) = \frac{-8}{(x - 1)^3}$ . Ta có bảng biến thiên:

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$       | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $+$       |           | $-$       |
| $g(x)$  | $1$       | $+\infty$ | $1$       |

Từ bảng biến thiên, suy ra  $m^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1$  nên  $m \in \{-1; 0; 1\}$ . Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Chọn SAI.**

**Câu 30:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 4}$ .

a)  $f(24) = \frac{9}{116}$ .

b) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nhận trục tung làm tiệm cận ngang.

c) Hàm số  $f(x)$  có điểm cực đại là  $x = 4$ .

d) Tập giá trị của hàm số đã cho là đoạn  $[a; b]$  thì  $3a + 4b = -2$ .

**Lời giải**

a) Đúng.

b) Đúng vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ .

c) Đúng.

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 8}{(x^2 + 4)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -1 \\ x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$



Bảng biến thiên:

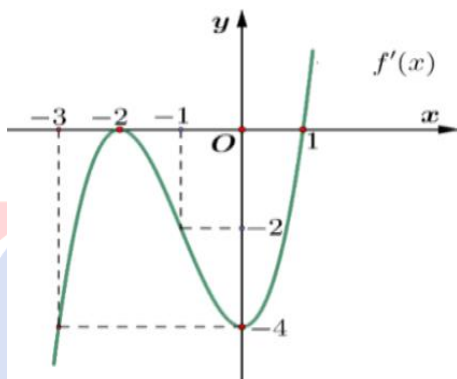
|      |           |      |      |     |               |     |
|------|-----------|------|------|-----|---------------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ |      | $4$ | $+\infty$     |     |
| $y'$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$           | $-$ |
| $y$  | $0$       |      | $-1$ |     | $\frac{1}{4}$ |     |

Từ bảng biến thiên suy ra  $x = 4$  là điểm cực đại của hàm số  $f(x)$ .

d) Đúng.

Từ kết quả câu b) và c) ta suy ra tập giá trị của hàm số là  $\left[-1; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow 3a + 4b = -3 + 1 = -2$ .

**Câu 31:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x)$  là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .

b) Hàm số  $y = f(x)$  có hai cực trị.

c)  $\max_{[-2;1]} f(x) = f(-2)$ .

d) Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{x+2}{f'(x)}$  có tất cả 2 đường tiệm cận.

### Lời giải

► Từ đồ thị hàm số  $f'(x)$  ta suy ra  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ ;  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ . Do đó a) Sai.

► Ta cũng suy ra hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $[-2; 1]$  nên  $\max_{[-2;1]} f(x) = f(-2)$ .

Do đó c) Đúng.

► Cũng từ đồ thị ta thấy  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$ .  $f'(x)$  chỉ đổi dấu từ  $-$  qua  $+$  khi qua  $x = 1$ . Suy ra hàm số  $f(x)$  chỉ có một điểm cực trị. Do đó b) Sai.

►  $f'(x)$  là hàm số bậc ba nên từ đồ thị ta suy ra  $f'(x) = a(x+2)^2(x-1)$ .



$$f'(0) = -4 \Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f'(x) = (x+2)^2(x-1).$$

$$g(x) = \frac{x+2}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{1}{(x+2)(x-1)}, \forall x \neq 2.$$

Suy ra đồ thị hàm số  $g(x)$  có hai tiệm cận đứng là  $x = -2; x = 1$  và một tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 0$ . Do đó d) Sai.

Tóm lại: a)S b)S c)Đ d) S.

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$  có đồ thị (C).

- a) (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = 3$ .
- b) Trên đoạn  $[0; 2]$ , hàm số  $y = f(x)$  có giá trị lớn nhất bằng 1.
- c) (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = x$ .
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(2; 4)$ .

**Lời giải**

**Đáp số: ĐĐDS**

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$ .

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

**a) Đúng.**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 3$  là tiệm cận đứng của (C).

**b) Đúng.**

Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$  trên đoạn  $[0; 2]$

Ta có  $y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 3)^2} > 0, \forall x \in (0; 2)$

$\Rightarrow$  hàm số luôn đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

Khi đó  $\max_{[0; 2]} y = f(2) = 1$ .

**c) Đúng.**

Ta có  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = x + \frac{1}{x - 3}$ .

Vì  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 3} = 0 \Rightarrow y = x$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

**d) Sai.**



Xét hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$  trên đoạn  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Ta có  $y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}, \forall x \neq 3$ .

