



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

- . Tìm tập xác định của hàm số;
- . Tính đạo hàm $y' = f'(x)$;
- . Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$;
- . Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và tìm tiệm cận đứng, ngang (nếu có);
- . Lập bảng biến thiên;
- . Kết luận tính biến thiên và cực trị (nếu có);
- . Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (giao với trục Ox , Oy , các điểm đối xứng, ...);

Bước 8. Vẽ đồ thị.

WE COACH. WE INSPIRE



II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC BA

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 - 6x. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

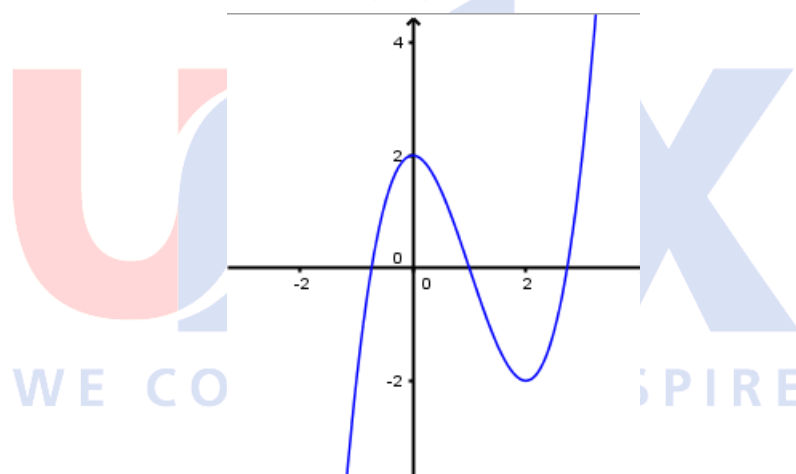
+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{cd} = y(0) = 2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y_{ct} = y(2) = -2$

+ Đồ thị

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số qua điểm $A(1; 0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$: Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(0; 2)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn)

Câu 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị

+ Các giới hạn tại vô cực



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

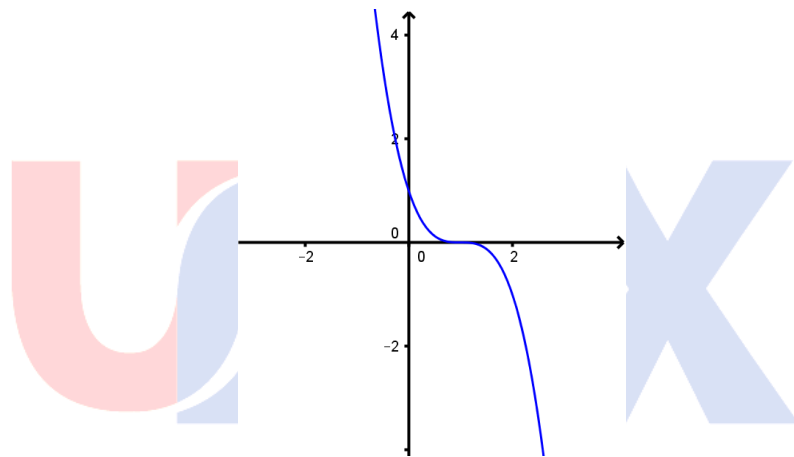
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	0	-	
y	$+\infty$			0	$-\infty$

Đồ thị

Ta có $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số qua $A(1;0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(0;1)$.

Cho $x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số qua $C(2;-1)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn).

Câu 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

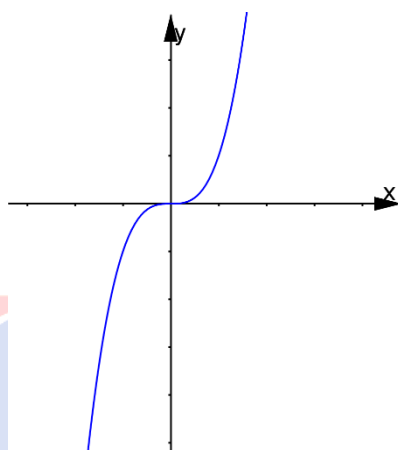


x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

Đồ thị

Ta có $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy đồ thị hàm số qua $O(0;0)$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$: Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(1;1)$. Cho $x = -1 \Rightarrow y = -1$: Đồ thị hàm số cắt qua $C(-1;-1)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $O(0;0)$ làm tâm đối xứng. hoành độ điểm O là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn)

II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$



MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 4: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\frac{x+1}{x-1}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Ta thấy y' không xác định khi $x = 1$; y' luôn âm với mọi $x \neq 1$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(1; +\infty)$ và $(-\infty; 1)$.

