



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$. Giả sử đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Tính giá trị $a + b$

Lời giải

Trả lời: 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3-0}{1+0} = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty \Rightarrow x = -1 \text{ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\text{Vậy } a + b = 3 + (-1) = 2$$

Câu 2: Cho hàm số có bảng biến thiên bên dưới. Khi đó, đồ thị hàm số có số đường tiệm cận là bao nhiêu?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'		+	+
y		$+\infty$	1
	1	$-\infty$	

Lời giải

Trả lời: 2

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -2$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận bao gồm một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.



Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$ có đồ thị (C) . Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta: y = ax + b$. Tính $a + b$.

Lời giải

Trả lời: -1

Ta có $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3} = x - 2 + \frac{1}{x - 3}$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3} - (x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - 3} \right) = 0$.

Suy ra đường thẳng $\Delta: y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích S . Tính S .

Lời giải

Trả lời: 6

Ta thấy $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $-2^2 + 4 \cdot 2 + 3 \neq 0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $d_1: x = 2$.

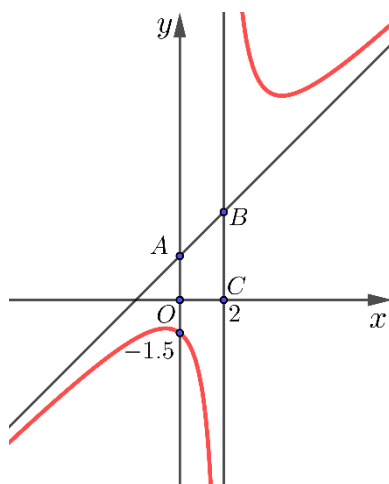
Ta có $y = x + 2 + \frac{7}{x - 2}$ nên $d_2: y = x + 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) .

Đường thẳng $d_2: y = x + 2$ cắt trục Oy tại $A(0; 2)$.

Đường thẳng $d_1: x = 2$ cắt $d_2: y = x + 2$ tại $B(2; 4)$.

Đường thẳng $d_1: x = 2$ cắt trục Ox tại $C(2; 0)$.

Do đó hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông $OABC$.



$$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{(OA + BC) \cdot OC}{2} = 6.$$

Câu 5: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x}$ là ?

Lời giải

Trả lời: 2

Tập xác định $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 3 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{x} \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 3 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{x^2 - x} = +\infty$$

Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 6: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax + 1}{bx - 2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$. Tính giá trị biểu thức $a - 2b$

Lời giải



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là: $x = \frac{2}{b}$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là: $y = \frac{a}{b}$.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} \frac{2}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - 2b = 3 - 2.1 = 1$

Câu 7: Gọi $I(a;b)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$.
Tính $T = a + b$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

• $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \end{cases}$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Vậy giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là điểm $I(-2;1)$ nên $T = -2 + 1 = -1$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x^3 - 9x}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$ có đồ thị là (C) . Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ và có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang

• $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng

• $\lim_{x \rightarrow 3} y = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+3)}{(x+1)^2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ nên đường thẳng $x = 3$ không là tiệm cận đứng.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là 2.

Câu 9: Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+3}$ và các trục tọa độ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $x = -3$;



Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2$.

Hai đường tiệm cận tạo với các trục tọa độ một hình chữ nhật có chiều dài bằng 3, chiều rộng bằng 2.

Diện tích hình chữ nhật: $S = 2.3 = 6$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Tính giá trị biểu thức $a^2 + b^2$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, suy ra đường tiệm cận đứng là: $x = 2$ và đường tiệm cận ngang là: $y = 1$.

Từ hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là: $x = -b$ và đường tiệm cận ngang là: $y = a$.

Do đó ta có: $\begin{cases} -b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tính các khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc (C) đến hai đường tiệm cận bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $\Delta_1: x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

Đường tiệm cận ngang là $\Delta_2: y = 2 \Leftrightarrow y - 2 = 0$.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0+1}\right) \in (C), x_0 \neq -1$.

Ta có: $d(M; \Delta_1) = |x_0 + 1|$ và $d(M; \Delta_2) = \left| \frac{2x_0-1}{x_0+1} - 2 \right| = \frac{3}{|x_0+1|}$.

Suy ra $d(M; \Delta_1) \cdot d(M; \Delta_2) = |x_0 + 1| \cdot \frac{3}{|x_0 + 1|} = 3$.



Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a+2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $y=2$ và đường tiệm cận đứng $x=1$. Khi đó:

Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận ngang là: $|b-2| = \left| \frac{2a-1}{a-1} - 2 \right| = \frac{1}{|a-1|}$ (do $M \in (C)$)

Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận đứng là: $|a-1|$.

