



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

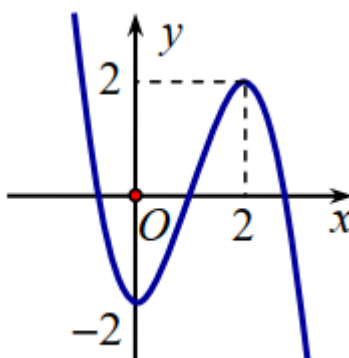
Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

- a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 3x^2 - 6x$
- b) Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$
- c) Bảng biến thiên của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				2		$-\infty$

Arrows indicate the curve passing through $(-\infty, +\infty)$, $(0, -2)$, $(2, 2)$, and $(+\infty, -\infty)$.

- d) Đồ thị hàm số đã cho như hình dưới



Lời giải

ĐÚNG – SAI – SAI – SAI.

a) $y' = 3x^2 - 6x$

Chọn đúng.



b) $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	

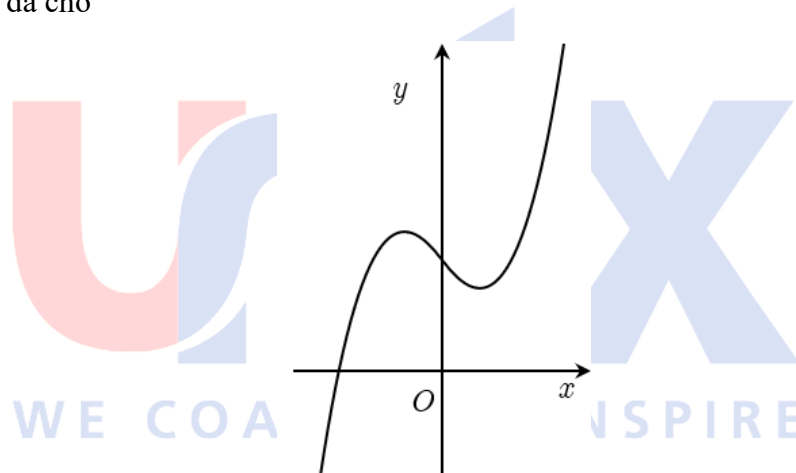
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn Sai.

c) Chọn Sai

d) Đồ thị hàm số đã cho



Chọn sai.

Câu 2: Cho hàm số $y = x + \frac{4}{x}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 1 + \frac{4}{x^2}$.

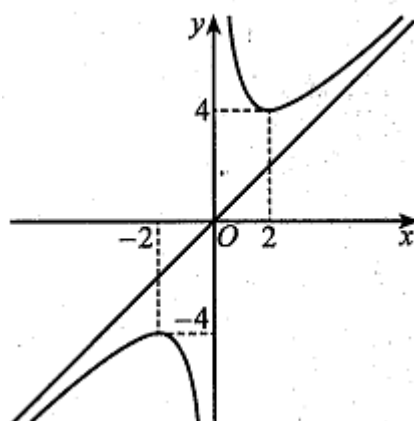
b) Đạo hàm của hàm số đã cho nhận giá trị âm trên các khoảng $(-2; 0) \cup (0; 2)$ và nhận giá trị dương trên các khoảng $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	$+\infty$	$-\infty$	-4	$+\infty$



d) Đồ thị hàm số đã cho như ở hình dưới:



Lời giải:

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$ nên mệnh đề sai.

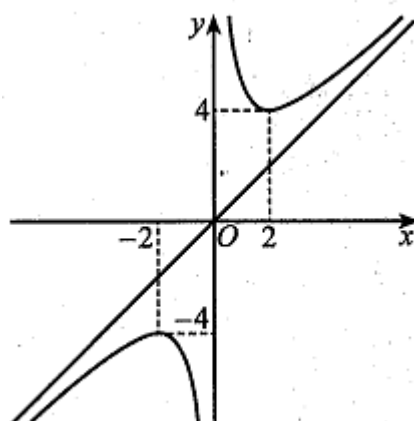
b) Đúng $y' = 1 - \frac{4}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}, x \neq 0$ nên đạo hàm của hàm số đã cho nhận giá trị âm trên các khoảng $(-2; 0) \cup (0; 2)$ và nhận giá trị dương trên các khoảng $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

c) Sai Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	$+\infty$	$-\infty$	4	$+\infty$

Mệnh đề sai vì thấy $y(-2) = -4 \neq 4$

d) Đúng Đồ thị hàm số đã cho như ở hình 4, mệnh đề đúng



Hình 4

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

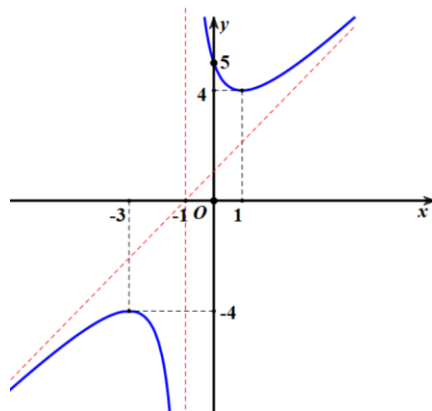


a) $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$

b) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số là $y = 2x - 2$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

d) Đồ thị của hàm số có hình vẽ như sau



Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) ĐÚNG

$$y' = \frac{(x^2 + 2x + 5)'(x+1) - (x+1)'(x^2 + 2x + 5)}{(x+1)^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x + 5)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

b) SAI

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{hàm số có hai điểm cực trị là } A(1; 4), B(-3; -4).$$