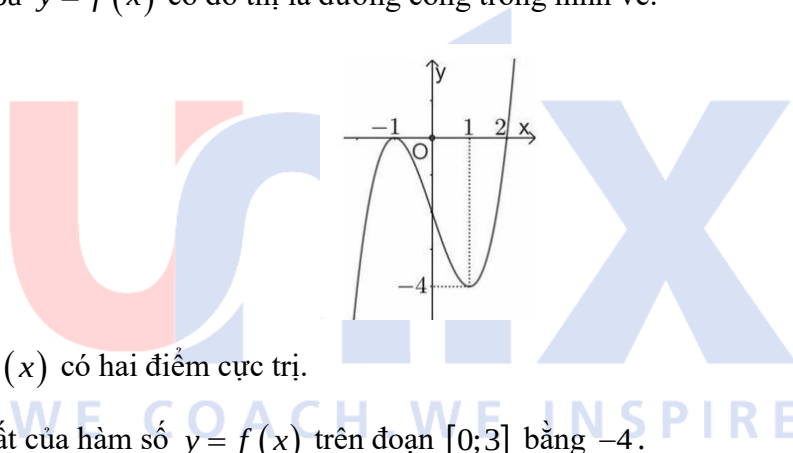
$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

| $x$     | $-\infty$ | 2   | 3           | 4                         | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-------------|---------------------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +   | 0           | -                         |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | ↗ 1 | ↘ $-\infty$ | $+\infty$ ↘ 5 ↗ $+\infty$ |           |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(2; 3)$  và  $(3; 4)$ .

**Câu 33:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



a) Hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0; 3]$  bằng  $-4$ .

c) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

d) Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x)}$  có đúng 2 tiệm cận đứng.

**Lời giải**

**Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng**

a)

**Chọn ĐÚNG.**

b)

**Chọn ĐÚNG.**

c)

**Chọn SAI.**



d)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$

Do đó đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(x)}$  có đúng 2 tiệm cận đứng

**Chọn ĐÚNG.**

**Câu 34:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 3}$

a) Hàm số có đạo hàm  $f'(x) = \frac{2x^2 + 12x - 14}{(x + 3)^2}.$

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng  $\Delta: y = 2x - 3.$

c) Đồ thị hàm số nhận điểm  $I(3; 3)$  làm tâm đối xứng.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 3}$  cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại  $A, B$ . Khi đó diện tích của tam giác  $OAB$  lớn hơn 2.

**Lời giải:**

a) **Sai.**

Hàm số có đạo hàm  $f'(x) = \frac{2x^2 + 12x + 14}{(x + 3)^2}.$

b) **Đúng.**

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 3} = 2x - 3 + \frac{4}{x + 3},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2x - 3 + \frac{4}{x + 3} - (2x - 3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{3}{x}} \right) = \frac{0}{1 + 0} = 0. \text{ Từ đó}$$

suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng  $\Delta: y = 2x - 3$

c) **Sai.**

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng  $\Delta: y = 2x - 3$  và tiệm cận đứng  $x = -3$  nên nhận điểm  $I(3; 3)$  làm tâm đối xứng.

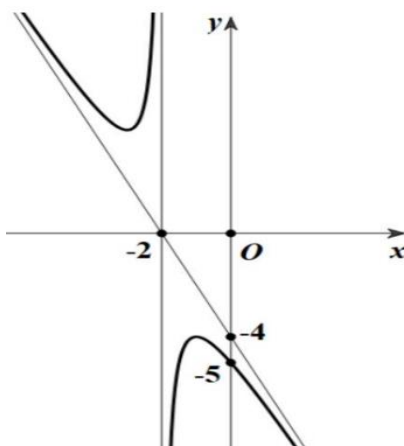
d) **Đúng.**

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng  $\Delta: y = 2x - 3$ . Suy ra  $\Delta: y = 2x - 3$  cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại  $A(0; -3)$  và  $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ . Khi đó  $\Delta$  tạo với hai trục tọa độ tam giác  $OAB$ . Diện

tích của tam  $OAB$  là  $S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} > 2.$



**Câu 35:** Cho hàm số  $y = ax + b + \frac{c}{x+d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ sau



- a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = -2$ .  
 b) Giá trị  $b = -4$ .  
 c) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = 2x - 4$ .  
 d) Hàm số đã cho là  $y = -2x - 4 - \frac{2}{x+2}$ .

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|

**a) Đúng**

Dựa vào đồ thị hàm số ta có đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = -2$ .

**b) Đúng**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{c}{x+d} \right) = 0.$$

Suy ra  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Dựa vào đồ thị tiệm cận xiên đi qua 2 điểm có tọa độ là  $(-2; 0)$  và  $(0; -4)$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

**c) Sai**

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là  $y = -2x - 4$ .