+ Cực trị:

Hàm số không có cực trị

+ Tiệm cận

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Vậy đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$. Vậy đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận dọc

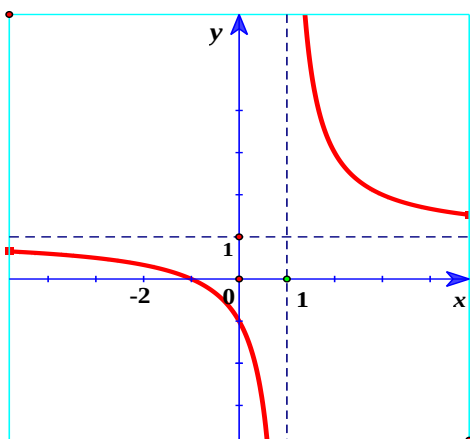
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'			
y	1		1

Đồ thị: Hình vẽ minh họa đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Đường cong có hai nhánh, một nhánh nằm trên đường tiệm cận ngang $y = 1$ và dưới đường tiệm cận dọc $x = 1$, nhánh kia nằm dưới đường tiệm cận ngang $y = 1$ và trên đường tiệm cận dọc $x = 1$. Hai nhánh tiến gần đến nhau khi x tiến đến $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Đồ thị

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; -1)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(-1; 0)$ (Hình vẽ)



Lưu ý: Giao điểm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị

Câu 5: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$

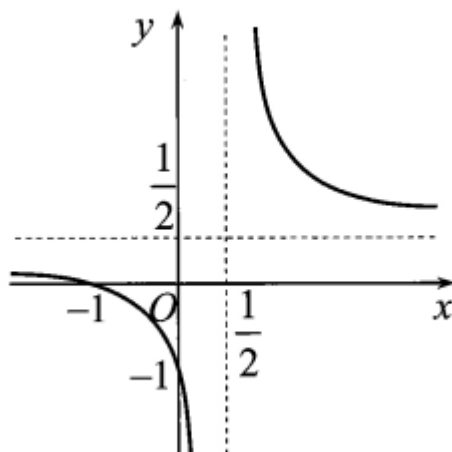
$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số có dạng:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'			
y	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$

Arrows indicate the behavior of the function: from $y = \frac{1}{2}$ at $x = -\infty$, it decreases to $-\infty$ as $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$, then increases from $+\infty$ at $x = \frac{1}{2}^+$ back to $y = \frac{1}{2}$ as $x \rightarrow +\infty$.

Đồ thị hàm số có dạng:





2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$)

Bước 1: Tìm tập xác định D

Bước 2: Tính y' và giải $y' = 0$

Bước 3: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của hàm số

+ Tiệm cận đứng: Tính $\lim_{x \rightarrow -\frac{m}{n}^+} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\frac{m}{n}^-} y$ rồi suy ra tiệm cận đứng là $x = -\frac{m}{n}$

+ Tiệm cận xiên:

- Chia tử cho mẫu để đưa hàm số về dạng $y = px + q + \frac{r}{mx + n}$

- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (px + q)]$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (px + q)]$ rồi suy ra tiệm cận xiên là $y = px + q$

Bước 4: Lập bảng biến thiên

Bước 5: Kết luận các khoảng biến thiên và tâm đối xứng I của hàm số

Bước 6: Lập bảng giá trị

Bước 7: Vẽ đồ thị

Hình dạng đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

$y' = 0$	a, m cùng dấu	a, m trái dấu
Có 2 nghiệm phân biệt		
Có nghiệm kép hoặc vô nghiệm		



MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 6: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x + 1}$

b) $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$

Lời giải

a) $y = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x + 1}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$$

$$\Rightarrow \text{TCĐ: } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x + 3)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (2x + 3)] = 0$$

$$\Rightarrow \text{TCX: } y = 2x + 3$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
y								

$-\infty \nearrow -3 \searrow -\infty$

$+\infty \searrow 5 \nearrow +\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $(-2; -3)$ và đạt cực tiểu tại điểm $(0; 5)$.

Hàm số có tâm đối xứng là $I(-1; 1)$

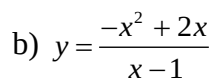
Bảng giá trị

x	-3	-2	0	1
y	-4	-3	5	6

□ Đồ thị



Thầy Lê Việt toán Thăng Long “Khai Mở Tư duy – Kiến Tạo Vận Mệnh” (zalo):0835.221183



$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0(VN)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$$

$$\Rightarrow \text{TC}\exists: x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x + 1)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x + 1)] = 0$$

$$\Rightarrow \text{TCX: } y = -x + 1$$

Bảng biến thiên:

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Hàm số có tâm đối xứng là $I(1;0)$