Gọi phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị có dạng $y = ax + b$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ -3a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

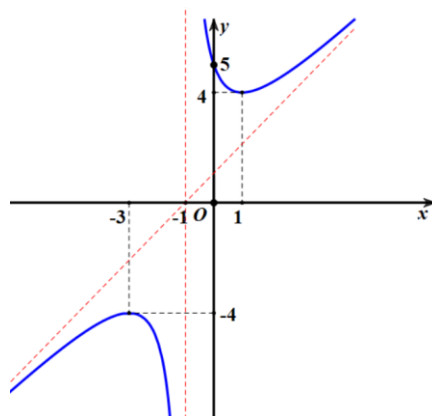
Phương trình đường thẳng AB là $y = 2x + 2$.

c) ĐÚNG

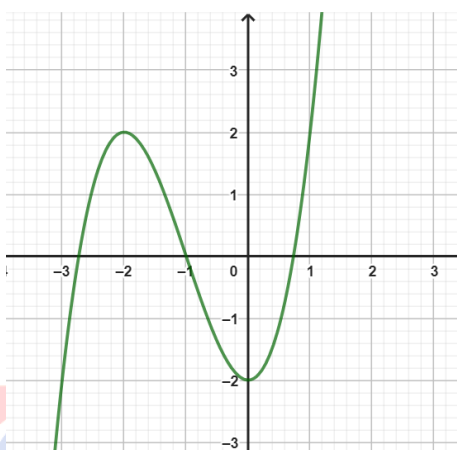
$$y = x + 1 + \frac{4}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x+1} = 0 \Rightarrow y = x + 1 \text{ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.}$$

d) ĐÚNG



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị trong hình dưới đây.



- a) Hệ số $a > 0$.
- b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- c) Phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
- d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng

Từ đồ thị suy ra $a > 0$

b) Sai

Từ đồ thị ta có hàm số đạt cực đại tại $x = -2$

c) Đúng

Ta có $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$

Từ đồ thị ta có đường thẳng $y = \frac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên PT

$3f(x) - 5 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

d) Sai



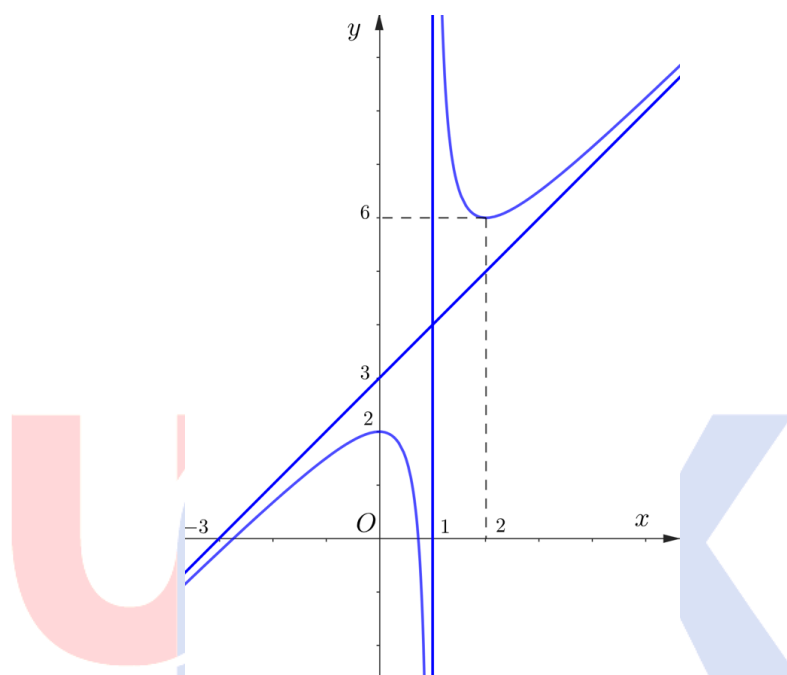
Từ đồ thị ta có:

Đồ thị giao với Oy tại điểm có tung độ $-2 \Rightarrow d = -2$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $(-2; 2), (-1; 0), (1; 2)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -8a + 4a - 2c - 2 = 2 \\ -a + b - c - 2 = 0 \\ a + b + c - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + 2x + c}{x + n}$ có đồ thị như hình vẽ.



- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên lần lượt là $x = 1$ và $y = x + 3$.
- b) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng có tọa độ là $(1; 3)$.
- c) $a > 0, c < 0, n > 0$.
- d) Biểu thức $P = a + b + c$ có giá trị là -2 .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Dựa vào đồ thị ta có

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận xiên là $y = x + 3$.
- b) Đồ thị hàm số nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng nên có tọa độ là $(1; 4)$.
- c) Từ đồ thị hàm số, ta có đường tiệm cận đứng là $x = 1$, đường tiệm cận xiên là $y = x + 3$ và cắt trục tung tại điểm có tọa độ là $(0; 2)$.

Mà đồ thị hàm số đã cho $y = \frac{ax^2 + 2x + c}{x + n} = ax + b + \frac{d}{x + n}$ ($b, d \in \mathbb{R}$) có đường tiệm cận đứng là $x = -n$



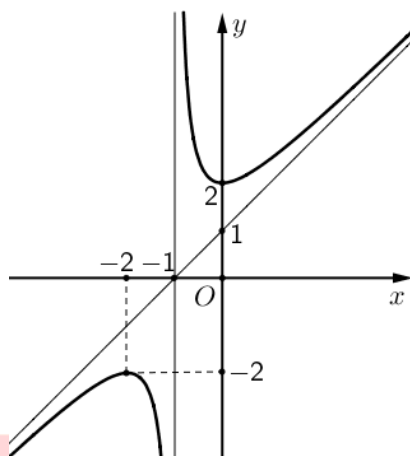
, đường tiệm cận xiên là $y = ax + b$ và cắt trục tung tại điểm có tọa độ là $\left(0; \frac{c}{n}\right)$.

Do đó $-n=1$, $a=1$, $\frac{c}{n}=2$. Suy ra $n=-1$, $a=1$, $c=-2$.

Vậy $a > 0$, $c < 0$, $n < 0$.

d) Vì $n=-1$, $a=1$, $c=-2$ nên $P=a+b+c=-2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



- Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = -1$.
- Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận xiên $y = x + 1$.
- Gọi A, B là 2 điểm cực trị của hàm số đã cho, diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{5}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Sai

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

b) Đúng

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $x = -1$.

c) Đúng

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua 2 điểm là $(-1; 0)$ và $(0; 1)$ nên

có phương trình là $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \Rightarrow y = x + 1$.

d) Sai



Giả sử $A(-2; -2)$ là điểm cực đại, $B(0; 2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho, ta có:

$$OA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, OB = 2, AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$p = \frac{OA + OB + AB}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$S_{\Delta OAB} = \sqrt{p(p - 2\sqrt{2})(p - 2)(p - 2\sqrt{5})} = 2.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x}{x-2}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

c) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là hai điểm phân biệt.

d) Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 16.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hàm số xác định khi $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

b) Bảng biến thiên của hàm số là

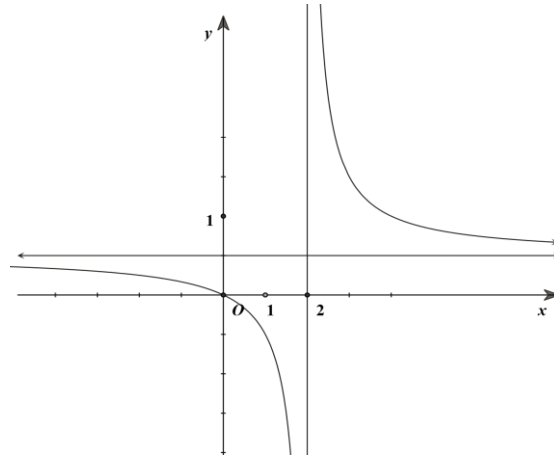
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

c) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là gốc tọa độ.

Ta có: $f(0) = \frac{0}{0-2} = 0 \Rightarrow$ Đồ thị cắt trục tung tại một điểm duy nhất là gốc tọa độ.



d) Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 4.



Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

Gọi $A\left(a; \frac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \frac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) ($a < 2 < b$).

$$\Rightarrow \overline{AB} = \left(b-a; \frac{b}{b-2} - \frac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \frac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$$

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương $(b-2)$ và $(2-a)$ ta có: $(b-2)(2-a) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

$$\Rightarrow AB^2 = (b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2} \geq (b-a)^2 + \frac{64}{(b-a)^2} \geq 16$$

$$\Rightarrow AB \geq 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} b-2=2-a \\ (b-a)^2 = \frac{64}{(b-a)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-\sqrt{2} \\ b=2+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } AB_{\min} = 4.$$

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

c) Sai: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là hai điểm phân biệt.



d) Sai: Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 16.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2024}{x-1}$ có đồ thị (C) .

- a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.
- c) (C) có 2 trục đối xứng.
- d) Trên (C) có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2024}{x-1} = x - 1 + \frac{2023}{x-1}; D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x - 1$.
- c) (C) có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của các góc tạo bởi 2 đường tiệm cận.
- d) $M(x; y) \in (C)$ có tọa độ nguyên khi $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 2023:(x-1) \end{cases}$ 2023 có 4 ước số nên có 4 điểm.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị (C) .

- a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.
- b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1$.
- c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2; -1)$.
- d) $\forall M \in (C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

$$y = \frac{1-2x}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

Tiệm cận đứng: $x = -1$.