Ta có $|a-1| + \frac{1}{|a-1|} \geq 2\sqrt{|a-1| \cdot \frac{1}{|a-1|}} = 2$.

Vậy tổng khoảng cách nhỏ nhất là 2 khi $|a-1| = \frac{1}{|a-1|}$.

$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \text{ (loại)} \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3 \Rightarrow a + 2b = 8$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{2x-3}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng 10 lần khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng.

Lời giải

Ta có các đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ và $y=1$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số mà $M \in (C) \Rightarrow M\left(x; \frac{2x+2}{2x-3}\right)$ với $x \neq \frac{3}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{|2x-3|}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng $\left|\frac{2x+2}{2x-3} - 1\right| = \frac{5}{|2x-3|}$.

Khi đó: $\frac{5}{|2x-3|} = 10 \cdot \frac{|2x-3|}{2} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;6) \\ M(1;-4) \end{cases}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là?

Lời giải

Trả lời: 4

Đặt $h(x) = \frac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

*) Tiệm cận đứng:

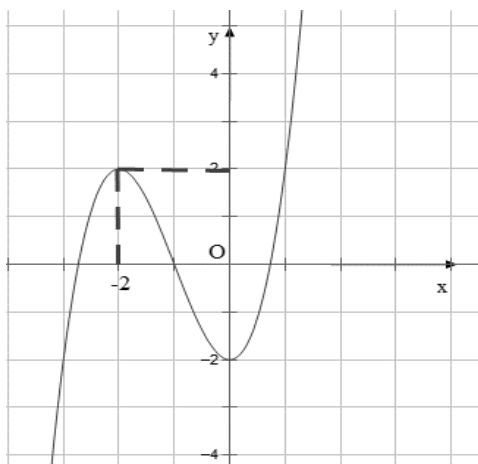
Xét phương trình: $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là 4.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ là



Lời giải

ĐS: 3

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = \mathbb{R}$

Do đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$.

Qua đồ thị ta có: Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	2		$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Lời giải

ĐS: 4

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy: phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$.

Khi đó: $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ khi } x \rightarrow x_1^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ và $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ khi } x \rightarrow x_2^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham

số m để hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

Lời giải



ĐS: 2

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

TH 1: Nếu $m = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2} = 1$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận.

TH 2: Nếu $m \neq -1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$$\Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy khi $m \in \{-2; -1\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là:

Lời giải

ĐS: 4

Đặt $h(x) = \frac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0.$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}.$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là 4.



Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

ĐS: 2

Đặt $y = g(x) = \frac{1}{2f(x)+3}$ có tử số là $1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Từ bảng biến thiên có phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-\infty; 0), x_2 \in (0; 1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải



ĐS: 4

Ta có: $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}(1)$. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 1$ và

giới hạn của hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 5}$ tại các điểm x_1, x_2, x_3, x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{2f(x) - 5} = 0$ nên $x = 1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$ là

Lời giải

ĐS: 3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình

$$2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2f(x) - 1} = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 1}$ là 3.



Câu 22: Có bao nhiêu giá trị của m để hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{x-m}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2022.

Lời giải

ĐS: 2

Để đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{m-x}$ có hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -2$ và tiệm cận đứng là $x = m$.

$\Rightarrow$ Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có kích thước là 2 và $|m|$.

$\Rightarrow$ Để hình chữ nhật tạo thành có diện tích bằng 2022 $\Leftrightarrow 2 \cdot |m| = 2022 \Leftrightarrow |m| = 1011 \Leftrightarrow m = \pm 1011$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a+2b$ bằng

Lời giải

ĐS: 8

Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và đường tiệm cận đứng $x = 1$. Khi đó:

+) Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận ngang là: $|b-2| = \left| \frac{2a-1}{a-1} - 2 \right| = \frac{1}{|a-1|}$;

+) Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận đứng là: $|a-1|$.

Ta có $|a-1| + \frac{1}{|a-1|} \geq 2\sqrt{|a-1| \cdot \frac{1}{|a-1|}} = 2$. Vậy tổng khoảng cách nhỏ nhất là 2 khi

$|a-1| = \frac{1}{|a-1|} \Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$. Suy ra $b = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3 \Rightarrow a + 2b = 8$.