**d) Đúng**

Ta có  $x = -1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Suy ra  $-d = -2 \Rightarrow d = 2$ .

$$\text{Hàm số trở thành } y = -2x - 4 + \frac{c}{x+2}.$$



Đồ thị đi qua điểm có tọa độ  $(0; -5) \Rightarrow -5 = -4 + \frac{c}{2} \Rightarrow c = -2$ . Vậy  $y = -2x - 4 - \frac{2}{x+2}$ .

**Câu 36:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$  có đồ thị (C).

- Hàm số có 2 điểm cực trị.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .
- Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình  $x = 1$ .
- $M$  là điểm bất kì thuộc đồ thị (C). Tích khoảng cách từ  $M$  đến tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C) bằng  $\sqrt{2}$ .

### Lời giải

a) Ta có  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}, y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

BBT

|      |           |                 |           |                 |           |
|------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1 - \sqrt{2}$  | $1$       | $1 + \sqrt{2}$  | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0               | -         | 0               | +         |
| $y$  | $-\infty$ | $4 - 2\sqrt{2}$ | $+\infty$ | $4 + 2\sqrt{2}$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị. Suy ra kết luận a) Đúng.

b) Dựa vào BBT ta có

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(1 - \sqrt{2}; 1)$  và  $(1; 1 + \sqrt{2})$

Suy ra kết luận b) Sai.

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = -\infty \Rightarrow$  đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là  $x = 1$ .

Suy ra kết luận c) đúng.

d) Ta có  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = x + 3 + \frac{2}{x - 1}$

Điểm  $M$  thuộc đồ thị (C) nên có tọa độ là  $M \left( x_0; x_0 + 3 + \frac{2}{x_0 - 1} \right)$ .



Đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là  $\Delta_1 : x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

Khi đó  $d(M, \Delta_1) = |x_0 - 1|$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ x + 3 + \frac{2}{x-1} - (x + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0.$$

Nên đường thẳng  $\Delta_2 : y = x + 3$  là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

$$\text{Khi đó: } d(M, \Delta_2) = \frac{|x_0 - y_0 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| x_0 - \left( x_0 + 3 + \frac{2}{x_0 - 1} \right) + 3 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{|x_0 - 1|}.$$

Suy ra tích khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận là  $|x_0 - 1| \cdot \frac{\sqrt{2}}{|x_0 - 1|} = \sqrt{2}$ .

Suy ra kết luận d) là đúng.

**Câu 37:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  có đồ thị (C).

a) Có  $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ .

c) Tổng số đường tiệm cận và trục đối xứng của đồ thị hàm số bằng 3.

d) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị (C) với trục tung và trục hoành, diện tích tam giác  $\Delta AOB$  bằng  $\frac{1}{4}$ .

WE COACH. WE INSPIRE

Lời giải

a – sai; b- sai; c – sai; d - đúng

a) Có  $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$  với mọi  $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ . Vậy a – sai.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ . Vậy b - sai.

c) Đồ thị hàm số không có trục đối xứng

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

Vậy Tổng số đường tiệm cận và trục đối xứng của đồ thị hàm số bằng 2. Vậy c - sai.

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung và trục hoành lần lượt tại  $A\left(0; -\frac{1}{2}\right); B(-1; 0)$

Vậy  $S_{ABO} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{4}$ . Vậy d – đúng.



**Câu 38:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

- Tập xác định của hàm số  $f(x)$  là khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .
- Đường thẳng  $x = -1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .
- Đường thẳng  $y = 2x + 1$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .
- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  bằng  $2\sqrt{10}$ .

**Lời giải**

a) Sai.

Điều kiện:  $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ . Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

b) Sai.

Hàm số không xác định tại  $x = 1$

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ . Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = 1$ .

c) Đúng.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = 2x + 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0.$$

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là  $y = 2x + 1$ .

d) Sai.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(4x - 1)(x - 1) - (2x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x - 1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

| $x$  | $-\infty$ | 0  | 1 | 2 | $+\infty$ |   |   |   |  |
|------|-----------|----|---|---|-----------|---|---|---|--|
| $y'$ |           | +  | 0 | - |           | - | 0 | + |  |
| $y$  |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           |    |   |   |           |   |   |   |  |
|      |           | </ |   |   |           |   |   |   |  |

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là  $A(0; -1)$ , điểm cực tiểu là  $(2; 7)$ .

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $AB = \sqrt{2^2 + (7 + 1)^2} = 2\sqrt{17}$ .