Tiệm cận ngang: $y = -2$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(-1; -2)$



$$M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; -2 + \frac{3}{x_0 + 1}\right)$$

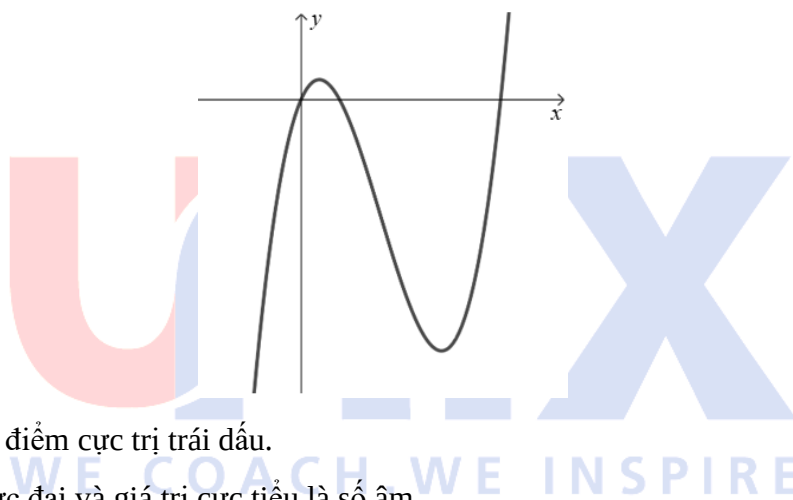
Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng: $d_1 = |x_0 + 1|$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang: $d_2 = |y_0 + 2| = \left| -2 + \frac{3}{x_0 + 1} + 2 \right| = \frac{3}{|x_0 + 1|}$.

$$d_1 \cdot d_2 = 3.$$

- a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.
- b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1$.
- c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2; -1)$.
- d) $\forall M \in (C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3.

Câu 10: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.



- a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.
- b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.
- c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
- d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

“Nhánh bên phải” hướng lên $\Rightarrow a > 0$

Đồ thị qua gốc tọa độ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = d = 0$.

Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ các cực trị

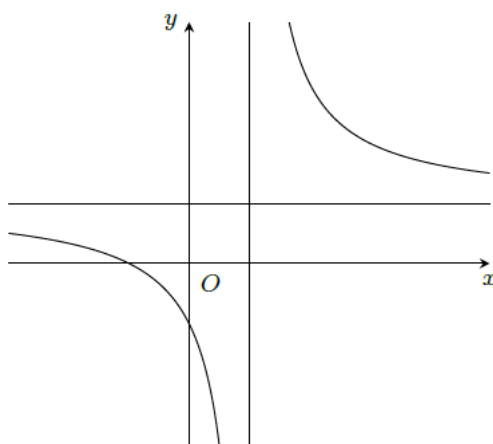


$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$$

- a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.
- b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.
- c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
- d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

Câu 11: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



- a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.
- c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.
- d) Trong các số a, b, c có hai số âm.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

b) Đúng.

Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.

c) Đúng.

Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.

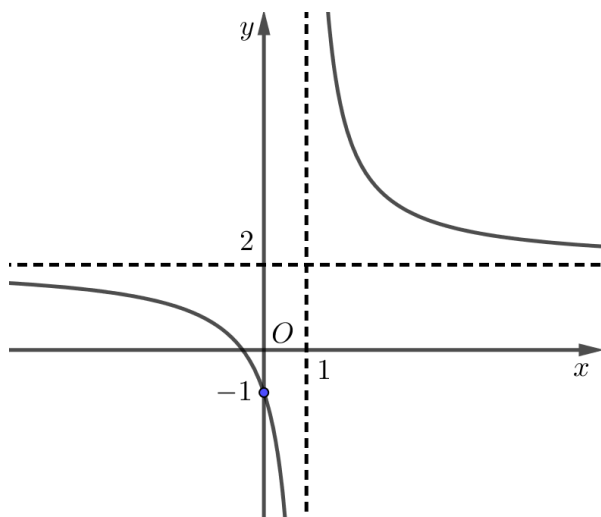
d) Sai.

Tiệm cận đứng $x = a > 0$.

Tiệm cận ngang $y = b > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$ (vì $a > 0$).

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + 1}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Tâm đối xứng của đồ thị có tọa độ là $(2;1)$		
b) $a - 2b + c = -5$.		
c) Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x=2$ có phương trình là $y = -3x + 11$.		
d) Có đúng 4 điểm $M(m;n)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thuộc đồ thị.		

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

+ Từ đồ thị, ta có:

Tiệm cận đứng: $x=1$

Tiệm cận ngang: $y=2$

$\Rightarrow$ Tâm đối xứng của đồ thị có tọa độ là $(1;2)$

$\Rightarrow$ Câu a sai.

+ Từ đồ thị, ta có:

Tiệm cận đứng: $x=1 \Rightarrow -\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow c=-1$

Tiệm cận ngang: $y=2 \Rightarrow \frac{a}{c}=2 \Leftrightarrow a=2c$

$\Rightarrow a=-2$

Điểm $A(0;-1)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow -1=b$.