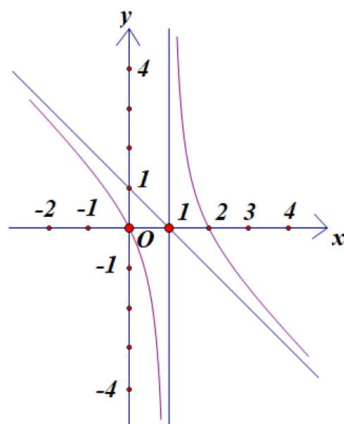
Bảng giá trị

11 | Th.s Lê Việt (THPT Thăng Long, Hà Nội) – Chuyên gia Chiến lược Giáo dục và Sự nghiệp



y	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$
-----	---------------	---	---	----------------

□ Đồ thị



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 7: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 7$

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

$$D = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

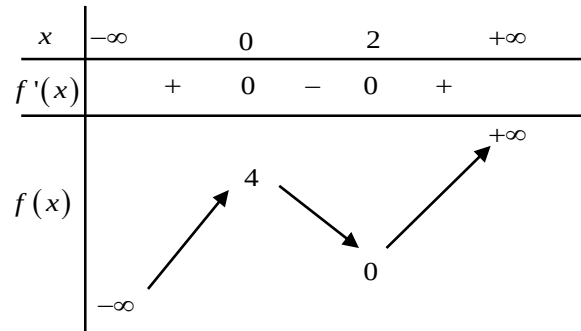
$$y'' = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2. \text{ Tâm đối xứng là } I(1; 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $(0; 4)$ và đạt cực tiểu tại điểm $(2; 0)$.

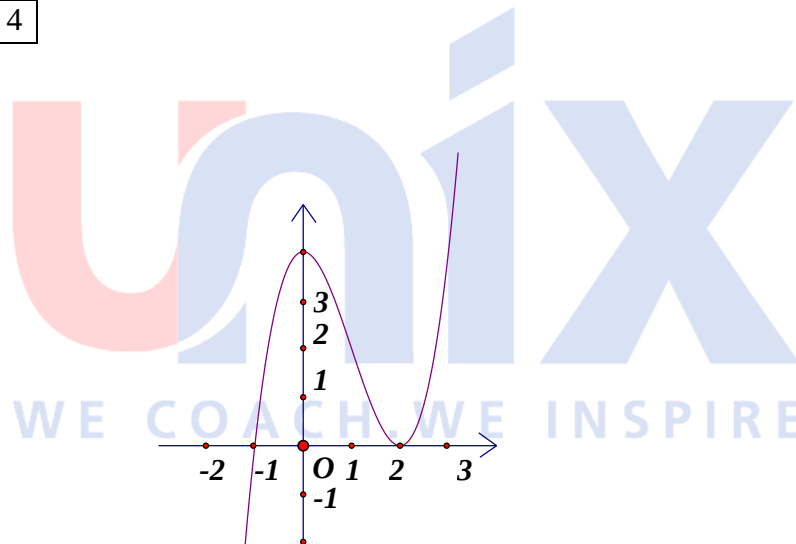
Hàm số có tâm đối xứng là $I(1; 2)$

$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	0	4	2	0	4

Đồ thị



b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 7$

$$D = \mathbb{R}$$

$$y' = -3x^2 + 6x - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$y'' = -6x + 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 6. \text{ Tâm đối xứng là } I(1; 6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	6	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên D

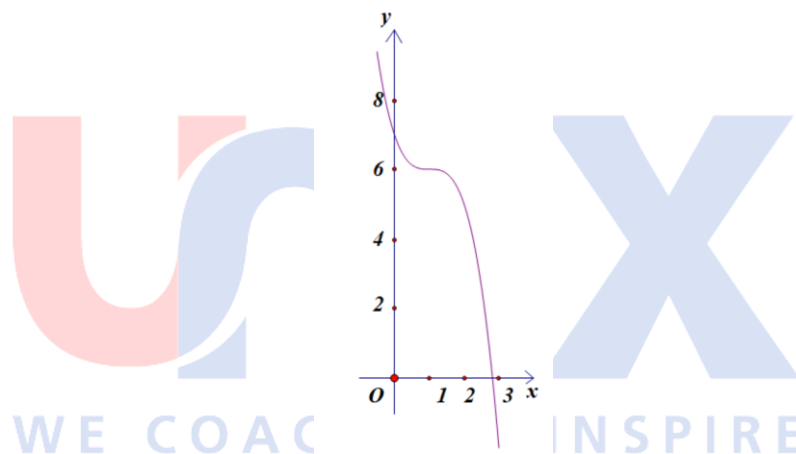
Hàm số không có cực trị

Hàm số có tâm đối xứng là $I(1;6)$

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	14	7	6	5	-2

Đồ thị



Câu 8: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{x+2}{x+5}$

Lời giải

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

$$y' = \frac{3}{(x+5)^2} > 0, \forall x \in D$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} y = +\infty$$

$$\Rightarrow \text{TCD: } x = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$$