Câu 24: Tìm a để đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + x + a}{x+a}$ có tiệm đứng đồng thời tiệm cận xiên đi qua điểm $A(2;0)$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{-x^2 + x + a}{x+a} = -x + a + 1 + \frac{-a^2}{x+a}$

Nếu $a = 0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $a \neq 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -a$ và tiệm cận xiên $y = -x + a + 1$

Để đường tiệm cận xiên đi qua $A(2;0)$ thì $0 = -2 + a + 1 \Leftrightarrow a = 1$ (thỏa mãn)

Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.



Câu 25: Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$, coi $x \in [0; +\infty)$.

Lời giải

Chi phí để sản xuất trung bình một sản phẩm là $f(x) = \frac{2x^2 + x + 25}{x} = 2x + 1 + \frac{25}{x}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25}{x} = 0$.

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 26: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $200(m^2)$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$. Gọi $f(x)$ là chu vi của mảnh vườn. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Lời giải

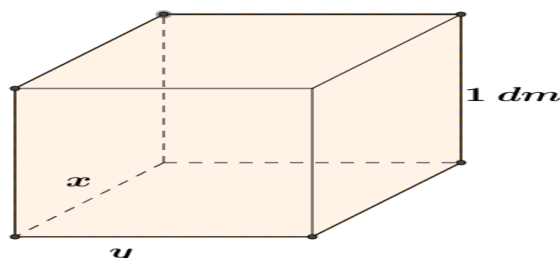
Độ dài một cạnh còn lại của hình chữ nhật là $\frac{200}{x}(m)$.

Chu vi của hình chữ nhật là $f(x) = 2\left(x + \frac{200}{x}\right) = 2x + \frac{400}{x}(m)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{400}{x} = 0$.

Vậy đường thẳng $y = 2x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 27: Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $5m^3$. Chiều cao của bể là $10dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



Lời giải

Do thể tích của bể là $1m^3$ nên $1 \cdot xy = 5 \Leftrightarrow xy = 5$

Diện tích toàn phần của bể là $S(x) = xy + 2 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot y = 5 + 2x + \frac{10}{x}$, ($x > 0$)



Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (S(x) - (5 + 2x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x} = 0$

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y = 2x + 5 \Rightarrow a = 2; b = 5$

$$P = a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 29$$

Câu 28: Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Lời giải

Gọi x là độ dài đáy nhỏ của hình thang ($x > 0$). Ta có :

Đáy lớn là $2x$.

Chiều cao của hình thang là $h = \frac{2S}{x + 2x} = \frac{16}{x}$.

Độ dài cạnh còn lại của hình thang là $\sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$.

Khi đó $P(x) = x + \frac{16}{x} + 2x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = 3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x}$ (tập xác định $D = (0; +\infty)$).

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[3 + \sqrt{1 + \frac{256}{x^4}} + \frac{16}{x^2} \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$+ \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left[3x^2 + \sqrt{x^4 + 256} + 16 \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy

$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} - x + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{256}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + x} + \frac{16}{x^2} \right] = 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = 4x$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 29: Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ có đồ thị có tiệm cận xiên có dạng $y = ax + b$. Tính giá trị biểu thức $T = 26a + b$

Lời giải



Trả lời : 2026

Theo giả thiết, ta có:

$$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8.$$

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = x + \frac{10^8}{x} + 2000.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (M(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{10^8}{x} + 2000 - (x + 2000) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{10^8}{x} \right] = 0$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = x + 2000$. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường $y = x + 2000$.

Câu 30: Để thiết kế một bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 80 cm, thể tích là 12800 cm³. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m² và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m². Gọi x là chiều dài của đáy bể cá với ($x > 0, x(m)$); $f(x)$ là hàm số xác định chi phí để hoàn thành bể cá. Khi đó, đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng $y = ax + b$. Tính

giá trị biểu thức $T = \frac{a}{1000} + \frac{b}{100}$

Lời giải

Trả lời: 128

Gọi y là chiều rộng của đáy bể cá ($y > 0, y(m)$).

Ta có: $0,8xy = 0,0128 \Rightarrow y = \frac{0,016}{x}(m)$.

Giá thành bể cá được xác định theo hàm số:

$$f(x) = 2,0,8 \left(x + \frac{0,016}{x} \right) \cdot 70000 + 100000 \cdot x \cdot \frac{0,016}{x} \text{ (VNĐ)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 112000 \left(x + \frac{0,016}{x} \right) + 1600 \text{ (VNĐ)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 112000x + 1600 + \frac{1792}{x} \text{ (VNĐ)}.$$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(112000x + 1600 + \frac{1792}{x} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (112000x + 1600)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1792}{x} = 0$$

Nên đồ thị hàm $f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 0$; tiệm cận xiên là $y = 112000x + 1600$.