Do đó: $a-2b+c=-1$.

$\Rightarrow$ Câu b sai.

+ Với $a=-2; b=-1; c=-1$ suy ra: $y = \frac{-2x-1}{-x+1}$

$\Rightarrow y' = \frac{-3}{(-x+1)^2}$

Ta có: $x=2 \Rightarrow \begin{cases} y(2)=5 \\ y'(2)=-3 \end{cases}$

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x=2$ có phương trình là



$$y = y'(2)(x-2) + y(2)$$

$$\Leftrightarrow y = -3x + 11$$

$\Rightarrow$ Câu c đúng.

$$+ \text{Ta có: } y = \frac{-2x-1}{-x+1}$$

$$\text{Vì } M(m;n) \text{ thuộc đồ thị nên } n = \frac{-2m-1}{-m+1} \Leftrightarrow n = 2 - \frac{3}{-m+1}$$

$$\text{Do } m, n \in \mathbb{Z} \text{ nên } (-m+1) \in U(3) \Leftrightarrow -m+1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{4; 2; 0; -2\}$$

Suy ra: có đúng 4 điểm $M(m;n)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thuộc đồ thị.

$\Rightarrow$ Câu d đúng.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) .

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

c) Đường thẳng $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên của (C) .

d) Số điểm trên (C) có tọa độ nguyên là 3.

Lời giải

a) Đúng.

Điều kiện: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Vậy tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Sai.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D.$$

Vậy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

c) Đúng.

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = x + 2 - \frac{1}{x + 1}$$

$$\text{Và: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x + 1} = 0$$

Suy ra: đường thẳng $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên của (C) .

d) Sai.



Ta có: $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = x + 2 - \frac{1}{x + 1}$

Ta thấy: với $x \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi 1 chia hết cho $(x + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 1 \\ x + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1(n) \\ x = -2 \Rightarrow y = 1(n) \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm trên (C) có tọa độ nguyên là $(0;1)$ và $(-2;1)$.

Câu 14: Anh B chế tạo một bể cá có dạng khối hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $0,096 \text{ m}^3$, chiều cao $h = 0,6 \text{ m}$, chiều rộng x , chiều dài y , với $x > 0, y > 0$. Anh B dùng loại kính để làm các mặt bên có giá 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá 100.000 đồng/ m^2 . Mọi chi phí khác xem như không đáng kể. Khi đó

a) Hàm số biểu thị y theo x là $y = \frac{0,16}{x}$.

b) Chi phí mua kính để làm đáy bể là 11200 đồng.

c) Biểu thức tính chi phí làm các mặt xung quanh là $C_{xq} = 84000 \cdot \left(x + \frac{0,16}{x}\right)$.

d) Chi phí làm bể cá thấp nhất là 100000 đồng.

Lời giải

a) Đúng.

Thể tích khối hộp hình chữ nhật: $V = xyh = 0,6xy = 0,096 \Rightarrow y = \frac{0,16}{x}$

Vậy $y = \frac{0,16}{x}$

b) Sai.

Diện tích đáy bể là $S_d = xy = 0,16 \text{ m}^2$.

Chi phí mua kính để làm đáy bể là $C_d = 10000 \cdot S_d = 16000$ đồng

c) Đúng.

Diện tích các mặt xung quanh: $S_{xq} = 2(0,6x + 0,6y) = 1,2 \cdot \left(x + \frac{0,16}{x}\right)$

Biểu thức tính chi phí làm các mặt xung quanh là $C_{xq} = 84000 \cdot \left(x + \frac{0,16}{x}\right)$.

d) Sai.

Chi phí làm bể cá: $C(x) = C_{xq} + C_d = 84000 \cdot \left(x + \frac{0,16}{x}\right) + 16000, x > 0$

Chi phí làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi $\left(x + \frac{0,16}{x}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất



Xét hàm số $f(x) = x + \frac{0,16}{x} = \frac{x^2 + 0,16}{x}, x > 0$

$$\bullet f'(x) = \frac{x^2 - 0,16}{x^2}$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 0,16 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

• Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2}{5}$	$-\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$

$$\bullet \text{ Suy ra: } \min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

Vậy chi phí thấp nhất để làm bể cá là: $C = \frac{84000 \cdot 4}{5} + 16000 = 83200$ đồng.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

b) Đồ thị (C) của hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = -2$.

c) Đồ thị (C) của hàm số đã cho có tiệm cận xiên $y = x - 3$.

d) Gọi S là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị (C). Khi đó, số phần tử của S là 3.

Lời giải

a) Đúng

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x + 2)^2} > 0, \forall x \in D.$$

Vậy hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

b) Đúng

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = -\infty$$



Vậy $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) Sai

Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + 2x} = 1$ và $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 3}{x + 2} = -1$.