$$\Rightarrow \text{TCN: } y = 1$$



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -5)$ và $(-5; +\infty)$

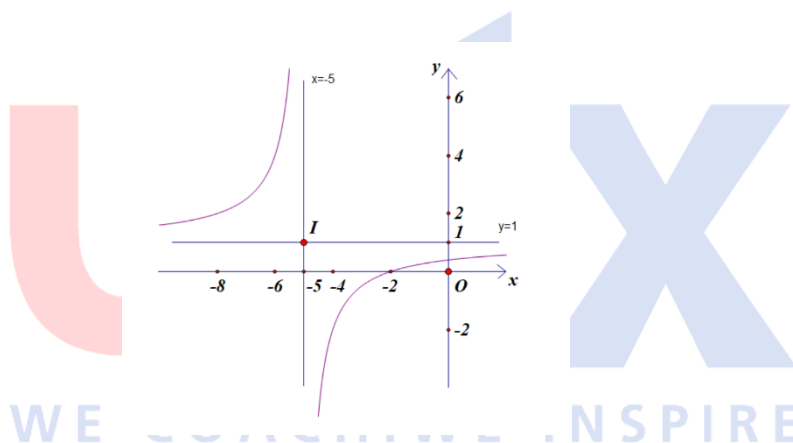
Hàm số không có cực trị

Hàm số có tâm đối xứng là $I(-5; 1)$

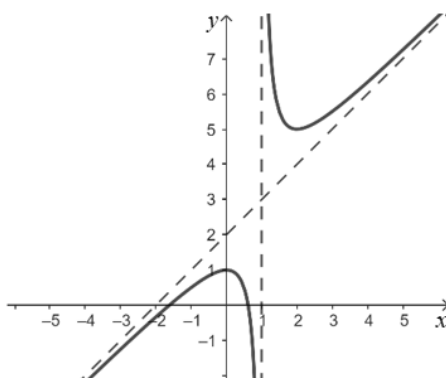
Bảng giá trị

x	-7	-6	-4	-3
y	$\frac{5}{2}$	4	-2	$-\frac{1}{2}$

☐ Đồ thị



Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a > 0, m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b, c, m, n có tất cả bao nhiêu số dương?



Lời giải

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} \quad (a > 0, m \neq 0); D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-n}{m} \right\}$$



Tiệm cận xiên $y = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx} \right) = \frac{a}{m} = 1 \Leftrightarrow a = m > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(b+n)x + c}{mx + n} \right] = \frac{b+n}{m} = 2$$

$$\Leftrightarrow b + n = 2m$$

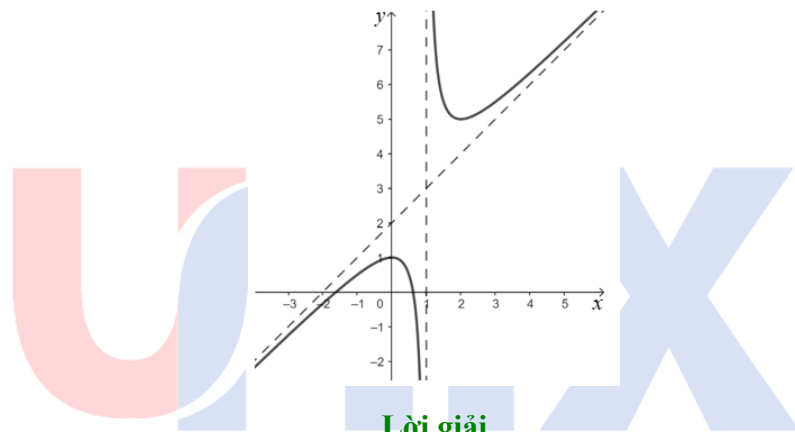
$$\Leftrightarrow b - m = 2m$$

$$\Leftrightarrow b = 3m = 3a > 0$$

Tiệm cận đứng $x = \frac{-n}{m} = 1 \Leftrightarrow n = -m = -a < 0$

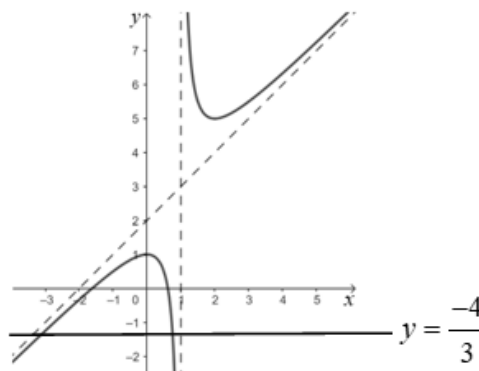
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $y_0 = \frac{c}{n} > 0 \Rightarrow c < 0$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là:



Lời giải

$$3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-4}{3}$$



Đường thẳng $y = \frac{-4}{3}$ cắt đồ thị tại 2 điểm.