Vậy $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

d) Sai

Ta có: $y = \frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = \frac{x^2 + 2x - (x + 2) - 1}{x + 2} = x - 2 - \frac{1}{x + 2}$.

Đề $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ thì suy ra $\frac{1}{x + 2} \in \mathbb{Z}$ suy ra $\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Với $x = -1 \Rightarrow y = -3$.

Với $x = -3 \Rightarrow y = -3$.

Vậy có 2 điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị (C) , số phần tử của S là 2.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$.

a) Hàm số có tập xác định $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[2; 5]$ tại $x = 5$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $M(-1; -3)$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1} = x + 2 - \frac{1}{x - 1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$y' = 1 + \frac{1}{(x - 1)^2} > 0, \forall x \in D$

Ta có bảng biến thiên:

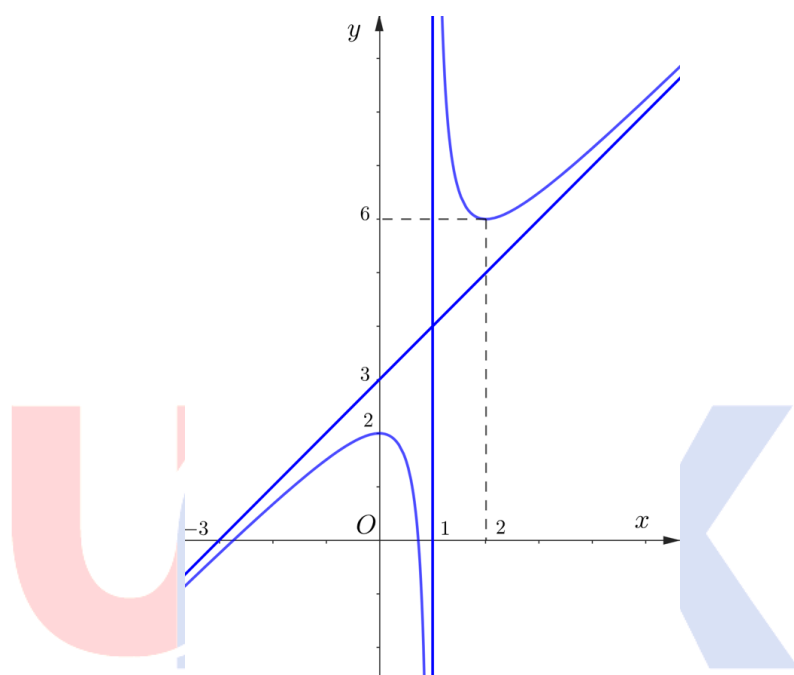
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$



Dựa vào bảng biến thiên:

- a) Đúng
- b) Sai
- c) Đúng vì trong $[2;5]$ hàm số đồng biến nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=5$.
- d) Sai vì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận xiên $y=x+2$ nên đồ thị có tâm đối xứng là điểm $M(1,3)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + 2x + c}{x + n}$ có đồ thị như hình vẽ.



- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên lần lượt là $x=1$ và $y=x+3$.
- b) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng có tọa độ là $(1;3)$.
- c) $a > 0, c < 0, n > 0$.
- d) Biểu thức $P = a + b + c$ có giá trị là -2 .

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$ và đường tiệm cận xiên là $y=x+3$.
- b) Đồ thị hàm số nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng nên có tọa độ là $(1;4)$.
- c) Từ đồ thị hàm số, ta có đường tiệm cận đứng là $x=1$, đường tiệm cận xiên là $y=x+3$ và cắt trục tung tại điểm có tọa độ là $(0;2)$.

Mà đồ thị hàm số đã cho $y = \frac{ax^2 + 2x + c}{x + n} = ax + b + \frac{d}{x + n} (b, d \in \mathbb{R})$ có đường tiệm cận đứng là



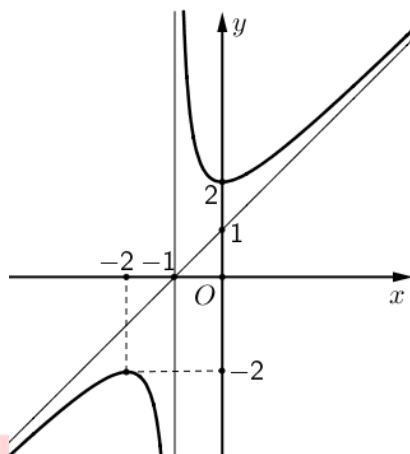
$x = -n$, đường tiệm cận xiên là $y = ax + b$ và cắt trục tung tại điểm có tọa độ là $\left(0; \frac{c}{n}\right)$.

Do đó $-n=1$, $a=1$, $\frac{c}{n}=2$. Suy ra $n=-1$, $a=1$, $c=-2$.

Vậy $a > 0$, $c < 0$, $n < 0$.

d) Vì $n=-1$, $a=1$, $c=-2$ nên $P=a+b+c=-2$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



- Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = -1$.
- Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận xiên $y = x + 1$.
- Gọi A, B là 2 điểm cực trị của hàm số đã cho, diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{5}$.

Lời giải

a) Sai

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

b) Đúng

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $x = -1$.

c) Đúng

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua 2 điểm là $(-1; 0)$ và $(0; 1)$ nên

có phương trình là $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \Rightarrow y = x + 1$.

d) Sai



Giả sử $A(-2;-2)$ là điểm cực đại, $B(0;2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho, ta có:

$$OA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad OB = 2, \quad AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$p = \frac{OA + OB + AB}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$S_{\Delta OAB} = \sqrt{p(p-2\sqrt{2})(p-2)(p-2\sqrt{5})} = 2.$$

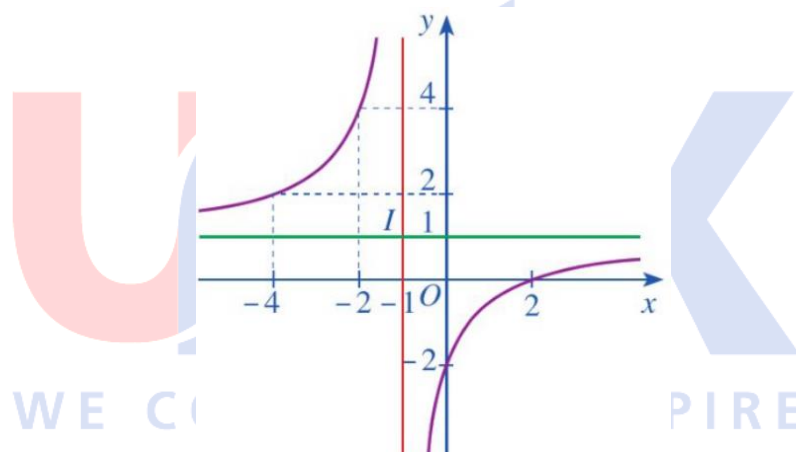
Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là hàm số $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

b) $f(0) = 2, f(-2) = 0$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên nửa khoảng $(-1;3]$ bằng 1.

d) Hàm số có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới



Lời giải

a) Đúng vì $f(x) = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

b) Sai vì $f(0) = -2, f(-2) = 4$.

c) Sai vì

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in D.$$

Hàm số đồng biến trên $(-1;3]$ nên giá trị lớn nhất của hàm số trên nửa khoảng $(-1;3]$ bằng $f(3) = \frac{1}{4}$.

d) Đúng vì

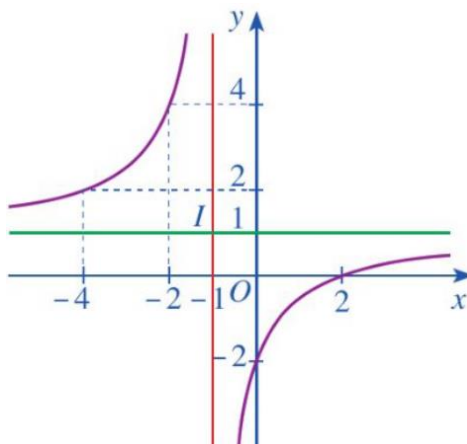


TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in D.$$

Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 1$

Đồ thị



Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) bằng $4\sqrt{5}$.

c) Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) có phương trình $x = 2$, $y = x$.

d) Đường thẳng $y = 2x - 2$ cắt (C) tại hai điểm A, B và trung điểm của AB là tâm đối xứng của đồ thị (C) .

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$		-2		$+\infty$		6		$+\infty$

a) Sai.

Do hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

b) Đúng.



Đồ thị hàm số (C) có điểm cực tiểu $A(0; -2)$, điểm cực đại $B(4; 6)$.

Vậy khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) bằng $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (6+2)^2} = 4\sqrt{5}$.

c) Đúng.

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = 0$ nên đồ thị (C) có tiệm cận xiên $y = x$.

+ $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$ nên đồ thị (C) có tiệm cận đứng: $x = 2$.

d) Đúng.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

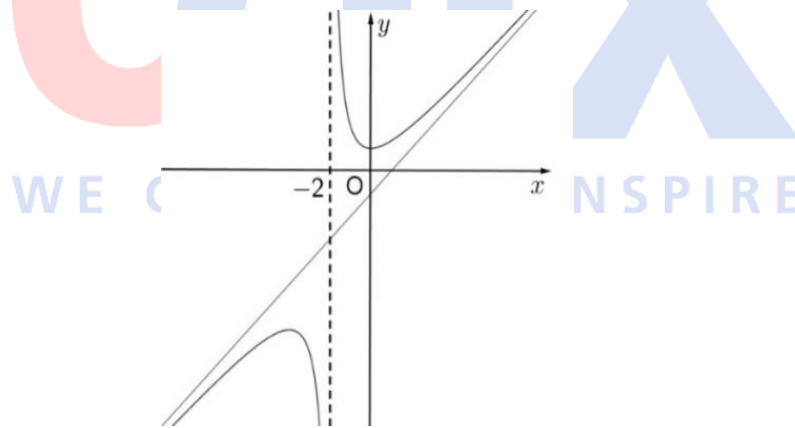
Vậy $A(0; -2)$, $B(4; 6)$.

Khi đó trung điểm của AB là $I(2; 2)$.

Mặt khác đồ thị có hai đường tiệm cận có phương trình $x = 2$, $y = 2$ suy ra tâm đối xứng của đồ thị là $I(2; 2)$.

Vậy trung điểm của AB là tâm đối xứng của đồ thị (C) .

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x + c}$ ($a > 0$), có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới. Biết đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.



a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) $a = 1$.

c) Đồ thị (C) có 2 điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox .

d) $24a + 4b + 1000c > 2025$.

Lời giải

a) Đúng.

b) Đúng.



Ta có $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x + c} = ax + (1 - ac) + \frac{b - c(1 - ac)}{x + c}$.

Suy ra đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = ax + (1 - ac)$.

Dựa vào tính chất đường tiệm cận xiên tạo với 2 trục tọa độ một tam giác cân và hình dáng đồ thị ta có tiệm cận xiên sẽ song song đường thẳng $y = x \Rightarrow a = 1$.

c) Đúng.

d) Đúng.

Do $x = -2$ là đường tiệm cận đứng nên ta suy ra được $c = 2$.

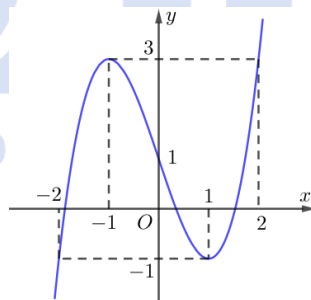
Khi đó đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = x - 1$. Từ đó suy ra giao điểm của đường tiệm cận xiên với trục tung là $M(0; -1)$.

Thay $x = 0$ vào phương trình của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được $y = \frac{b}{c}$ suy ra giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung là $N(0; \frac{b}{c})$.

Từ tung độ của hai điểm M, N và dựa vào đồ thị hàm số ta có $\frac{b}{c} > 0,5 \Leftrightarrow \frac{b}{2} > 0,5 \Leftrightarrow b > 1 \Leftrightarrow 4b > 4$.

$$24a + 4b + 1000c > 24 \cdot 1 + 4 + 1000 \cdot 2 \Leftrightarrow 24a + 4b + 1000c > 2028 > 2025.$$

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 1: **b)** Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Trên đoạn $[-2; 2]$, hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2

d) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải

a) Đúng.

Trong khoảng $(-1; 1)$ hàm số $f(x)$ nghịch biến.

b) Đúng.

Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 1$.

c) Sai.



Trên đoạn $[-2; 2]$, hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 3.

d) Đúng.

Hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba $\Rightarrow y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Đồ thị hàm số đi qua 4 điểm $(-2; -1); (-1; 3); (0; 1)$ và $(1; -1)$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (-2)^3 a + (-2)^2 b + (-2)c + d = -1 \\ (-1)^3 a + (-1)^2 b + (-1)c + d = 3 \\ 0^3 a + 0^2 b + 0c + d = 1 \\ 1^3 a + 1^2 b + 1c + d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = -1 \\ -a + b - c + d = 3 \\ d = 1 \\ a + b + c + d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

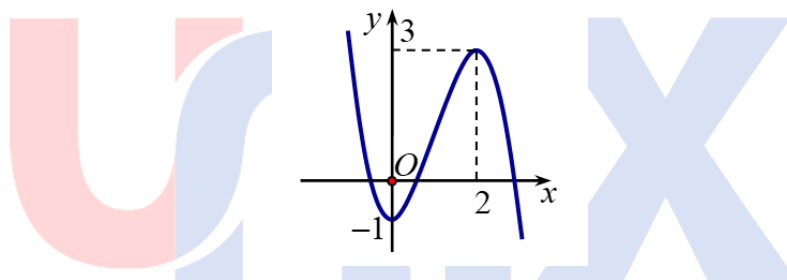
Cách khác:

d) Hàm số có hai điểm cực trị $-1; 1$ nên $f'(x) = 3a(x+1)(x-1) = a(3x^2 - 3)$

$$\Rightarrow f(x) = a(x^3 - 3x) + d$$

Do đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua $(0; 1), (1; -1)$ nên có $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình sau đây.



a) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ bằng -1 .

b) Phương trình $\log_3[f(x) + 6] = 2$ có hai nghiệm.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

d) Tổng $2025a + b + c + d = -2023$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng vì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và giá trị cực tiểu bằng $f(0) = -1$.

b) Đúng vì $\log_3[f(x) + 6] = 2 \Leftrightarrow f(x) + 6 = 9 \Leftrightarrow f(x) = 3$.

Dựa vào đồ thị, đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm nên phương trình $f(x) = 3$ có hai nghiệm.

c) Sai vì trên khoảng $(2; 3)$ hàm số $y = f(x)$ nghịch biến.

d) Đúng vì $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.



$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f(0) = -1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ d = -1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Vậy $2025a + b + c + d = -2023$.

